1. Ensembles dénombrables

Définition 8.1

- Un ensemble A est fini lorsqu'il existe un entier naturel n tel qu'il existe une bijection de A sur $[\![1,n]\!]$, et dans ce cas, n est appelé cardinal de A ;
- un ensemble A est dénombrable lorsqu'il existe une bijection de A sur $\mathbb{N}$.

Remarque 8.1
Un ensemble est dénombrable ou fini si, et seulement si, on peut le noter en extension sous la forme $\{x_i \mid i \in I\}$, où $I = \mathbb{N}$ ou $I \subset \mathbb{N}$, avec des x_i deux à deux distincts ; autrement dit lorsqu'on peut numéroter tous ses éléments à l'aide d'entiers naturels.

Proposition 8.1

- Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
- Tout ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est dénombrable.
- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- L'union finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

2. Doubles sommes infinies

Proposition 8.2 – Le théorème de Fubini

Soit $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ un suite double de nombres complexes.

Si
- pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $\left(u_{i,j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est sommable,
- la suite $\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable,

alors
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $\left(u_{i,j}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable,
- la suite $\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est sommable,
- $$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=n} u_{i,j}\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j}.$$

3. Espaces probabilisables

3.1. Expérience aléatoire

On appelle **expérience, ou épreuve, aléatoire** une action dont le résultat dépend du hasard. Les résultats possibles d'une expérience sont appelés **observables** ou encore **événements élémentaires**. L'ensemble de ces résultats est appelé **univers** ou **espace des observables**, on le note Ω.

Remarques 8.2

- *Alea* signifie « les dés » en latin, et le mot hasard provient vraisemblablement de l'arabe populaire *Al sâr* ou *Az-zahr* qui signifient le(s) dé(s).
- La notion de résultat dépend des préoccupations de l'expérimentateur. Si l'expérience consiste à jeter un dé, alors on peut prendre :
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ si on s'intéresse au numéro de la face obtenue ;
  - $\Omega = \{\text{paire}, \text{impaire}\}$ si on s'intéresse à la parité du numéro de la face obtenue.

3.2. Tribu d'événements

Définition 8.2 – Tribu d'événements, espace probabilisable

Soit Ω un ensemble, on appelle **tribu** sur Ω tout ensemble $\mathscr{A}$ de parties de Ω ($\mathscr{A} \subset \mathrm{P}(\Omega)$), qui contient Ω et qui est stable par passage au complémentaire et par réunion finie ou dénombrable, autrement dit tout ensemble qui vérifie les conditions suivantes :

- $\Omega \in \mathscr{A}$,
- pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}^{\mathrm{C}} = \Omega \setminus \mathrm{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin \mathrm{A}\}$ appartient à $\mathscr{A}$,
- pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{A}$, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathscr{A}$,
- pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ appartient à $\mathscr{A}$.

Les éléments de $\mathscr{A}$ sont alors appelés **événements**, et on dit que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un **espace probabilisable**.

Remarque 8.3 – Vocabulaire : Ω est appelé événement certain, et $\varnothing = \overline{\Omega}$ événement impossible. $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A, et si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **incompatibles**.
Lorsqu'on réalise une expérience, on dit qu'**un événement** A **est réalisé** lorsque l'expérience a pour résultat un élément de A.
Par exemple, « obtenir un chiffre pair » est réalisé losqu'on jette un dé et qu'on obtient 4, car $4 \in \{2,4,6\} =$ « obtenir un chiffre pair ».

Exemples 8.1. Soit Ω un ensemble.
- $\{\varnothing,\Omega\}$ est la tribu triviale ;
- $\mathscr{P}(\Omega)$ est la tribu pleine, c'est celle qu'on utilisera la plupart du temps, notamment lorsque Ω est un ensemble fini ou dénombrable ;
- $\left\{\varnothing,A,\overline{A},\Omega\right\}$ est la tribu engendrée par une partie non vide A.

Remarque 8.4 Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements,

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \left\{x \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x \in A_n\right\}, \qquad \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \left\{x \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_n\right\},$$

Exercice 8.1. Monsieur et le Roi lancent un dé à tour de rôle en commençant par le Roi, le premier qui obtient un chiffre pair a gagné.
Écrire les événements $A =$« le jeu ne s'arrête jamais », et $B =$« le Roi gagne la partie », en fonction des événements $P_i =$« le $i^{\text{ème}}$ lancer donne un chiffre pair ».

Proposition 8.3

Une tribu contient $\varnothing$, et est stable par intersection finie ou dénombrable.

3.3. Système complet d'événements

Définition 8.3 – Système complet d'événements

Soit $\mathscr{A}$ une tribu de parties de Ω, on appelle **système complet d'événements de** Ω toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements qui forment une partition de Ω, autrement dit

- $\forall (i,j) \in I^2, (i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \varnothing)$ (les A_i sont 2 à 2 incompatibles),
- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$ (les A_i recouvrent tous les cas possibles).

Exemple 8.2. Quand on pioche une carte dans un jeu de belote de 32 cartes, les événements « obtenir un cœur », « obtenir un carreau », « obtenir un pique » et « obtenir un trèfle » forment un système complet d'événements.

Exemples 8.3 – Systèmes complets d'événements usuels.

- Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
- Si X est une variable aléatoire discrète, dont l'ensemble des valeurs est $\{x_i \mid i \in I\}$, alors $(X = x_i)_{i\in I}$ est le système complet d'événements **induit par la variable aléatoire discrète** X.

4. Probabilité

Définition 8.4 – Probabilité, espace probabilisé

Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace probabilisable, on appelle **probabilité** sur $(\Omega,\mathscr{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ qui vérifie :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- pour toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements **deux à deux incompatibles**,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) \text{ (σ-additivité).}$$

Le triplet $(\Omega,\mathscr{A},P)$ est alors appelé **espace probabilisé**, et pour tout événement A, le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé **probabilité** de A.

Remarque 8.5 – Cas le plus courant : si $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, et si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs telle que $\sum p_n$ converge et a pour somme 1, alors on définit une probabilité sur Ω en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$.
La suite des couples $((\omega_n,p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors appelée **distribution de probabilité**.
Dans ce cas, pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{x\in A} \mathbb{P}(\{x\})$.

Exercice 8.2. Un dé est truqué de manière à ce que la face 6 ait 10 fois plus de chances d'apparaître que chacune des autres faces. Quelle est la probabilité qu'un lancer de ce dé donne un chiffre pair ?

Proposition 8.4 – Équiprobabilité dans un ensemble fini de résultats

Si Ω est un ensemble fini, on dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Dans ce cas, pour tout événement A,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Proposition 8.5 – Propriétés d'une probabilité

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisable et A, B deux événements de $\mathscr{A}$:

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
- *croissance de la probabilité :* si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$,
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Remarques 8.6

- La dernière égalité de la proposition 8.5 se généralise en :

  la **formule du crible (ou de Poincaré)** pour n événements $A_1, \dots, A_n$,

  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}),$$

  mais cette formule n'est pas au programme, à mon grand dam.
- Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements de Ω, alors $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$, donc comme ces événements sont 2 à 2 disjoints, par σ-additivité de la probabilité, on a

  $$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

  .

Exercice 8.3. On répartit au hasard m jetons numérotés (de 1 à m) dans n boîtes numérotées (de 1 à n), en supposant que chaque boîte peut recevoir un nombre quelconque de jetons.
Déterminer la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide à l'issue de la distribution.

Proposition 8.6

Continuité croissante d'une probabilité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, alors

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Continuité décroissante d'une probabilité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \supset A_{n+1}$, alors

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Sous-additivité d'une probabilité : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements telle que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Corollaire 8.7 – Le résultat qu'on utilise en pratique

Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\Big) \text{ et } \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\Big).$$

Exemples 8.4. La probabilité que le jeu entre le Roi et Monsieur ne s'arrête jamais est

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{P}_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i} \overline{P}_k\right) = \lim_{i\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 0$$

La probabilité de ne jamais obtenir pile avec une pièce équilibrée est nulle.

5. Les probabilités conditionnelles

Dans cette section, on note $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, et B un événement de la tribu $\mathscr{A}$.

5.1. Probabilité conditionnée par un événement

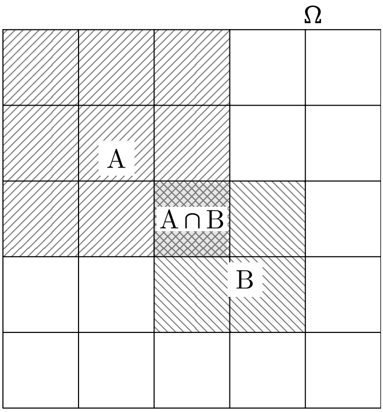
Définition 8.5

Pour tout événement $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, on appelle **probabilité de** B **sachant** A, ou **probabilité conditionnelle de** B **relativement à** A le réel noté $\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$, ou $\mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$, défini par

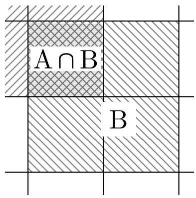
$$\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$$

Exemples 8.5. De façon intuitive, pour calculer $\mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$, tout se passe comme si le nouvel univers est A, à l'intérieur duquel on évalue l'importance de B.

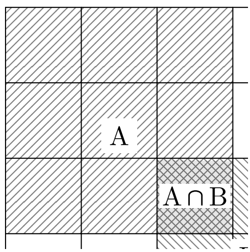
(1) On pave Ω en un système complet de 25 événements équiprobables et on considère les événements A et B :



➟ $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{25}$;

➟ 

$\mathbb{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{1}{4}$;

➟ 

$\mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{1}{9}$.

(2) On lance un dé équilibré, et on note $\mathrm{A} =$« on obtient un chiffre inférieur à 5 », $\mathrm{B} =$« on obtient un chiffre pair ».
Dans $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, il y a 2 cas favorables à B, donc on augure que $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{2}{5}$, ce qui est confirmé par $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{A})} = \frac{2/6}{5/6} = \frac{2}{5}$.

Remarque 8.7 – Ne pas confondre $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B \mid A)$.
Considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et $(A,B) \in \mathscr{A}^2$:

- $\mathbb{P}(A \cap B)$ est donc la probabilité de l'événement $A \cap B$ dans ces conditions initiales,
- $\mathbb{P}(B \mid A)$ est la probabilité de l'événement B dans des conditions initiales définies par la réalisation de A ; ou plutôt, c'est la mesure de l'occurrence, ou la proportion, de B à l'intérieur de A.

Par exemple, si on pose $B =$ « je me casse une jambe », et $A =$ « je saute par la fenêtre du 3^e étage », il est clair que $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et a fortiori $\mathbb{P}(A \cap B)$ sont très faibles, par contre $\mathbb{P}(B \mid A)$ est très proche de 1.

Méthode 8.1 La plupart du temps c'est $\mathbb{P}_A(B)$ que l'on calcule directement, puis on en déduit $\mathbb{P}(A \cap B)$ avec $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$.

Proposition 8.8 – Une probabilité conditionnelle est une probabilité comme une autre !

Pour tout événement A, l'application $\mathbb{P}_A : E \in \mathscr{A} \mapsto \mathbb{P}(E \mid A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

En particulier,
$$\mathbb{P}\left(\overline{B} \mid A\right) = 1 - \mathbb{P}(B \mid A)$$
$$\mathbb{P}((B \cup C) \mid A) = \mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(C \mid A) - \mathbb{P}((B \cap C) \mid A).$$

Exercice 8.4. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune 2 boules blanches et 3 boules noires. On pioche une boule dans l'urne U_1, on note sa couleur et on la met dans l'urne U_2. Puis on pioche une boule dans U_2. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois une boule noire ?

5.2. Probabilité d'une intersection d'événements

La formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)$, se généralise à la probabilité de l'intersection d'un nombre fini d'événements :

Proposition 8.9 – La formule des probabilités composées

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \dots \\ &\qquad \dots \times \mathbb{P}(A_{n-1} \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \times \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}), \\ &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_{k+1} \mid A_1 \cap \dots \cap A_k) \quad \textit{(c'est la forme savante de la formule)}\end{aligned}$$

Exercice 8.5. Une urne contient 4 boules blanches et 3 noires. On pioche une à une et sans remise 3 boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre 2 boules blanches et une boule noire ? Quelle est la probabilité que les 3 boules obtenues sont constituées d'une boule noire et de 2 blanches ?

5.3. Quand « ça dépend »

Proposition 8.10 – La formule des probabilités totales

Soit $(\mathrm{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ un système complet d'événements de probabilités non-nulles, alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i) \times \mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_i).$$

La formule des probabilités totales est probablement la formule la plus importante du cours de probabilités.

Corollaire 8.11 – Applications classiques

- Pour un événement A tel que $0 < \mathbb{P}(\mathrm{A}) < 1$ on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}})(\mathrm{B} \mid \overline{\mathrm{A}}).$$

- Si X est une variable aléatoire d'ensemble de valeurs $\{x_i \mid i \in \mathrm{I}\}$, alors

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_i)\mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{X} = x_i).$$

Exercice 8.6 – Oral CCP - MP.
On dispose d'une urne U_1 qui contient deux boules blanches et trois boules noires, et d'une urne U_2 qui contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie ; on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient ; si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1, et sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche », et on pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 8.7 – La ruine du joueur.
Dans un casino, à chaque partie, un joueur a la probabilité q de gagner un Numen, et une probabilité $r = 1 - q$ d'en perdre un. Au départ le joueur a une cagnotte de k Numens, et il décide d'arrêter lorsqu'il a gagné la somme de N Numens ($\mathrm{N} \geqslant k$), ou lorsqu'il est ruiné. On note p_k la probabilité que le joueur finisse ruiné.

1. Déterminer une relation entre p_{k-1}, p_k et p_{k+1}, pour k compris entre 1 et $\mathrm{N} - 1$.
2. Donner p_0 et p_{N}, et en déduire p_k en fonction de k (et de N).
3. Bien entendu, le joueur oublie sa décision de s'arrêter dès qu'il possède N Numens. Quelle est la probabilité qu'il finisse ruiné ?

5.4. Probabilité d'une cause sachant la conséquence

Proposition 8.12 – Formule de Bayes

Soit $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système complet d'événements de probabilités non-nulles et B un événement de probabilité non-nulle, alors pour tout $k \in \mathrm{I}$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_k \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_k)}{\mathbb{P}(\mathrm{B})} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_k)}{\sum\limits_{i\in\mathrm{I}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i)\mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_i)}.$$

Remarque 8.8 La formule de Bayes intervient le plus souvent lorsque l'on effectue deux expériences aléatoires différentes, l'une (la cause) influençant l'autre (la conséquence). La formule de Bayes permet de calculer la probabilité *a posteriori*, la probabilité de la cause connaissant la conséquence, on l'appelle **formule de probabilité des causes**.

Exercice 8.8. Un grand magasin est équipé d'un système d'alarme contre l'incendie. L'installateur du système *(qui n'est autre que M. Panado, vous l'aurez deviné !)* assure qu'en cas d'incendie, l'alerte sera donnée avec une probabilité de 0,99. Mais il faut noter que, même sans aucun danger, l'alarme peut se déclencher avec une probabilité évaluée à 0,007.

La compagnie d'assurance du grand magasin considère que la probabilité qu'un incendie s'y déclare est de 0,001. Si le système se déclenche, quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

6. Événements indépendants par rapport à une probabilité

Définition 8.6 – Indépendance mutuelle

- On dit que deux événements A et B sont **indépendants par rapport à la probabilité** P (on parle aussi d'indépendance stochastique) lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B), \text{ ou } \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B), \text{ ou encore } \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

- On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'**événements mutuellement indépendants par rapport à une probabilité** P lorsque pour toute partie finie J de I,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

- On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'**événements deux à deux indépendants par rapport à une probabilité** P lorsque

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad (i \neq j) \Rightarrow (\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)).$$

Remarque 8.9 – Une explication : dire que deux événements sont indépendants par rapport à une probabilité signifie que la réalisation de l'un n'a aucun impact sur la probabilité de l'autre.
On en profite pour arrêter dès maintenant **de confondre l'indépendance avec l'incompatibilité** ($A \cap B = \varnothing$), car dans ce cas, si l'un est réalisé, alors la probabilité de l'autre est carrément nulle ! Ou plus rigoureusement, si A et B ont une probabilité non nulle, ils ne peuvent pas être indépendants puisque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

Pour anticiper la question de Pierre-Antoine : oui tu as raison, si en plus d'être incompatibles l'un des deux a une probabilité nulle, alors ils sont aussi indépendants parce que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exemple 8.6.

- On pioche *au hasard* une carte dans un jeu de 32 cartes, montrez que $\mathrm{A} =$ « obtenir un pique » et $\mathrm{B} =$ « obtenir un roi » sont indépendants.

  La précision *au hasard* induit qu'il y a équiprobabilité, ce qui définit la probabilité P utilisée. $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et de même $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

  $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} =$« obtenir le roi de pique », donc $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{32}$, or $\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{32}$ donc A et B sont indépendants (par rapport à la probabilité induite par le tirage au hasard.

- Le jeu est à présent truqué de sorte que l'as de cœur a 4 fois plus de chances que n'importe quelle autre carte d'être piochée. Étudier encore l'indépendance des événements A et B.

  Tout se passe comme si le jeu contenait 4 as de cœur, on a donc un jeu de 35 cartes dans laquelle on pioche au hasard une carte, la probabilité n'est donc plus la même, et $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{8}{35}$, $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{4}{35}$, $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{35}$. Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{32}{35^2} \neq \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Remarque 8.10

- L'exemple précédent montre bien que l'indépendance stochastique s'interprète **par rapport à une probabilité**, et que cette notion n'est pas la même que la notion intuitive.
- D'ailleurs, sauf dans le cas typique de la répétition d'une expérience sans mémoire (lancer d'une pièce, piochage *avec remise*, etc...) on ne peut avoir l'intuition de l'indépendance stochastique de 2 événements.
- L'indépendance mutuelle est une propriété beaucoup plus contraignante que l'indépendance deux à deux, la première contenant d'ailleurs la seconde.

  Par exemple, si on lance deux dés équilibrés, les événements :

  - $\mathrm{A} =$« le premier dé donne un chiffre pair »,
  - $\mathrm{B} =$« de deuxième dé donne un chiffre pair »,
  - $\mathrm{C} =$« la somme des 2 dés est paire ».

  sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 8.9. Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et B une partie de $\mathscr{E}$ de cardinal k ($k \leqslant n-1$). On choisit au hasard une partie A de $\mathscr{E}$. Les événements « $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ » et « $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ » sont-ils indépendants ?

Proposition 8.13

Si $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants alors la famille $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$, avec $\mathrm{B}_i = \mathrm{A}_i$ ou $\overline{\mathrm{A}}_i$, est aussi une famille d'événements mutuellement indépendants.

Remarque 8.11 – Une explication (suite) : dire que A et B sont indépendants par rapport à une probabilité, signifie que le fait que l'un soit réalisé ou pas réalisé n'a aucun impact sur la probabilité que l'autre soit réalisé ou pas réalisé.

Une preuve de la proposition 8.1 *énoncé*

(1) S'il existe une bijection v entre A et une partie I de $\mathbb{N}$, alors pour toute partie B de A, $v_{|\mathrm{B}}$ est une bijection entre B et $v(\mathrm{B}) \subset \mathrm{I} \subset \mathbb{N}$.

(2) S'il existe une bijection u entre A et B, et une bijection v entre B et une partie I de $\mathbb{N}$, alors $v \circ u$ est une bijection entre A et I.

(3) Si A et B sont dénombrables, alors il existe une bijection φ (*resp.* ψ) entre A (resp B) et $\mathbb{N}$. Alors $(a,b) \mapsto (\varphi(a),\psi(b))$ est une bijection de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ sur $\mathbb{N}^2$, puis l'application qui à tout (i,j) associe $\frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ est aussi une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

On généralise par récurrence à un nombre fini quelconque d'ensembles.

(4) l'application qui à tout entier p de $\mathbb{Z}$ associe $2p$ si p est positif, et $-2p-1$ si p est strictement négatif, est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est en bijection avec $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, car $x \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, il existe un couple unique $(n,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que n et d sont premiers entre eux, et $x = \frac{n}{d}$.

Une correction de l'exercice 8.1 *énoncé*

$$\mathrm{A} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{\mathrm{P}}_i,$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{B} &= \mathrm{P}_1 \cup \left(\overline{\mathrm{P}_1} \cap \overline{\mathrm{P}_2} \cap \mathrm{P}_3\right) \cup \left(\overline{\mathrm{P}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{P}_4} \cap \mathrm{P}_5\right) \cup \cdots \\ &= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{2k} \overline{\mathrm{P}}_i \quad \cap \mathrm{P}_{2k+1} \right)\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 8.3 *énoncé*

$\varnothing$ est le complémentaire de Ω, et si $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'une tribu, alors $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ est encore dans la tribu, en vertu des lois de De Morgan que je rappelle ci-dessous :

$$\overline{\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i} = \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \overline{\mathrm{A}_i} \text{ et } \overline{\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \overline{\mathrm{A}_i}.$$

La proposition en est la conséquence directe car une tribu est stable par réunion dénombrable et passage au complémentaire.

Une correction de l'exercice 8.2 *énoncé*

Notons de façon implicite $\Omega = [\![1,6]\!]$, et $p_i = \mathbb{P}(\{i\})$.
Alors d'après l'énoncé $p_1 = \ldots = p_5$ et $p_6 = 10p_1$.
Mais alors, la condition $\sum\limits_{i=1}^{6} p_i = 1$ donne $15p_1 = 1$, d'où $p_1 = \ldots = p_5 = \frac{1}{15}$ et $p_6 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.
Par conséquent, comme « obtenir un chiffre pair »$= \{2,4,6\}$, on en déduit que la probabilité de cet événement est $p_1 + p_2 + p_6 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. On aurait aussi pu considérer que le dé est un dé équilibré, mais pourvu de 15 faces, dont 10 portant le chiffre 6, d'où en raisonnant en équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(\text{« obtenir un chiffre pair »}) = \frac{1+1+10}{15} = \frac{4}{5}.$$

Une preuve de la proposition 8.4 *énoncé*

Par équiprobabilité, on sait qu'il existe un réel $a \in [0\,;\,1]$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $\mathrm{P}(\{x\}) = a$.
Mais

- d'une part $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- et d'autre part $\Omega = \bigcup\limits_{x\in\Omega} \{x\}$ donc par $\sigma-$additivité de la probabilité (définition 8.4),

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in\Omega}\{x\}\right) \overset{\sigma\text{-additivité}}{=} \sum_{x\in\Omega}\mathbb{P}(\{x\}) = \sum_{x\in\Omega} a = \operatorname{card}(\Omega)\times a$$

donc $\operatorname{card}(\Omega)\times a = 1$, d'où $a = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}$.

Pour tout événement A,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{A}) &= \sum_{x\in\mathrm{A}}\mathbb{P}(\{x\}) = \sum_{x\in\mathrm{A}} a = \operatorname{card}(\mathrm{A})\times a \\ &= \operatorname{card}(\mathrm{A})\times\frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\operatorname{card}(\mathrm{A})}{\operatorname{card}(\Omega)}\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 8.5 *énoncé*

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, car $\mathbb{P}(\Omega) = \begin{cases}\mathbb{P}(\Omega\cup\varnothing) = \mathbb{P}(\Omega)+\mathbb{P}(\varnothing) \\ 1\end{cases}$
- $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{A})$ car $\mathbb{P}(\Omega) = \begin{cases}\mathbb{P}(\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{A}}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})+\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) \\ 1\end{cases}$,

- $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ car $A=A\cap(\overline{B}\cup B)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)$ donc, comme $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$, $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A-B)+\mathbb{P}(A\cap B)$,
- si $A\subset B$, alors $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cup(B-A))=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B-A)\geqslant\mathbb{P}(A)$,
- $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A\cup(B-A))=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B-A)=\mathbb{P}(A)+(\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B))$.

Une correction de l'exercice 8.3 *énoncé*

On note E_n l'événement « aucune des n boîtes n'est vide ».

Première tentative dans les limites du programme.

Pour tout $i\in[\![1\ ;\ n]\!]$, posons $V_i=$« le nombre de boîtes vides est i ». Alors

$$E_n=\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n}V_i\right)},$$

donc les V_i étant deux à deux disjoints, on obtient par σ-additivité

$$\mathbb{P}(E_n)=1-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(V_i).$$

Soit $i\in[\![1\ ;\ n]\!]$, pour calculer $\mathbb{P}(V_i)$:

- on choisit les i boîtes parmi n boîtes qui seront vides, il y a $\binom{n}{i}$ possibilités ;
- pour chacun de ces choix, la probabilité qu'aucune boîte parmi les $n-i$ boîtes restantes ne soit vide à l'issue de la distribution, est la même que la probabilité que l'exercice propose de trouver, mais avec $n-i$ à la place de n, c'est-à-dire $\mathbb{P}\left(E_{n-i}\right)$.

Ainsi

$$\mathbb{P}(V_i)=\binom{n}{i}\mathbb{P}\left(E_{n-i}\right).$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(E_n)=1-\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\mathbb{P}\left(E_{n-i}\right),$$

résultat dont je ne sais que faire…

Avec la formule du crible.

Pour tout $i\in[\![1\ ;\ n]\!]$, on considère l'événement $A_i=$ « la boîte n^o i est vide ».

Alors $E=\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)}$.

Or pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)^m}{n^m}$, donc grâce à la formule du crible :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m}.
\end{aligned}$$

On remarque en passant qu'une distribution qui n'oublie aucune boîte est en fait une surjection de l'ensemble des jetons sur l'ensemble des boîtes. Donc on a déterminé au passage que le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal m sur un ensemble de cardinal n est

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

On est bon, non ?

Une preuve de la proposition 8.8

énoncé

- pour tout événement B, $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ or $A \cap B \subset A$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ d'où :

$$0 \leqslant \mathbb{P}_A(B) \leqslant 1$$

- $\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$,
- Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_A\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) &= \frac{\mathbb{P}\Big(A \cap \big(\bigcup_{i \in I} B_i\big)\Big)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)\Big)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap B_i)}{\mathbb{P}(A)} \quad \textit{(car les } A \cap B_i \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{i \in I} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_i)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_A(B_i)
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 8.4 *énoncé*

Notons N_1 l'événement « la boule tirée dans U_1 est noire » et N_2 l'événement « la boule tirée dans U_2 est noire ». On cherche donc $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)$.
$\mathbb{P}(N_1) = \frac{2}{5}$ et, sachant N_1, l'urne U_2 contient alors 3 boules blanches et 3 noires, ce qui entraîne : $\mathbb{P}(N_2 \mid N_1) = \frac{3}{6}$.
On obtient alors $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{5}$.

Une preuve de la proposition 8.9 *énoncé*

Par récurrence, en remarquant que si $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, par croissance de la probabilité, $(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \subset (A_1 \cap \cdots \cap A_i)$ entraîne que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_i) > \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$.
Le nœud de la preuve est

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \times \mathbb{P}(A_{n+1} \mid (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})),$$

et on connaît $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$ par récurrence.

Une correction de l'exercice 8.5 *énoncé*

- $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(B_1).\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)\mathbb{P}(N_3 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$.
- On pose A =« les 3 boules obtenues sont constituées d'une boule noire et de 2 blanches ».
  Première méthode. Alors

$$A = (B_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap N_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap B_3)$$

Les 3 événements de cette réunion sont 2 à 2 disjoints, donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2 \cap B_3)\\ &= \mathbb{P}(B_1).\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)\mathbb{P}(N_3 \mid B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(B_1).\mathbb{P}(N_2 \mid B_1)\mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap N_2) +\\ &\mathbb{P}(N_1).\mathbb{P}(B_2 \mid N_1)\mathbb{P}(B_3 \mid N_1 \cap B_2)\\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = 3.\frac{6}{35} = \frac{18}{35}\end{aligned}$$

Deuxième méthode. L'expérience revient à extraire un échantillon de 3 boules de cette urne : le nombre total de résultats est donc $\binom{7}{3}$, que l'on peut considérer comme équiprobables.
Parmi ces résultats, l'événement A est réalisé lorsque l'échantillon obtenu contient 2 boules blanches et 1 noire, que l'on constitue en prenant :

- 2 boules parmi les 4 boules blanches, ce pour quoi on a $\binom{4}{2} = 6$ possibilités ;

➔ 1 boule parmi les 3 noires, avec $\binom{3}{1} = 3$ choix possibles.

On en déduit que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35}.$$

Une preuve de la proposition 8.10 *énoncé*

$B = B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$, et comme cette réunion est disjointe, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Une preuve de la proposition 8.11 *énoncé*

On applique la formule des probabilités totales d'une part sur le système complet d'événements $(A, \overline{A})$, et d'autre part sur le système complet d'événements $((X = x_i) \mid i \in I)$ induit par la variable aléatoire X.

Une correction de l'exercice 8.6 *énoncé*

(1) Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2.
(U_1, U_2) est un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}_{U_1}(B_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}_{U_2}(B_1)\mathbb{P}(U_2)$.
Donc $p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}$
On a donc $p_1 = \frac{17}{35}$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1})\mathbb{P}(\overline{B_n}).$$

Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \frac{2}{5} p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n)$.

Donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.

(3) On remarque que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.

Son point fixe ℓ est solution de l'équation $\ell = -\dfrac{6}{35}\ell + \dfrac{4}{7}$ dont la résolution donne $\ell = \dfrac{20}{41}$.
On sait alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = p_n - \ell$ est géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$, par conséquent pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} u_1.$$

Or $u_1 = p_1 - l = \dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{3}{1435}$, donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = u_n + \ell = -\frac{3}{1435}\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}.$$

Une correction de l'exercice 8.7

énoncé

(1) (a)
- Si le joueur a une cagnotte initiale de 0 Numen, alors il est ruiné avant même de jouer, donc $p_0 = 1$;
- et si au départ le joueur dispose de N Numens, alors il ne joue pas, donc ne peut pas être ruiné : $p_\mathrm{N} = 0$.

(b) Soient $k \in [\![1,\mathrm{N}-1]\!]$, $\mathrm{B} =$« le joueur perd la première partie », et $\mathrm{A}_k =$ « le joueur finit ruiné avec une fortune initiale de k Numens ».
Alors la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(\mathrm{B},\overline{\mathrm{B}})$ donne

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_k) = \mathbb{P}(\mathrm{B})\mathbb{P}_\mathrm{B}(\mathrm{A}_k) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{A}_k).$$

Or
- ➟ si le joueur perd la première partie, tout se passe alors comme si il commençait à joueur avec une fortune initiale de $k-1$ Numens, donc $\mathbb{P}_\mathrm{B}(\mathrm{A}_k) = p_{k-1}$,
- ➟ selon les mêmes considérations, on a $\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{A}_k) = p_{k+1}$.

Par conséquent $\boxed{p_k = (1-q)p_{k-1} + qp_{k+1}}$.

(c) La suite $(p_k)_{k\in[\![0\,;\,\mathrm{N}]\!]}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.
Son équation caractéristique est $qx^2 - x + 1 - q = 0$, qui a pour racines 1 et $\alpha = \frac{1-q}{q} = \frac{r}{q}$. Par conséquent :

➟ si $q \neq \frac{1}{2}$, alors $1-q \neq q$ et $\alpha \neq 1$, donc il existe deux réels λ et μ qui vérifient

$$\forall k \in [\![0,\mathrm{N}]\!],\ p_k = \lambda \times 1^k + \mu \times \alpha^k\,;$$

les conditions aux limites $p_0 = 1$ et $p_\mathrm{N} = 0$ donnent $\lambda = \frac{\alpha^\mathrm{N}}{\alpha^\mathrm{N}-1}$ et $\mu = \frac{1}{1-\alpha^\mathrm{N}}$, d'où

$$\boxed{p_k = \frac{\alpha^k - \alpha^\mathrm{N}}{1-\alpha^\mathrm{N}}}.$$

➟ Si $q = \frac{1}{2}$, 1 est racine double. Il existe dans ce cas deux réels λ et μ qui vérifient

$$\forall k \in [\![0,\mathrm{N}]\!],\ p_k = (\lambda + \mu\, k) \times 1^k,$$

et grâce aux conditions aux limites, $\boxed{p_k = 1 - \frac{k}{\mathrm{N}}}$.

(2) Pour traduire le fait que le joueur ne s'arrête jamais volontairement, il suffit de faire tendre N vers l'infini.

➟ Si $1-q > q$ (c'est-à-dire $q < \frac{1}{2}$ et le jeu est défavorable au joueur), alors $\alpha > 1$ et

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} p_k(\mathrm{N}) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{\alpha^\mathrm{N}}{\alpha^\mathrm{N}} = 1,$$

donc le joueur est quasi-certain de se ruiner.

➟ Si $q = \frac{1}{2}$, on a encore $\lim_{\mathrm{N}\to\infty} p_k(\mathrm{N}) = 1$ et la conclusion est la même.

➟ Si $1-q < q$ (c'est-à-dire $q > \frac{1}{2}$ et le jeu est favorable au joueur), alors $\alpha < 1$ et $\lim_{\mathrm{N}\to\infty} p_k(\mathrm{N}) = \alpha^k$. Le joueur n'est plus quasi-certain de se ruiner (et la probabilité qu'il se ruine est une fonction décroissante de sa fortune initiale k).

Une preuve de la proposition 8.12 *énoncé*

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}_\mathrm{A}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$, puis on applique la formule des probabilités totales.

Une correction de l'exercice 8.8 *énoncé*

On note I =« il y a un incendie » et A =« Il y a une alerte ». L'énoncé nous donne $\mathbb{P}_\mathrm{I}(\mathrm{A}) = 0,99$, $\mathbb{P}_{\bar{\mathrm{I}}}(\mathrm{A}) = 0,007$ et $\mathbb{P}(\mathrm{I}) = 0,001$. On cherche la probabilité, sachant que l'alarme se déclenche, qu'il n'y ait pas d'incendie ; autrement dit, on cherche $\mathbb{P}_\mathrm{A}(\bar{\mathrm{I}})$.

Alors avec la formule de Bayes sur le système complet d'événements $(\mathrm{I}, \bar{\mathrm{I}})$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathrm{A}}\left(\bar{\mathrm{I}}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\bar{\mathrm{I}}\right)\mathbb{P}_{\bar{\mathrm{I}}}(\mathrm{A})}{\mathbb{P}(\mathrm{A})} = \frac{0,999 \times 0,007}{0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,007} \\ &= 0,8759864713.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 8.9

énoncé

Tout d'abord, le nombre de parties de E est 2^n, et l'expression « au hasard » de l'énoncé permet de supposer qu'elles sont équiprobables *(il peut sembler étrange de considérer que $\varnothing$ a la même probabilité d'être choisie que E, mais c'est ainsi)*.
On fixe une partie B de E, telle que $\mathrm{card}(\mathrm{B}) = k$.

- Choisir une partie A de E incluse dans B revient à choisir une partie A de B : il y a $2^{\mathrm{card}(\mathrm{B})} = 2^k$ possibilités.

  Plus rigoureusement (mais en courant le risque de vraiment paraître couper les cheveux en quatre) l'ensemble $\mathscr{E}_{\mathrm{B}}$ que l'on veut dénombrer (c'est-à-dire l'ensemble des parties de E contenues dans B), est en bijection avec $\mathscr{P}(\mathrm{B})$ via l'application la plus simple du monde

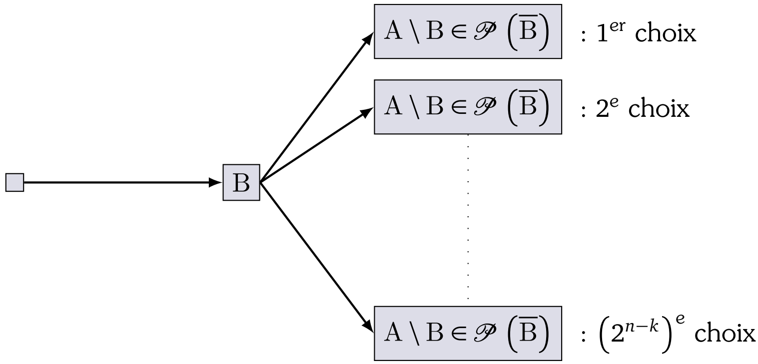
  $$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}_{\mathrm{B}} & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{B}) \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \longleftarrow\!\shortmid & \mathrm{A} \end{array}$$

  donc

  $$\begin{aligned}\mathrm{card}(\mathscr{E}_{\mathrm{B}}) &= \mathrm{card}\left(\mathscr{P}(\mathrm{B})\right) \\ &= 2^{\mathrm{card}(\mathrm{B})} = 2^k.\end{aligned}$$

  On en déduit que $\mathbb{P}(\ \mathrm{A} \subset \mathrm{B}\ ) = \frac{2^k}{2^n} = \frac{1}{2^{n-k}}$.

- Pour construire une partie A de E qui contient B, on va choisir les éléments de cette partie A :
  - tout d'abord on prend nécessairement les éléments de B, puisque A doit contenir B, *(quand dans le sens courant « on n'a pas le choix », il y a au sens mathématique 1 choix !)* ;
  - ceux-ci étant fixés, il reste alors à choisir les autres éléments de A dans $\overline{\mathrm{B}}$, autrement dit choisir $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$, ce qui revient à choisir une partie parmi les $2^{\mathrm{card}(\overline{\mathrm{B}})} = 2^{n-k}$ parties de $\overline{\mathrm{B}}$.



On a donc 2^{n-k} choix pour une partie A de E qui contient B.

Beaucoup plus rigoureusement, l'ensemble $\mathscr{F}_B$ que l'on veut dénombrer (c'est-à-dire l'ensemble des parties de E qui contiennent B), est en bijection avec $\{B\} \times \mathscr{P}\left(\overline{B}\right)$ via l'application :

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{F}_B & \longrightarrow & \{B\} & \times & \mathscr{P}\left(\overline{B}\right) \\ A & \longmapsto & (B & , & A \setminus B) \\ B \cup C & \longleftarrow & (B & , & C) \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(\mathscr{F}_B) &= \operatorname{card}\left(\{B\} \times \mathscr{P}\left(\overline{B}\right)\right) \\ &= \operatorname{card}(\{B\}) \times \operatorname{card}\left(\mathscr{P}\left(\overline{B}\right)\right) \\ &= 1 \times 2^{\operatorname{card}\left(\overline{B}\right)} = 2^{n-k}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(\, B \subset A \,) = \frac{2^{n-k}}{2^n} = \frac{1}{2^k}$.

➟ Enfin,

$$\mathbb{P}((\, B \subset A \,) \cap (\, A \subset B \,)) = \mathbb{P}(A = B) = \frac{1}{2^n},$$

$$\mathbb{P}(\, B \subset A \,) \times \mathbb{P}(\, A \subset B \,) = \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^n}.$$

Donc les deux événements en question sont indépendants.

Une preuve de la proposition 8.13

énoncé

- Cas où $I = \{1, 2\}$: si A_1 et A_2 sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$, car $A_1 = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (A_1 \cap A_2)$ est une réunion disjointe, ainsi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A_2}).$$

  Donc A_1 et $\overline{A_2}$ sont indépendants, et il en est de même de $\overline{A_1}$ et A_2, et enfin $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$.
- La proposition 8.13 est une généralisation du point précédent.