On peut voir la notion de « série de terme général u_n » comme un outil servant à répondre à la question : peut-on additionner tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
On sait additionner deux nombres, puis un nombre fini de nombres (par additions successives de deux nombres grâce l'associativité de l'addition), mais est-il possible d'additionner une infinité (dénombrable) de nombres ?
Et si oui, la somme reste-t-elle la même quel que soit l'ordre dans lequel on additionne les termes ?

Pour tout entier naturel n_0, on pose $[\![n_0\ ;\ +\infty[\![= \mathbb{N} \cap [n_0\ ;\ +\infty[$, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ désignera une suite numérique, c'est-à-dire une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ (le rang initial n_0 étant le plus souvent égal à 0).

1. Définitions

Définition 4.1 – Série, somme partielle d'une série

Pour toute suite numérique $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, étudier la « série de terme général u_n » revient à étudier la suite des sommes finies $\sum\limits_{n=n_0}^{\mathrm{N}} u_n$.

- On note $\sum u_n$ (ou parfois $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$) la série de terme général u_n.
- On appelle u_n **le terme général de la série** $\sum u_n$.
- Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, la somme finie $\mathrm{S_N} = \sum\limits_{n=n_0}^{\mathrm{N}} u_n$ est appelée **somme partielle de rang** N de la série $\sum u_n$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est la dérivée discrète de la suite $(\mathrm{S_N})_{\mathrm{N}\geqslant n_0}$ des sommes partielles $\mathrm{S_N} = \sum\limits_{n=n_0}^{\mathrm{N}} u_n$, car pour tout $n \geqslant n_0 + 1$,

$$(\Delta \mathrm{S})_n = \frac{\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}}{n-(n-1)} = \sum_{k=n_0}^{n} u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k = u_n.$$

Définition 4.2 – Les séries de référence

On appelle :

- **série harmonique** la série de terme général $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\sum \frac{1}{n}$,
- **série harmonique alternée** la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$,
- **séries de Riemann** les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$,
- **série géométrique de raison** z la série de terme général z^n, où $z \in \mathbb{C}$,
- **séries exponentielles** les séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ où $z \in \mathbb{C}$.

Définition 4.3 – Convergence d'une série

- La série $\sum u_n$ est **convergente** $\boxed{\text{lorsque}}$ la suite $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ de ses sommes partielles est convergente, c'est-à-dire $\boxed{\text{lorsque}}$ la limite $\lim\limits_{N \to +\infty} \left(\sum\limits_{n=n_0}^{N} u_n \right)$ existe et est finie.
- Cette limite est alors appelée **somme de la série**, et on la note $S_\infty = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$
  Le **reste d'ordre** N défini par $R_N = S_\infty - S_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$, tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
- Dire que la série $\sum u_n$ **diverge** signifie qu'elle ne converge pas.
- On appelle **nature** d'une série son caractère convergent ou divergent.

Bien comprendre qu'une somme infinie $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est en réalité une limite !
C'est la limite des sommes partielles.

Remarque 4.1 – Valeur approchée de la somme

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, alors $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$ est une valeur approchée de la somme $S_\infty = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ avec l'erreur $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4.1 – Les fonctions trigonométriques. *(Avec la formule de Taylor-Lagrange).*

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Exemples 4.1.

(1) **Suites à support fini** : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum u_n$ est convergente et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{p} u_n$.

(2) La série harmonique diverge et $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$ (voir l'exercice 6.13).

(3) La série de terme général $(-1)^n$ diverge.

Remarque 4.2 – La nature d'une série ne dépend que du comportement asymptotique de son terme général

Si à partir d'un certain rang $u_n = v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On peut aussi dire que la **nature** d'une série ne change pas si on modifie un nombre fini de ses termes.

En revanche, la valeur de sa somme sera évidemment modifiée dès qu'un terme est différent !

Remarque 4.3 – Notations

On a le parallèle suivant pour les notations entre les notions de suite et de série :

La suite de terme général u_n :	$(u_n)_{n\geqslant n_0}$	le terme de rang n :	u_n	si la suite converge, la limite de la suite :	$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$
La série de terme général u_n :	$\sum u_n$	la somme partielle de rang N :	$\sum_{n=0}^{N} u_n$	si la série converge, la somme de la série :	$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Proposition 4.1 – Convergence d'une série de nombres complexes

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe :

(1) $\sum z_n$ est convergente $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ les séries réelles $\sum \mathbb{R}\mathrm{e}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ sont convergentes.

Dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}\mathrm{e}(z_n) + i\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$, autrement dit,

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}\mathrm{e}(z_n) \text{ et } \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

(2) Les séries $\sum z_n$ et $\sum \overline{z}_n$ sont de même nature, et si elles convergent :

$$\overline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{z}_n.$$

Exemple 4.2 – Convergence et somme de $\sum \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$.

Comme dans l'exemple 4.4, la série géométrique $\sum \mathrm{e}^{-nx(1-i)} = \sum \left(\mathrm{e}^{-x(1-i)}\right)^n$ converge pour tout réel $x > 0$, car $\left|\mathrm{e}^{-x(1-i)}\right| = \mathrm{e}^{-x} \in\,]-1\,;\,1[$.

Donc la proposition précédente permet d'affirmer que $\sum \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-nx(1-i)}\right) = \sum \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$ converge et que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) &= \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx(1-i)}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x(1-i)}\right)^n\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x(1-i)}}\right) \quad \textit{(somme de la série géométrique de raison } \mathrm{e}^{-x(1+i)} \textit{ de module } \left|\mathrm{e}^{-x}\right| < 1\textit{)}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}\sin(x)}{(1-\mathrm{e}^{-x}\cos(x))^2 + \mathrm{e}^{-2x}\sin^2(x)}.\end{aligned}$$

Proposition 4.2 – Une condition nécessaire de convergence

(1) $\boxed{\text{Si}}$ la série $\sum u_n$ converge $\boxed{\text{alors}}$ $\lim(u_n) = 0$.
Si u_n ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

(2) **La réciproque est fausse !** (penser à $\sum \frac{1}{n}$).

Exemple 4.3. La série $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge grossièrement car $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \cos(0) = 1$.

Méthode 4.1 – Pour calculer la somme d'une série $\sum u_n$ (et étudier sa nature du même coup), on peut :

(1) (vérifier d'abord en cachette que u_n tend vers 0, si ce n'est pas le cas conclure que la série diverge d'après la proposition 4.2, sinon continuer comme si de rien n'était...),

(2) prendre un entier N *quelconque,*

(3) et manipuler la somme partielle $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ *jusqu'à ce que l'on puisse connaître son comportement quand* N *tend vers* $+\infty$ *:*

(4) si S_N *tend vers une limite finie* S *la série converge et a pour somme* S*, sinon elle diverge.*

Exercice 4.2.

1. Montrer que les polynômes $P_0(X) = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et donner les coordonnées du polynôme $2X+1$ dans cette base.
2. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\frac{2n+1}{n^3-3n^2+2n}$.

2. Convergence des séries usuelles

Proposition 4.3 – La série exponentielle sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, la **série exponentielle** $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge, et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Exercice 4.3 – Utilisation de série de référence.
Montrer que la séries de terme général $(-1)^n \dfrac{(n-1)(n+1)}{n!}$ converge et donner sa somme :

Proposition 4.4 – La série géométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum z^n$ converge $\boxed{\text{si et seulement si}}$ $|z| < 1$.

Dans ce cas sa somme est $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}}$.

Exemple 4.4. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\sum \mathrm{e}^{-n\alpha} = \sum \left(\mathrm{e}^{-\alpha}\right)^n$ est la série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\alpha}$.

- ➠ Elle converge si, et seulement si, $\left|\mathrm{e}^{-\alpha}\right| = \mathrm{e}^{-\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha)} < 1$, c'est-à-dire $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha) > 0$,
- ➠ et sa somme vaut dans ce cas $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\alpha} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

Remarque 4.4 – Dérivées de la série géométrique
Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on verra plus tard **la formule du binôme négatif** :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p} = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}.$$

En particulier, pour $p = 1$ (première dérivée) : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}}$,

et pour $p = 2$ (deuxième dérivée), $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}}$.

Exercice 4.4 – Utilisation de série de référence.
Montrer que la série de terme général $\frac{(n+2)(n+1)}{2^{n+3}}$ converge et donner sa somme.

Proposition 4.5 – Les séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\boxed{\text{si et seulement si}}$ $\alpha > 1$.
- En particulier, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque 4.5 – La fonction zeta de Riemann $\zeta : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice 4.5 – Utilisation de série de référence.
Montrer que la série de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et donner sa somme.

3. Premières propriétés

Proposition 4.6 – Relation suite-série (ou séries télescopiques)

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

Dans ce cas, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty}(v_n) - v_{n_0}$.

Exemples 4.5.

- C'est le cas de $\sum \frac{1}{n(n+1)}$: sachant que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$, on prouve que cette série converge et a pour somme $-(0-1) = 1$.
- En revanche, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$, donc $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge, et plus précisément, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = (\cdots) = \ln(N+1) \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.

Exercice 4.6. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in]0\,;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.
3. Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge, et en déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

Proposition 4.7 – Linéarité de la somme

(1) $\boxed{\text{Si}}$ les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, $\boxed{\text{alors}}$

- pour tous scalaires λ et μ, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge,
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

(2) $\boxed{\text{Si}}$ $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, $\boxed{\text{alors}}$ $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Remarque 4.6 Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire de la nature de $\sum(u_n + v_n)$, qui peut très bien converger.

On n'écrit pas l'égalité $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ *sans avoir prouvé au préalable la convergence de* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$.

4. Convergence des séries à termes positifs

Proposition 4.8 – Convergence des séries à termes positifs

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **positive** à partir d'un certain rang,

alors
- la série $\sum u_n$ converge **si, et seulement si** la suite de ses sommes partielles est majorée, dans ce cas, sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{N\in\mathbb{N}}(S_N)$.
- **Sinon** $\sum_{n=0}^{N} u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.

Corollaire 4.9 – Critères de comparaison des séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **positives à partir d'un certain rang**.

- Si à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$ (et par contraposée la divergence de $\sum u_n$ entraîne celle de $\sum v_n$).
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$ (et par contraposée la divergence de $\sum u_n$ entraîne celle de $\sum v_n$).
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque 4.7 – Rappel : signe de suites équivalentes

Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.

5. Suites sommables, critères de comparaison

Définition 4.4 – Série absolument convergente, suite sommable

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes réels ou complexes.

- On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** $\boxed{\text{lorsque}}$ $\sum |u_n|$ converge.
- Dans ce cas on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **sommable**.
- Une série convergente sans être absolument convergente, est appelée **série semi-convergente**.

Proposition 4.10 – Suites sommables de référence

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, les suites de Riemann $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables si, et seulement si, $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha) > 1$ *(rappelons que* $|n^\alpha| = n^{\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha)}$*)*.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite géométrique $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, $|z| < 1$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $\left(\frac{z^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Exemples 4.6.

(1) $\left(\left(\frac{1}{4} + i\frac{2}{5}\right)^n\right)$ et $\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sont sommables, mais pas $\left(\frac{1}{n^{2/5}}\right)$.

(2) La suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ n'est pas sommable, parce que $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
Cependant, sans valeur absolue, les termes de signes alternés se compensent, et la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge avec pour somme $-\ln(2)$, elle est semi-convergente.

(3) Le cas le plus simple de suite sommable est une suite à support fini.

Corollaire 4.11 – La convergence absolue entraîne la convergence

$\boxed{\text{Si}}$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, $\boxed{\text{alors}}$

(1) la série $\sum u_n$ converge,

(2) on a l'« inégalité triangulaire » : $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Remarque 4.8 – Cas d'une suite réelle de signe constant

Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable $\boxed{\text{si, et seulement si}}$, la série $\sum u_n$ converge.

Si
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable,*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang,*

alors $\sum u_n$ diverge.

Corollaire – La série exponentielle converge aussi sur $\mathbb{C}$

Pour tout nombre complexe z, la **série exponentielle** $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge, et on note $\exp(z)$ sa somme *(on montrera plus tard que* $\exp(z) = e^z$*.)* :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Remarque 4.9 – Pourquoi la convergence absolue ?

L'avantage d'une suite sommable $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est que la valeur de la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de tous ses termes ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue cette somme, et on peut aussi additionner les termes de toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par exemple, on a affirmé plus haut que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$, cependant si on voulait changer l'ordre des termes dans la somme en additionnant d'abord les termes d'indice pair, puis les termes d'indice impair, on ferait tout sauter puisque $\sum \frac{1}{2n}$ diverge.

Corollaire 4.12 – Critères de comparaison et sommabilité

Critère de domination :
$\boxed{\text{si}}$ à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant |v_n|$,
$\boxed{\text{alors}}$ la sommabilité de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Critère de domination (bis) : $\boxed{\text{si}}$ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$,
$\boxed{\text{alors}}$ la sommabilité de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Critère d'équivalence : $\boxed{\text{si}}$ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $\boxed{\text{alors}}$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Corollaire 4.13 – L'espace vectoriel des suites sommables

L'ensemble des suites sommables est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ noté $\ell_1(\mathbb{K})$.
En particulier, une combinaison linéaire de suites sommables est encore une suite sommable.

Remarque 4.10 En particulier, si $(\mathbb{R}\mathrm{e}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Méthode 4.2 – Pour montrer que la série $\sum u_n$ converge :

On commence par chercher un équivalent plus simple de u_n, disons v_n, qui est le terme général d'une suite sommable connue, ou que l'on domine avec $v_n = \mathrm{O}(\square_n)$, ou encore $|v_n| \leqslant \square_n$, où $\square_n$ est le terme général d'une suite connue comme sommable.

Exemple 4.7. $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ converge car :

- $$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1+\left[-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \left[-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
- $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite sommable,

Donc par domination $\left(\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, et a fortiori sa série converge.

Exercice 4.7. Soit $a \in [0\ ;+\infty[$, $a \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n(a) = \frac{a^n}{(1-a^n)(1-a^{n+1})}.$$

1. Étudier la convergence de la série $\sum u_n(a)$ selon les valeurs de a.
2. Lorsque la série converge, calculer sa somme.
(On pourra essayer d'écrire $u_n(a)$ comme la différence de deux termes consécutifs)

Méthode 4.3 – Pour montrer que la série $\sum u_n$ diverge :

le plus souvent, on essaie d'écrire $u_n \sim \square_n$, ou $\square_n = \mathrm{O}(u_n)$, ou encore $\square_n \leqslant |u_n|$, où $\square_n$ est le terme général d'une suite qui n'est pas sommable. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable, autrement dit que $\sum |u_n|$ diverge.

Pour conclure que $\sum u_n$ (sans valeur absolue !) *diverge, il suffit de vérifier que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang, ce qui est le cas quand $u_n \sim v_n$ avec v_n de signe constant.*

Exemple 4.8. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{3n}$.

Ainsi
- (u_n) n'est pas sommable car $\left(-\frac{2}{3n}\right)$ ne l'est pas,
- u_n est négatif à partir d'un certain rang car équivalente à $-\frac{2}{3n} < 0$,

donc $\sum u_n$ est divergente.

On compare les SOMMABILITÉS !

*Les critères de comparaison ne permettent pas de conclure directement sur la convergence classique, sans valeur absolue, des séries concernées, mais sur leur **convergence absolue**, autrement dit sur la **sommabilité** des suites en question !*
Le raisonnement ci-dessous est faux :

~~*$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, or $\sum v_n$ converge (resp. diverge), donc $\sum u_n$ converge (resp. diverge).*~~

Exemple 4.9 – Les suites alternées ne font pas bon ménage avec ces critères !.

$\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, mais :
- la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (on le prouvera plus tard avec le critère spécial des séries alternées),
- la série $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ diverge comme somme d'une série divergente et d'une série convergente.

Remarque 4.11 – Comparaison à une suite de Riemann

(1) $\boxed{\text{Si}}$ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$, $\boxed{\text{alors}}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

(2) $\boxed{\text{Si}}$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang,
- $\frac{1}{n} = \mathrm{O}(u_n)$,

$\boxed{\text{alors}}$ $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4.8 – Séries de Bertrand.

1. Soient α et β deux réels, montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$, ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
2. Quelle la nature de la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n}$? et de la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^2}$?

6. Comparaison à une série géométrique : la méthode de d'Alembert

Proposition 4.14 – La règle de D'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non nulle partir d'un certain rang telle que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell.$$

(1) $\boxed{\text{Si}}$ $\ell < 1$ $\boxed{\text{alors}}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ;

(2) $\boxed{\text{si}}$ $\ell > 1$ $\boxed{\text{alors}}$ $\sum u_n$ diverge (grossièrement) ;

(3) si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Méthode 4.4 – Pour appliquer la règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert est bien adaptée aux cas où le terme général s'exprime à l'aide de produits, en particulier quand il contient des puissances ou des factorielles.

- *Ne pas oublier de dire au correcteur que u_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang ;*
- *chercher alors **la limite** de $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, sans oublier la **valeur absolue** (ou le **module** dans le cas complexe) ;*
- *comparer enfin **cette limite** à 1.*

Exemple 4.10 – La série exponentielle converge (le retour).
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, en posant $u_n = \frac{z^n}{n!}$, u_n est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0,$$

donc, là, on est bien convaincus que la série exponentielle converge.

Remarque 4.12 – Les mésaventures de l'élève Chaprot

L'erreur fréquente de notre héros consiste en l'oubli de la limite : il compare alors directement la quantité $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ à 1, ce qui ne permet de rien conclure.
Par exemple, pour $u_n = \frac{1}{n}$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$ et pourtant $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4.9. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ converge.

Remarques 4.13

- Pour $u_n = \frac{1}{n}$ comme pour $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1$, et les séries correspondantes ne sont pas de même nature.
- S'il existe un réel $\alpha \in [0\,;1[$ tel qu'à partir d'un certain rang, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \alpha$, alors $u_n = \mathrm{O}(\alpha^n)$, et en particulier par domination $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.
- Si à partir d'un certain rang, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut tendre vers 0.

Exercice 4.10 – Règle de Cauchy.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que $\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}}$ tend vers une limite L, finie ou infinie.

Montrer que si $\mathrm{L} < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Montrer que si $\mathrm{L} > 1$, ou $\mathrm{L} = +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

7. Produit de Cauchy de deux séries

Remarque 4.14 – Produit de deux polynômes

Considérons les polynômes $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{p} u_n \mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q} = \sum_{n=0}^{q} v_n \mathrm{X}^n$, dont on veut écrire le produit sous forme développée. Alors en posant $u_n = 0$ pour $n > p$ et $v_n = 0$ pour $n > q$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{P} \times \mathrm{Q} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \mathrm{X}^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \mathrm{X}^n\right) = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0)\mathrm{X} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) \mathrm{X}^n\end{aligned}$$

et pour $\mathrm{X} = 1$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right)$.

Définition 4.5 – Produit de Cauchy

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On appelle **produit de Cauchy** ou **produit de convolution** des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \ w_n &= u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k = \sum_{p+q=n} u_p v_q.\end{aligned}$$

Remarque 4.15 – Si les deux suites démarrent respectivement aux rangs p et q plutôt qu'au rang 0, alors en posant $u_i = v_j = 0$ pour $i < p$ et $j < q$, le terme général du produit de Cauchy est :

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 = u_p v_{n-p} + \cdots + u_{n-q} v_q \\ &= \sum_{k=p}^{n-q} u_k v_{n-k} \ \textit{(car } v_{n-k} = 0 \textit{ pour } n-k < q \textit{ c'est-à-dire } k > n-q\textit{).} \end{aligned}$$

En particulier $w_n = 0$ pour $n - q < p$, c'est-à-dire $n < p + q$.
Par exemple, le produit de Cauchy des séries $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum 2^{-n}$ est la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} 2^{k-n} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(n-k)(n-k-1)} 2^k.$$

Proposition 4.15 – Produit des sommes de deux séries absolument convergentes

$\boxed{\text{Si}}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites sommables de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (autrement dit si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes), $\boxed{\text{alors}}$

- leur produit de Cauchy converge aussi absolument,
- $$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right)$$

Exercice 4.11. Convergence et somme de la série de terme général

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{-k}}{(n-k)(n-k-1)}.$$

Remarque 4.16 – Importance de la convergence absolue
Considérons les suites de termes généraux $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ dont les séries sont semi-convergentes, alors le terme général du produit de Cauchy est

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}},$$

or $k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{2}$, donc $|w_n| \geqslant (n-1)\frac{\sqrt{2}}{n} \longrightarrow \sqrt{2}$, ce qui prouve que $\sum w_n$ diverge grossièrement.

Proposition 4.16 – La série exponentielle donne vraiment l'exponentielle !

(1) Pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z) \times \exp(z') = \exp(z+z')$.

(2) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+iy) = \mathrm{e}^x \times (\cos(y) + i\sin(y))$.
Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on notera indifféremment $\exp(z)$ ou e^z.

Pour expliquer la proposition précédente, rappelons que

- d'une part, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge, et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est notée $\exp(z)$.
  On sait en outre, grâce à la formule de Taylor (voir l'exercice dans le chapitre des intégrales), que pour tout **réel** x, $\exp(x) = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- d'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$, on sait que

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a \times (\cos(b) + i\sin(b)).$$

La question que règle cette proposition, est l'égalité, pour tout nombre complexe z, de $\exp(z)$ et de e^z.

8. Convergence des séries alternées

On a vu que pour les suites qui ne changent de signe qu'un nombre fini de fois, donc de signe constant à partir d'un certain rang, étudier la convergence de la série correspondante équivaut à étudier leur sommabilité, ce pour quoi nous avons vu tout un tas de résultats.

Mais si la suite n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang, par exemple si elle est de signe alterné, sa série peut être semi-convergente, autrement dit converger sans que son terme général soit sommable, et dans ce cas les outils précédents ne permettent pas d'établir leur convergence.

Définition 4.6 – Séries alternées

La série **réelle** de terme général u_n est dite **alternée** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n et u_{n+1} sont de signes contraires.
Son terme général peut s'écrire $(-1)^n |u_n|$ ou $(-1)^{n+1} |u_n|$.

Proposition 4.17 – Critère de Leibniz, ou critère spécial des séries alternées

(1) $\boxed{\text{Si}}$
- $\sum u_n$ est alternée,
- $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- $|u_n| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$,

$\boxed{\text{alors}}$ $\sum u_n$ converge.

(2) Dans ce cas, pour tout entier p :

(a) la somme $S = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques $\sum_{n=p}^{N} u_n$ et $\sum_{n=p}^{N+1} u_n$;

(b) $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ est du signe de son premier terme u_p,

(c) $\left|\sum_{n=p}^{+\infty} u_n\right| \leqslant |u_p|$.

Exemple 4.11. la *série harmonique alternée* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Exercice 4.12.

1. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ est convergente.
2. Nature des séries de termes généraux

$$\ln\left(1-\frac{(-1)}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

3. Nature des séries de terme général $\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ et $\frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$.
4. Donner une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ à 10^{-3} près.

9. Preuves et solutions

Une correction de l'exercice 4.1

énoncé

Rappelons d'abord l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$\boxed{\text{Si}}$
- *f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I,*
- *pour tout $t \in \mathrm{I}$, $|f^{(p+1)}(t)| \leqslant \mathrm{M}$,*

$\boxed{\text{alors}}$

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \mathrm{M} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En particulier si $0 \in \mathrm{I}$, pour $a = 0$ on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \mathrm{M} \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Soit x un réel.
La fonction cos est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$, de plus toutes les dérivées de cos sont $\pm\cos$ et $\pm\sin$ (plus précisément $\cos^{(k)} : \theta \mapsto \cos\left(\theta + k\frac{\pi}{2}\right)$) donc pour tout réel t, $\left|\cos^{(k)}\right| \leqslant 1$.
On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor à tout ordre $p \in \mathbb{N}$:

$$\left| \cos(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leqslant \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos^{(n)}(\theta) = \cos\left(\theta + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ donc } \cos^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, en appliquant la formule jusqu'à l'ordre $2p$, on obtient que

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right| \leqslant \frac{|x|^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Mais on a vu dans le cours sur les suites que l'exponentielle est négligeable devant la factorielle. Par conséquent $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{|x|^{2p+1}}{(2p)!} = 0$, d'où par encadrement

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

autrement dit

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right)=\cos(x),$$

ce qui prouve par définition (4.3) que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ converge et a pour somme $\cos(x)$.
Je laisse le lecteur appliquer une méthode en tous points semblable pour sin.

Une preuve de la proposition 4.1 *énoncé*

1. Pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N}z_n=\sum_{n=0}^{N}(\mathbb{R}\mathrm{e}\,(z_n)+i\,\mathrm{Im}\,(z_n))=\underbrace{\sum_{n=0}^{N}\mathbb{R}\mathrm{e}\,(z_n)}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{\sum_{n=0}^{N}\mathrm{Im}\,(z_n)}_{\in\mathbb{R}},$$

   donc

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=0}^{N}z_n\right)=\sum_{n=0}^{N}\mathbb{R}\mathrm{e}\,(z_n),$$
$$\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N}z_n\right)=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{Im}\,(z_n),$$

   donc la définition 4.3 et la proposition sur la limite des suites complexes permet de conclure le premier point.

2. Le second point utilise le premier point, avec le fait que, par la linéarité de la limite des suites convergentes, $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ converge si, et seulement si, $\sum(-\mathrm{Im}(z_n))$ converge.

Une preuve de la proposition 4.2 *énoncé*

Par définition, si la série de terme général u_n converge, alors $\sum_{k=0}^{n}u_k$ tend vers une limite finie, et $\sum_{k=0}^{n-1}u_k$ tend vers la même limite. Donc $\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}u_k$ tend vers 0.
Or pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}u_k=u_n,$$

donc $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

Une correction de l'exercice 4.2

énoncé

1. ➟ Ces trois polynômes sont dans $\mathbb{R}_2[X]$, et $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, donc il suffit qu'ils forment une famille libre pour être une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Prenons trois réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que
   $$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0.$$
   En remplaçant X par 0, on obtient $\lambda_0 P_0(0) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_0 = 0$.
   De même avec 1 et 2, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ce qui achève le raisonnement.

   ➟ De la même façon, les coordonnées de 2X+1 dans cette base sont trois réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que
   $$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 2X + 1.$$
   En remplaçant X par 0, on obtient $\lambda_0 P_0(0) = 1$, c'est-à-dire $\lambda_0 = 1$.
   De même avec 1 et 2, on obtient $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 5$, ce qui donne $\boxed{2X + 1 = P_0 + 3P_1 + 5P_2}$.
2. Sans difficulté :
   $$X^3 - 3X^2 + 2X = X(X^2 - 3X + 2) = X(X-1)(X-2).$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{2n+1}{n^3-3n^2+2} = \sum_{n=3}^{N} \frac{P_0(n)+3P_1(n)+5P_2(n)}{n(n-1)(n-2)}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N} \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)(n-2)} - 3\sum_{n=3}^{N} \frac{n(n-2)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{5}{2}\sum_{n=3}^{N} \frac{n(n-1)}{n(n-1)(n-2)}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} - 3\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n-1)} + \frac{5}{2}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n-2)}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} - 3\sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n} \quad \textit{(en posant } n' = n-1 \textit{ dans la } 2^{me} \textit{ somme, et } n' = n-2 \textit{ dans la } 3^{me}\textit{)}$$
$$= -3 \times \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=3}^{N-2} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{n} - 3\times\frac{1}{n} + \frac{5}{2}\times\frac{1}{n}\right)}_{=0}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right) - 3\times\frac{1}{N-1}$$
$$\xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} -3\times\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

donc la série de terme général $\frac{2n+1}{n^3-3n^2+2}$ converge et a pour somme $\frac{9}{4}$.

Une preuve de la proposition 4.3 *énoncé*

Voir l'exercice des devoirs de vacances.

Une correction de l'exercice 4.3 *énoncé*

La présence de la factorielle au dénominateur induit l'idée d'utiliser les séries exponentielles, puis le $(-1)^n$ nous guide vers l'utilisation de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

Pour préparer les simplifications des numérateurs avec le dénominateur $n!$ on écrit

$$(n-1)(n+1) = n(n-1) + n - 1,$$

qui donne pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{(n-1)(n+1)}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)+n-1}{n!}(-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{n!}(-1)^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!}(-1)^n - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(-1)^n \\
&= \sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)}{n!}(-1)^n + \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!}(-1)^n - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(-1)^n \quad \text{(on enlève les termes nuls des sommes)} \\
&= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!}(-1)^n + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!}(-1)^n - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!}(-1)^{n+2} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!}(-1)^{n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} e^{-1} - e^{-1} - e^{-1} = -e^{-1}.
\end{aligned}$$

On peut donc conclure grâce à la définition 4.3 que la série de terme général $(-1)^n \frac{(n-1)(n+1)}{n!}$ converge et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(n-1)(n+1)}{n!} = -e^{-1}.$$

Une preuve de la proposition 4.4 *énoncé*

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$.

- Si $|z| \geqslant 1$, alors $|z^n| = |z|^n$ tend vers 1 ou $+\infty$, donc la série ne respecte pas la condition nécessaire de convergence, ce qui prouve qu'elle diverge grossièrement.
- Si $|z| < 1$, alors $\left|z^{N+1}\right| = |z|^{N+1} \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} 0$, donc

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{1-z},$$

ce qui prouve grâce à la définition de la convergence d'une série, que pour $|z| < 1$, la série $\sum z^n$ converge et a pour somme $\frac{1}{1-z}$.

Une correction de l'exercice 4.4

énoncé

Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{(n+2)(n+1)}{2^{n+3}} &= \sum_{n=2}^{N+2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \textit{(en posant } n' = n+2\textit{)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \sum_{n=2}^{N+2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
&\xrightarrow[N \longrightarrow +\infty]{} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 2 \quad \textit{(en utilisant la deuxième dérivée de la série géométrique de raison } \tfrac{1}{2}.\textit{)}
\end{aligned}$$

Donc la série converge et a pour somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2^{n+3}} = 2$.

Une preuve de la proposition 4.5

énoncé

Voir cet exercice.

Une correction de l'exercice 4.5

énoncé

Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc} \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \\
&\xrightarrow[N \longrightarrow +\infty]{} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

donc la série de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et a pour somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Une preuve de la proposition 4.6 *énoncé*

Il suffit de remarquer qu'à l'aide des sommes télescopiques, on établit pour tous $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} (v_{n+1} - v_n) = v_{\mathrm{N}+1} - v_{n_0}$.

Par conséquent :

- si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $v_{\mathrm{N}+1} - v_0$ admet une limite finie quand N tend vers $+\infty$, autrement dit, grâce au calcul préliminaire, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} (v_{n+1} - v_n)$ admet une limite finie quand N tend vers $+\infty$, donc par définition, la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.
- Réciproquement, si la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge, alors par définition $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} (v_{n+1} - v_n)$ admet une limite finie quand N tend vers $+\infty$, donc, grâce au calcul préliminaire, $v_{\mathrm{N}+1} - v_{n_0}$ admet une limite finie quand N tend vers $+\infty$, donc $v_n = (v_{(n-1)+1} - v_{n_0}) + v_{n_0}$ admet aussi une limite finie quand n tend vers $+\infty$, autrement dit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Une correction de l'exercice 4.6 *énoncé*

(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$, donc tous les u_n sont inférieurs à u_0, donc en particulier strictement inférieurs à 1.
D'où, par récurrence, grâce à l'égalité $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$, on montre que tous les u_n sont dans $]0\ ;\ u_0]$.
Ainsi, on en déduit grâce au théorème de la limite monotone que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc converge, vers une limite ℓ, cette limite étant, par prolongement des inégalités larges à la limite, dans $[0\ ;\ u_0]$.
Or u_{n+1} tend vers ℓ, et $u_n - u_n^2$ tend vers $\ell - \ell^2$, d'où par unicité de la limite $\ell = \ell - \ell^2$, ce qui entraîne $\ell = 0$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = -(u_{n+1} - u_n)$, or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc par la relation suite-série, la série $\sum u_n^2$ converge.

(iii) Comme u_n tend vers 0, $\ln(u_n)$ tend vers $-\infty$, donc par la même relation suite-série, utilisée dans l'autre sens, on en déduit que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{\mathrm{N}+1}) - \ln(u_0)$ tend aussi vers $-\infty$.

(iv) Comme u_n tend vers 0, et $\ln(1+\square) \underset{\square\to 0}{\sim} \square$, on peut écrire :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n.$$

Or d'après la question précédente, la suite de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ n'est pas sommable, donc par le critère d'équivalence la suite (u_n) n'est pas sommable non plus, autrement dit $\sum |u_n|$ diverge, d'où $\sum u_n$ diverge car (u_n) est de signe constant.

Une preuve de la proposition

énoncé

Pour tout nombre complexe z,

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!},$$

et on sait que la série exponentielle converge sur $\mathbb{R}$, donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument, ce qui entraîne la convergence d'après le corollaire précédent.
On verra dans l'exemple 4.10 une preuve utilisant le critère de d'Alembert.

Une correction de l'exercice 4.7

énoncé

1. ➟ si $a < 1$, a^n tend vers 0, donc

$$u_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{1\times 1} = a^n.$$

Or $0 < a < 1$, donc (a^n) est une suite sommable, ainsi par le critère d'équivalence, $(u_n(a))$ est aussi sommable, donc $\sum u_n(a)$ converge.

➟ si $a > 1$, a^n tend vers $+\infty$, donc

$$u_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{(-a^n)\times(-a^{n+1})} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}.$$

Or $0 \leqslant \frac{1}{a} < 1$, donc comme précédemment, par le critère d'équivalence, $\sum u_n(a)$ converge.

2. On cherche à décomposer $u_n(a)$ sous la forme

$$\begin{aligned} u_n(a) &= \frac{\alpha}{1-a^n} - \frac{\beta}{1-a^{n+1}} \\ &= \frac{(\alpha-\beta)+(\beta+\alpha\times a)a^n}{(1-a^n)(1-a^{n+1})} \end{aligned}$$

il suffit de prendre $\alpha-\beta=0$ et $(\beta+\alpha\times a)=1$, ce qui est vrai pour $\alpha=\beta=\frac{1}{1-a}$.

Ainsi, par la méthode des sommes télescopiques, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n(a) &= \frac{1}{1-a}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-a^n}-\frac{1}{1-a^{n+1}}\right)\\ &= \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^{N+1}}\right)\\ &\xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} \begin{cases}\frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-a}-0\right)=\frac{1}{(1-a)^2} & \text{si } a>1\,;\\ \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-0}\right)=\frac{a}{(1-a)^2} & \text{si } a<1.\end{cases}\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 4.8 *énoncé*

1. ➟ Si $\alpha < 1$, alors par croissances comparées

$$\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}\right),$$

or $\frac{1+\alpha}{2} < 1$, donc la suite de terme général $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ n'est pas sommable, d'où par comparaison la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ n'est pas sommable non plus (autrement dit $\sum |u_n|$ diverge) et comme cette suite est positive (à partir de $n=2$), la série $\sum u_n$ diverge.

➟ Si $\alpha > 1$, alors par croissances comparées

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right),$$

or $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, donc la suite de terme général $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ est sommable, d'où par comparaison la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ est sommable aussi, donc a fortiori la série $\sum u_n$ converge.

➟ Pour le cas $\alpha = 1$, on utilise le théorème de comparaison des séries à termes positifs avec une intégrale :

- la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^{\beta}}$ est positive et $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $[2\,;+\infty[$ comme inverse d'une fonction $\mathscr{C}^{\infty}$ qui ne s'annule pas, de dérivée

$$t \mapsto -\frac{1}{t^2\ln(t)^{\beta+1}}(\ln(t)+\beta)$$

négative sur $[a\,;+\infty[$ (il suffit de prendre a assez grand... pour être précis, prendre $a \geqslant \max(2,\mathrm{e}^{-\beta})$), donc f est décroissante sur ce même intervalle.

➔ On en déduit que la série de terme général $u_n = f(n)$ est de même nature que l'intégrale « en $+\infty$ » de f.
Or le changement de variable $u = \ln(t)$, dont je vous laisse vérifier le caractère licite, transforme l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\mathrm{d}t$$

en

$$\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta}\mathrm{d}u,$$

qui est connue pour converger si, et seulement si, $\beta > 1$.

➟ Ainsi (dans le cas où $\alpha = 1$), la série de terme général $\frac{1}{\ln(n)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

On a bien prouvé l'équivalence demandée.

2. La première diverge car $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
   La seconde converge car $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Une correction de l'exercice 4.9 *énoncé*

Rions un peu avec la solution de l'« intelligence » artificielle :

la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$, est connue sous le nom de série factorielle.
Pour montrer qu'elle converge, nous pouvons utiliser la méthode du ratio qui établit que si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, alors la série $\sum a_n$ converge.
Dans ce cas, nous avons :

$$\left|\frac{n!}{n^{n+1}}\right| = \left|\frac{n!}{n^n}\right| \cdot \left|\frac{1}{n+1}\right| < \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ est un multiple constant de 1, il suit que la suite $\left(\frac{n!}{n^{n+1}}\right)$ est bornée supérieurement par une constante multiple de 1. Par conséquent, la série $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

Cette

suite est non nulle, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$$

Avec l'équivalence $\ln(1+\square) \underset{\square\to 0}{\sim} \square$, on a $-n\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \times \left(\frac{1}{n}\right) = -1$, donc

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} < 1.$$

Le critère de d'Alembert permet de conclure que la suite de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ converge, donc que $\sum u_n$ converge.

Une correction de l'exercice 4.10 *énoncé*

1. ➟ Supposons que $(u_n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{L}$ et que $\mathrm{L} < 1$, alors à partir d'un certain rang r

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{L} + \frac{1-\mathrm{L}}{2} = \frac{\mathrm{L}+1}{2}.$$

➟ Comme la fonction $\square \mapsto \square^n$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

> *Ne pas confondre avec la suite $(\square^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante si $0 \leqslant \square \leqslant 1$, et croissante si $\square \geqslant 1$!*

on obtient en composant par cette fonction, sachant que u_n est supposé positif :

$$u_n \leqslant \left(\frac{\mathrm{L}+1}{2}\right)^n.$$

➟ Or $0 \leqslant \mathrm{L} < 1$, donc $0 < \frac{\mathrm{L}+1}{2} < 1$, d'où la série de terme général $\left(\frac{\mathrm{L}+1}{2}\right)^n$ est une série géométrique sommable.
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, on conclut par le critère de domination qu'elle est sommable.

2. De la même manière, si $(u_n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{L}$ et que $\mathrm{L} > 1$, alors à partir d'un certain rang $u_n \geqslant \frac{1+\mathrm{L}}{2}$ (ou n'importe quel réel strictement positif si $\mathrm{L} = +\infty$), ce qui empêche u_n de tendre vers 0, et prouve que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Une preuve de la proposition 4.15 *énoncé*

On pose

- $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$;
- $U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, $V = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ et $W = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k$;
- $D_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leqslant p \leqslant n,\ 0 \leqslant q \leqslant n\}$ et $E_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leqslant n\}$.

On peut donc écrire :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{p+q=k} u_p v_q \Big) = \sum_{(p,q)\in E_n} u_p v_q$$

$$U_n V_n = \Big(\sum_{p=0}^{n} u_p \Big) \Big(\sum_{q=0}^{n} v_q \Big) = \sum_{(p,q)\in D_n} u_p v_q$$

Cas des séries à termes positifs : les inclusions $D_n \subset E_n \subset D_{2n}$ et la positivité des u_k et v_k, montrent que

$$\sum_{(p,q)\in D_n} u_p v_q \leqslant \sum_{(p,q)\in E_n} u_p v_q \leqslant \sum_{(p,q)\in D_{2n}} u_p v_q$$

ce qui donne les inégalités $U_n V_n \leqslant W_n \leqslant U_{2n} V_{2n}$, et, par encadrement, on obtient $W = UV$ quand $n \to +\infty$.

Cas général : on applique le résultat précédent aux séries $\sum |u_p|$ et $\sum |v_q|$, ce qui montre la convergence de la série de terme général $\sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|$, donc la convergence absolue de la série $\sum w_n$ puisque $|w_n| = \Big| \sum_{p+q=n} u_p v_q \Big| \leqslant \sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|$.

La démonstration précédente montre aussi que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q| \Big) = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_p| \Big) \Big(\sum_{q=0}^{+\infty} |v_q| \Big).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |U_n V_n - W_n| &= \Big| \sum_{(p,q)\in D_n \setminus E_n} u_p v_q \Big| \leqslant \sum_{(p,q)\in D_n \setminus E_n} |u_p|\,|v_q| \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q| - \sum_{p=0}^{n} |u_p| \sum_{q=0}^{n} |v_q| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0, \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 4.11

énoncé

Les suites de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ et $2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont sommables, donc leur produit de Cauchy est absolument convergent, et

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{2^k}{(n-k)(n-k-1)} = \left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$
$$= 1\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Une preuve de la proposition 4.17

énoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite alternée, supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n\,|u_n|$. Supposons de plus que la suite des $|u_n|$ est décroissante et tend vers 0.

Notons pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S_N} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n$, $\mathrm{V_N} = \mathrm{S_{2N}}$ et $\mathrm{W_N} = \mathrm{S_{2N+1}}$.

➟ Montrons d'abord que les suites $(\mathrm{V_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{W_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ sont alternées.

- Pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{V_{N+1}} - \mathrm{V_N} &= \mathrm{S_{2(N+1)}} - \mathrm{S_{2N}} = u_{2\mathrm{N}+2} + u_{2\mathrm{N}+1}\\ &= \left|u_{2\mathrm{N}+2}\right| - \left|u_{2\mathrm{N}+1}\right|\\ &\leqslant 0 \ \textit{(car } (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est décroissante),}\end{aligned}$$

  donc $(\mathrm{V_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- De même pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{W_{N+1}} - \mathrm{W_N} &= \mathrm{S_{2(N+1)+1}} - \mathrm{S_{2N+1}} = u_{2\mathrm{N}+3} + u_{2\mathrm{N}+2}\\ &= -\left|u_{2\mathrm{N}+3}\right| + \left|u_{2\mathrm{N}+2}\right|\\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

  donc $(\mathrm{W_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Enfin $|\mathrm{W_N} - \mathrm{V_N}| = u_{2\mathrm{N}+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

Ainsi les suites $(\mathrm{V_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{W_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ sont alternées.
On en déduit que :

(i) ces deux suites, autrement dit $(\mathrm{S_{2N}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathrm{S_{2N+1}}\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, par conséquent la suite $(\mathrm{S_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ est convergente, ce qui prouve, par définition, que la série $\sum u_n$ converge.

(ii) Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$W_p \leqslant S \leqslant V_q,$$

donc en particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_{2N+1} \leqslant S \leqslant S_{2N}$$

$$\text{autrement dit } \sum_{n=0}^{2N+1} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{2N} u_n,$$

ce qui prouve que la somme est bien encadrée par deux sommes partielles consécutives.

(iii) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=2N}^{+\infty} u_n = S - S_{2N-1} \geqslant 0$$

et comme $u_{2N} = (-1)^{2N} |u_{2N}| = |u_{2n}| \geqslant 0$, on en déduit que $\sum_{n=2N}^{+\infty} u_n$ et u_{2N} sont de même signe.

On montre de la même manière qu'il en va de même pour $\sum_{n=2N+1}^{+\infty} u_n$ et u_{2N+1}.

(iv) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$S \leqslant \sum_{n=0}^{2N} u_n = S_{2N-1} + u_{2N}, \text{ donc } S - S_{2N-1} \leqslant u_{2N}, \text{ c'est-à-dire } \sum_{n=2N}^{+\infty} u_n \leqslant u_{2N}.$$

Mais on sait que le signe de $\sum_{n=2N}^{+\infty} u_n$ est le même que celui de u_{2N}, en l'occurrence positif ici, on conclut que

$$\left| \sum_{n=2N}^{+\infty} u_n \right| \leqslant |u_{2N}|.$$

Je vous laisse appliquer la même méthode pour montrer l'inégalité dans le cas $2N+1$.

Une correction de l'exercice 4.12 *énoncé*

1. Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} &= \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

or :

➟ par le critère spécial des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge ;

➟ comme $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$, et que $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ est sommable, car $\left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$, alors la suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est sommable, donc a fortiori la série $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge.

donc $\sum \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ est convergente comme somme de séries convergentes.

2. ➟ $\ln\left(1-\frac{(-1)}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(-1)^n}{n^2}$, or $\left(-\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est sommable, donc $\left(\ln\left(1-\frac{(-1)}{n^2}\right)\right)$ est sommable, donc la série $\sum \ln\left(1-\frac{(-1)}{n^2}\right)$ converge.

➟ *Ici l'erreur courante consiste à vouloir utiliser comme auparavant le critère d'équivalence, car $\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et de remarquer que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées, donc de vouloir en déduire la convergence de $\sum \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.*
Mais ce raisonnement n'est pas valable car je vous rappelle que les critères de comparaison ne permettent de tirer des conclusions que sur la sommabilité des suites concernées, autrement dit la convergence absolue de leurs séries !
Ici $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente, donc on ne peut rien déduire de l'équivalence !

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit grâce au développement limité de $\ln(1-\square)$ quand $\square \to 0$ que

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + \mathrm{O}\left(\left(-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

(remarquer l'utilisation du « grand O » !)

Or

- par le critère spécial des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge ;
- par domination par une série de Riemann convergente, $\sum \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge aussi ;
- $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc par combinaison linéaire $\sum -\frac{1}{2n}$ diverge aussi.

Donc $\sum \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge comme d'une série divergente et d'une série convergente.

3. On applique le critère spécial des séries alternées pour $\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

Pour la seconde série :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\ln(n)}} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{\ln(n)} + o\left(\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right)\right) \quad \left(\textit{car } \left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)
\end{aligned}$$

or :

- par le critère spécial des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge ;
- on sait que $-\frac{1}{\ln^2(n)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\ln^2(n)}$.

  Or $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$ donc $-\frac{1}{\ln^2(n)}$ n'est pas sommable, d'où par équivalence la suite de terme général $-\frac{1}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$ n'est pas sommable non plus.

  L'équivalence prouve de plus que $-\frac{1}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$ est négatif, à l'instar de $-\frac{1}{\ln^2(n)}$, à partir d'un certain rang.

  Donc la série de terme général $-\frac{1}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$ diverge.

On peut conclure que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

4. On sait grâce au critère de Leibniz que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ converge, donc $\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ tend vers $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ quand N tend vers $+\infty$. Autrement dit, comme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}}_{\mathrm{S_N}} + \underbrace{\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}}_{\mathrm{R_N}},$$

on peut dire que S_N est une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ avec une erreur de R_N.

Or on sait aussi grâce au critère de Leibniz que

$$\left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1} \right| \leqslant |u_{N+1}| = \left| \frac{(-1)^{N+1}}{2(N+1)^3+1} \right| = \frac{1}{2(N+1)^3+1},$$

donc **il suffit que** $\frac{1}{2(N+1)^3+1} < 10^{-3}$ pour que S_N soit une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ à 10^{-3} près.

Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(N+1)^3+1} < 10^{-3} &\iff 2(N+1)^3+1 > 10^3 \\ &\iff N > \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(10^3-1\right)} - 1 \simeq 6{,}94, \end{aligned}$$

donc on prend $N = 7$.

Ainsi comme $S_7 \simeq 0{,}7119301168825689$ on conclut que $0{,}712$ est une valeur approchée à 10^{-3} près de la somme.