Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$.

Pour M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et (i,j) de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $(\mathrm{M})_{i,j}$ le terme général de la matrice M (terme situé sur la i^e ligne et la j^e colonne de M).

On confondra souvent $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, en notant le n-uplet $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n)$ sous forme de colonne $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

1. Rappels de PCSI, avec quelques ajouts

→ On appelle **matrices élémentaires** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les matrices $\mathrm{E}_{k,\ell}$ de terme général

$$(\mathrm{E}_{k,\ell})_{i,j} = \delta_{i,k} \times \delta_{j,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = \ell, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La famille $\left(\mathrm{E}_{k,\ell}\right)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant p}}$ est la **base canonique** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

→ Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis respectivement de bases $\mathscr{B} = \left(e_1, \dots, e_p\right)$ et $\mathscr{C}$, alors la matrice de $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(u(\mathscr{B})) = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}\left(u(e_1), \dots, u(e_p)\right).$$

→ Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{M} \times \mathrm{X} \end{array} \right.$

est l'**application linéaire canoniquement associée à la matrice** M.

On note $\operatorname{Ker}(\mathrm{M}) = \{\mathrm{X} \in \mathbb{K}^p \mid \mathrm{M}\,\mathrm{X} = 0\}$, et $\operatorname{Im}(\mathrm{M}) = \{\mathrm{M}\,\mathrm{X} \mid \mathrm{X} \in \mathbb{K}^p\}$.

1.1. Matrices carrées particulières

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

→ M est **diagonale** ($\mathrm{M} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$) lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j) \Rightarrow \left((\mathrm{M})_{i,j} = 0\right)$.
$\operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

→ M est **triangulaire supérieure** (*resp.* inférieure) ($\mathrm{M} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, *resp.* $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$), lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i > j \Rightarrow (m)_{i,j} = 0$ (*resp.* $i < j \Rightarrow (\mathrm{M})_{i,j} = 0$).

→ M est **symétrique** (*resp.* **antisymétrique**) ($\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, *resp.* $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$), lorsque $\mathrm{M}^\top = \mathrm{M}$ (*resp.* $\mathrm{M}^\top = -\mathrm{M}$).

→ On a déjà vu que ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\dim(\mathscr{D}_n(\mathbb{K})) = n$, $\dim(\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})) = \dim(\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})) = \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$.

1.2. Produit de matrices

Définition 9.1 – Le produit matriciel

On appelle **produit** de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ la matrice notée $A \times B$ de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, dont le terme général vaut $(A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} (A)_{i,k}(B)_{k,j}$.

Remarques 9.1

(1) La j^e colonne de AB est le produit de A par la j^e colonne de B, c'est-à-dire la combinaison linéaire des colonnes de A avec les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

(2) La i^e ligne de AB est le produit de la i^e ligne de A par B, c'est-à-dire la combinaison linéaire des lignes de B avec les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.

(3) Deux matrices non nulles peuvent avoir un produit nul : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et en particulier : $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{jk} E_{i\ell}$.

(4) Le produit matriciel n'est pas commutatif : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(5) En notant E_i les vecteurs (en colonne) de la base canonique de $\mathbb{K}^n$,

$$E_i \times E_j^{\top} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E_{i,j}.$$

Exercice 9.1. Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $A \times A^{\top} = A^{\top} \times A$ si, et seulement si, A est diagonale.

Proposition 9.1 – Applications linéaires et produit de matrices

En notant E,F,G trois espaces vectoriels munis de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$; $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$; $x \in E$:

(image d'un vecteur) $\quad \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u(x)) = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u) \times \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x),$

(composée de deux applications linéaires) $\quad \underset{\mathcal{B},\mathcal{D}}{\mathrm{Mat}}(v \circ u) = \underset{\mathcal{C},\mathcal{D}}{\mathrm{Mat}}(v) \times \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u).$

Exercice 9.2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ [\forall X \in \mathbb{K}^p,\ \ AX = 0] \Longleftrightarrow A = 0.$

Proposition 9.2 – Propriétés du produit matriciel

(1) Le produit matriciel est associatif, et l'application $(A,B) \mapsto A \times B$ est bilinéaire (d'où la distributivité).

(2) La matrice unité est l'élément neutre du produit, la matrice nulle en est l'élément absorbant.

(3) $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\left|\begin{array}{l} (A \times B)^{\top} = B^{\top} \times A^{\top}, \\ \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}. \end{array}\right.$

*Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, **il suffit** que A et B commutent entre elles pour que $(A \times B)^k = A^k \times B^k$, mais sinon, rien ne permet de l'affirmer.*

Proposition 9.3 – Le binôme de Newton, l'identité géométrique

Soient $p \in \mathbb{N}$, et $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent entre elles ($AB = BA$).

Le binôme de Newton : $(A+B)^p = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$,

L'identité géométrique : $A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B) \times \sum\limits_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}$.

1.3. Utilisation des polynômes

Remarque 9.2 – Rappel : soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$, $Q \in \mathbb{K}[X]$.

- Alors $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$.
- $(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$. En particulier les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent entre elles.
- Lorsque $P(A) = 0_n$, on dit que P est un **polynôme annulateur de** A.

Exercice 9.3.

1. Montrer que $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par le produit.
   Préciser les termes diagonaux de $P(A)$ où $P \in \mathbb{K}[X]$ et A est une matrice triangulaire.
2. Donner un polynôme annulateur, non nul, d'une matrice diagonale.

Exercice 9.4 – Polynôme annulateur et puissances d'une matrice.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que P est un polynôme annulateur de M.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
3. En déduire l'expression de M^n en fonction de M^2, M et I_3, et vérifier que cette expression est encore valable pour $n=-1$.

1.4. Inversibilité des matrices carrées

Définition 9.2 – Matrice carrée inversible

- La matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** lorsqu'il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$.
- Cette matrice B est alors unique, on la note A^{-1}, c'est l'**inverse** de A.
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$, muni de la multiplication des matrices, est appelé **groupe linéaire d'ordre** n.

Méthode 9.1 – Pour montrer qu'une matrice A n'est pas inversible :

*il suffit de trouver une matrice B **non nulle** telle que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est la matrice nulle.*

En effet, dans ce cas, si A est inversible et $\mathrm{AB} = 0$, alors en multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $\mathrm{B} = 0$, ce qui est contradictoire.

Proposition 9.4 – Matrice inversible et application linéaire bijective

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible, (ii) $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \{0\}$, (iii) $\mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathbb{K}^n$,

(iv) les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$,

(v) *(l'endomorphisme canoniquement associé à)* A est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$,

(vi) une application linéaire de matrice A dans des bases quelconques est bijective,

(vii) toute application linéaire ayant pour matrice A dans des bases quelconques est bijective.

Exercice 9.5 – 🚢.
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A est inversible, B nilpotente, et $AB = BA$.
Montrer que $I_n - B$ et $A + B$ sont inversibles. Donner leurs inverses.

Proposition 9.5 – Propriétés des matrices inversibles

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Si $AB = I_n$ **ou bien** $BA = I_n$, alors A et B sont inversibles, et $B = A^{-1}$.

(2) Si A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(3) Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(4) Si A est inversible, alors $A^\top$ l'est aussi et $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

Exercice 9.6 – Suite de l'exercice 9.4 (utilisation d'un polynôme annulateur pour l'inverse d'une matrice).
Montrer que M est inversible et donner M^{-1}.

Proposition 9.6 – Système de Cramer

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathbb{K}^n$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) le système $AX = Y$ admet une solution unique ;

(ii) le système homogène $AX = 0$ a pour unique solution la solution nulle ;

(iii) A est une matrice inversible.

On dit alors que $AX = Y$ est un **système de Cramer**.

1.5. Changement de bases

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension n, où $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathscr{B}$ une base de E.

Proposition 9.7 – Matrice de passage entre deux bases

Pour toute famille $\mathscr{B}'$ de vecteurs de E, $\mathscr{B}'$ est une base de E si, et seulement si, la matrice $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}')$ est inversible.
Dans ce cas, son inverse est $\left(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}')\right)^{-1} = \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B})$.
On appelle $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}')$ **matrice de passage** de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Remarque 9.3 – Matrice de l'identité et matrice de passage
Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, alors $\underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) = \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}(\mathscr{B})) = \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

Proposition 9.8 – Changement de bases

Changement de coordonnées pour un vecteur : pour tout $x \in \mathrm{E}$,
$$\underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(x) = \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x).$$

Changement de matrice pour une application linéaire : si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$,
$$\underset{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(u) = \underset{\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C}) \times \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}').$$

Cas d'un endomorphisme : pour tout endomorphisme u de E,
$$\underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(u) = \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}').$$

1.6. Rang d'une matrice

Définition 9.3

Le **rang** d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes, ce qui revient au rang de son application linéaire canoniquement associée.

Exemple 9.1 – Rangs déterminés à l'œil nu.

Donner le rang des matrices $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \cdots \cdots a_n \\ a_1 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_n & 0 \cdots \cdots 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & n & 1 \cdots \cdots n \\ 2 & n-1 & 2 \cdots \cdots n-1 \\ 3 & n-2 & 3 \cdots \cdots n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ n & 1 & n \cdots \cdots 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.7 – Matrices de rang 1.

1. Démontrer qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\mathrm{L} \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{CL}$.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
   Exprimer A^2 à l'aide de $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$ et de A, puis calculer A^k et $(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 9.9 – Propriétés du rang

(1) Une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = n$.

(2) Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \leqslant \min(\mathrm{rg}(\mathrm{A}), \mathrm{rg}(\mathrm{B}))$.

(3) Deux matrices équivalentes par lignes ou colonnes sont de même rang.

(4) Le rang d'une matrice ne change pas quand on la multiplie par une matrice inversible.

(5) Le rang d'une application linéaire *(c'est-à-dire la dimension de son image)* est égale au rang de n'importe laquelle de ses matrices.

(6) Théorème du rang : $\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \ \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = p - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{M}))$.

Exercice 9.8 – Un résultat classique.
Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la **matrice canonique de rang** r est

$$\mathrm{J}_r = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{E}_{ii} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right).$$

Montrer qu'une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente par les lignes et les colonnes à J_r, autrement dit si, et seulement si, il existe des matrices carrées inversibles $\mathrm{P} \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q} \in \mathscr{G}l_p(\mathbb{K})$ qui vérifient $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{J}_r\mathrm{Q}$.

Proposition 9.10

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.
Autrement dit, le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes.

1.7. Déterminants

Définition 9.4 – Déterminant d'une matrice carrée

Il existe une unique application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, notée det, et appelée déterminant, vérifiant les trois propriétés suivantes :

- det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
- det est anti-symétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
- $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.

Exercice 9.9.

Soient $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ des nombres complexes, déterminer la valeur du déterminant ci-contre :

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{n-1}y_n \\ x_ny_1 & \cdots & x_ny_{n-1} & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Définition 9.5 – Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, dont $\mathscr{B}$ est une base, et $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle **déterminant de la famille de vecteurs** $(x_1,\ldots,x_n)$ **dans la base** $\mathscr{B}$ le réel noté $\det_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n)$ défini par

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n) = \det\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n)\right).$$

Proposition 9.11 – Propriétés du déterminant

(1) Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales est nul ;

(2) pour tout $(\lambda,\mathrm{A}) \in \mathbb{K} \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$;

⚠ *Le déterminant n'est pas linéaire !*

(3) pour toutes matrices A et B, $\det(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})\times\det(\mathrm{B})$;

(4) une matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, et dans ce cas $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \det(\mathrm{A})^{-1}$;

(5) pour toute matrice A, $\det(\mathrm{A}^\top) = \det(\mathrm{A})$.

Proposition 9.12

Dans un espace vectoriel de dimension n, la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si, et seulement si, $\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$ est non nul pour n'importe quelle base $\mathscr{B}$.

Remarque 9.4 Si x et y forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$, alors $z \in \mathrm{Vect}(x,y)$ si, et seulement si, le déterminant de la famille (x,y,z) dans la base canonique est nul.

Proposition 9.13 – Déterminant et opérations élémentaires

Si $i \neq j$,
- les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ conservent le déterminant,
- $L_i \longleftrightarrow L_j$ et $C_i \longleftrightarrow C_j$ changent le signe du déterminant,
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$ et $C_i \leftarrow \alpha C_i$ multiplient le déterminant par α.

Exercice 9.10. Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, donner le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux valent a et les autres b.

Proposition 9.14 – Développement suivant une ligne et une colonne

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\Delta_{i,j}$, le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.
Le **développement suivant** la j^e colonne (*resp.* i^e ligne) donne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j} \qquad (\textit{resp. } \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}).$$

Exercice 9.11.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux réels non nuls, et Δ_n le déterminant de taille n ci-contre.

Déterminer une relation entre Δ_n, Δ_{n+1} et Δ_{n+2} puis donner l'expression de Δ_n en fonction de n.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

2. Matrices par blocs et sous-espaces stables

Proposition 9.15 – (Rappel) Caractérisation matricielle d'un sous-espace stable

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, dont F est un sous-espace vectoriel de dimension p.

Le sous-espace vectoriel F est stable par $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ $\boxed{\text{si, et seulement si}}$, il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, et $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ telles que la matrice de u dans une **base $\mathscr{B}$ adaptée** à F est $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline 0_{n-p,p} & \mathrm{D} \end{array}\right)$.

Dans ce cas A est la matrice de l'endomorphisme de F induit par u dans la base de F choisie pour former la base $\mathscr{B}$.

Exercice 9.12 – Extrait de Mines-Ponts.
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, et on suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
Donner une matrice de u caractérisant le fait que $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ et $u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$.

Proposition 9.16 – Produit par blocs

On suppose que $n, n_1, n_2, p, p_1, p_2, q, q_1, q_2$ sont des entiers strictement positifs vérifiant $n = n_1 + n_2$, $p = p_1 + p_2$ et $q = q_1 + q_2$.
Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, définis ci-dessous par blocs :

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \hline \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{array}\right) \text{ et } \mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} \\ \hline \mathrm{B}_{21} & \mathrm{B}_{22} \end{array}\right)$$

où $\mathrm{A}_{11}, \mathrm{A}_{12}, \mathrm{A}_{21}, \mathrm{A}_{22}$ sont respectivement dans $\mathscr{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, et B_{11}, $\mathrm{B}_{12}, \mathrm{B}_{21}$, B_{22} sont respectivement dans $\mathscr{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{22} \\ \hline \mathrm{A}_{21}\mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_{21}\mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{22} \end{array}\right)$$

Exemple 9.2. Si $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$, alors $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0_n \\ \hline -\mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n + \mathrm{A}\mathrm{B} & -\mathrm{A} \\ \hline 0_n & \mathrm{I}_n \end{array}\right)$

Remarque 9.5 Ce principe de calcul se généralise à un nombre quelconque de blocs, du moment que la partition des colonnes de A coïncide avec celle des lignes de B.

Exercice 9.13.
Montrer que si $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est triangulaire de diagonale nulle, alors $T^n = 0_n$.

Proposition 9.17 – Déterminant d'une matrice triangulaire, triangulaire par blocs

(1) Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale.

(2) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $D \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, alors

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & D \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(D), \text{ et } \det \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(D).$$

(3) Plus généralement, le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

Exercice 9.14 – Oral X-ESPCI.
Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} I_n & -A \\ \hline B & I_n \end{array}\right)$. Montrer que $\det(M) = \det(I_n + AB)$.

3. Interpolation de Lagrange

Proposition 9.18 – Les polynômes de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts.
Les polynômes **de Lagrange** sont définis pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$ par

$$\mathrm{L}_k(\mathrm{X}) = \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} \frac{\mathrm{X}-a_i}{a_k-a_i} = \frac{(\mathrm{X}-a_0)\cdots(\mathrm{X}-a_{k-1})\times(\mathrm{X}-a_{k+1})\cdots(\mathrm{X}-a_n)}{(a_k-a_0)\cdots(a_k-a_{k-1})\times(a_k-a_{k+1})\cdots(a_k-a_n)}.$$

Ces polynômes vérifient :

- pour tout $(i,j) \in [\![0\,;\,n]\!]^2$, $\mathrm{L}_i(a_j) = \delta_{i,j}$;
- $(\mathrm{L}_0,\ldots,\mathrm{L}_n)$ est une base, appelée **base de Lagrange**, de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$;
- les coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ dans cette base sont $\big(\mathrm{P}(a_0),\ldots,\mathrm{P}(a_n)\big)$.

Exercice 9.15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
On suppose qu'il existe un réel t tel que pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\mathrm{P}(k) = t^k$.
Calculer $\mathrm{P}(n+1)$.

Remarque 9.6 – Matrice de passage d'une base de Lagrange à la base canonique

On remarque que

$$\underset{\mathrm{L}_0,\ldots,\mathrm{L}_n}{\mathrm{Mat}}(1,\mathrm{X},\ldots,\mathrm{X}^n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \ldots\ldots a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 \ldots\ldots a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 \ldots\ldots a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 \ldots\ldots a_n^n \end{pmatrix}.$$

Proposition 9.19 – Matrice et déterminant de Vandermonde

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, on appelle **matrice de Vandermonde** de $(a_0,\ldots,a_n)$ la matrice de la remarque ci-dessus. Son déterminant est

$$\mathrm{V}_n(a_0,\ldots,a_n) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i).$$

Exercice 9.16. Montrer que par $n+1$ points du plan d'abscisses deux à deux distinctes passe la courbe d'un unique polynôme de degré inférieur à n.

4. Matrices semblables

Définition 9.6 – Matrices semblables

Deux matrices carrées A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables** lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $B = P^{-1}AP$.

Remarque 9.7 – Matrice semblable à une matrice d'homothétie
La seule matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à la matrice d'homothétie λI_n est λI_n elle-même, car $P^{-1}(\lambda I_n)P = \lambda P^{-1}I_nP = \lambda I_n$.

Proposition 9.20 – Déterminant de matrices semblables

Deux matrices semblables ont même déterminant.

Remarque 9.8 La réciproque est fausse, en effet la matrice nulle 0_2 et la matrice J dont tous les termes valent 1 ne sont pas semblables, mais elles ont pour déterminant 0.

Proposition 9.21 – Caractérisation de la similitude de deux matrices

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent, relativement à deux bases différentes (ou pas), un même endomorphisme.

Définition 9.7 – Déterminant d'un endomorphisme

Par conséquent, toutes les matrices d'un même endomorphisme ont le même déterminant, que l'on nomme **déterminant de l'endomorphisme**.

Méthode 9.3 – Pour montrer que deux matrices sont semblables
Soient A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut chercher une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle l'endomorphisme $X \mapsto AX$ (l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A) est représenté par la matrice B.

Exercice 9.17.
Montrer que les matrices A et N ci-contre sont semblables, et préciser la matrice inversible P qui vérifie $N = P^{-1}AP$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.18. Donner une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ semblable à son double.

5. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

Définition 9.8 – Trace d'une matrice

On appelle **trace** de la matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la somme de ses termes diagonaux, autrement dit le scalaire $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Exercice 9.19. Pour toutes matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\overline{B} = \left(\overline{b}_{i,j}\right)$.
Montrer que $\mathrm{Tr}\left(A^\top \times \overline{B}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\overline{b}_{i,j}$.
En particulier, montrer que si $\mathrm{Tr}\left(A^\top \times \overline{A}\right) = 0$, alors A est la matrice nulle.

Remarque 9.9 – Inverse d'une matrice 2×2
Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible, alors $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}(\mathrm{Tr}(M)I_2 - M)$.

Proposition 9.22

(1) L'application trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(2) La trace d'une matrice est égale à la trace de sa transposée.
(3) Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
(4) En particulier, deux matrices semblables ont la même trace.

⚠ *L'élève Chaprot se convainc souvent, pour peu que ça l'arrange, de ce que* $\mathrm{Tr}(A\times B)$ *est égal à* $\mathrm{Tr}(A)\times\mathrm{Tr}(B)$. *Il a tort et mérite une semonce.*

Remarque 9.10 – Rang et noyau de la trace.
La trace est une forme linéaire non nulle, donc son rang vaut $\mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) = 1$.
Puis par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) - 1 = n^2 - 1$.
La famille $\left(\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}, \left(E_{i,i} - E_{n,n}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$ est libre *(je vous laisse vous en convaincre)*, de cardinal $n^2 - 1$, et ses éléments ont une trace nulle, donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$, l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 9.20. Existe-t-il un couple (A,B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB - BA = I_n$?

Définition 9.9 – Trace d'un endomorphisme

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Toutes les matrices $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi)$ représentant φ relativement à une base $\mathscr{B}$ de E ont la même trace. On appelle ce nombre **trace** de φ, on le note $\mathrm{Tr}(\varphi)$.

Exercice 9.21.
Déterminer la trace de l'endomorphisme $(x,y) \mapsto (2x-y, -3x-2y)$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9.22 – Trace d'un projecteur.
Montrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Preuves et corrections et tutti quanti

Une correction de l'exercice 9.1 *énoncé*

Soit $A \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$.

(i) D'une part, si A est diagonale, alors $A^\top = A$, donc $A \times A^\top = A^\top \times A = A^2$;

(ii) Supposons que $A \times A^\top = A^\top \times A$, et montrons que A est diagonale, autrement dit que $(A)_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$. Comme A est déjà triangulaire supérieure, on sait que $(A)_{i,j} = 0$ pour $j < i$, il ne reste plus qu'à prouver que $(A)_{i,j} = 0$ dès que $i < j$.

- On a supposé que $A \times A^\top = A^\top \times A$, donc en particulier, $(A \times A^\top)_{1,1} = (A^\top \times A)_{1,1}$. Or

$$\begin{aligned}(A \times A^\top)_{1,1} &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{1,k} (A^\top)_{k,1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{1,k}^2 \ \textit{(par définition de } A^\top\textit{)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(A^\top \times A)_{1,1} &= \sum_{k=1}^{n} (A^\top)_{1,k} (A)_{k,1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{k,1}^2 \ \textit{(par définition de } A^\top\textit{)} \\ &= (A)_{1,1}^2 \ \textit{(car } A \textit{ est triangulaire supérieure)}\end{aligned}$$

Ainsi $(A \times A^\top)_{1,1} = (A^\top \times A)_{1,1}$ donne

$$\sum_{k=1}^{n} (A)_{1,k}^2 = (A)_{1,1}^2$$

soit

$$\sum_{k=2}^{n} (A)_{1,k}^2 = 0.$$

Enfin, comme les coefficients sont des réels, on a ici une somme nulle de réels positifs, donc tous ces réels sont nuls, ce qui donne

$$(A)_{1,2} = \ldots = (A)_{1,n} = 0$$

donc la première ligne de A est nulle à droite de la diagonale.

- Supposons qu'au rang $p \in [\![2,n]\!]$, tous les termes de A hors de la diagonale sont nuls sur les lignes de 1 à $p-1$, et montrons qu'alors les termes de la p^e ligne sont nuls à droite de la diagonale.

  Comme dans l'initialisation, on utilise $(A \times A^\top)_{p,p} = (A^\top \times A)_{p,p}$, qui donne finalement, sachant que A est triangulaire supérieure, et grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=p+1}^{n} (A)_{p,k}^2 = 0.$$

  On en déduit la conclusion voulue.

Une correction de l'exercice 9.2 *énoncé*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Première méthode : si pour tout $X \in \mathbb{K}^p$, $AX = 0$, alors l'application linéaire représentée par A dans la base canonique est nulle, or seule la matrice nulle représente l'application nulle, dans la base canonique comme dans n'importe quelle base, donc $A = 0_{n,p}$.
- Deuxième méthode : si pour tout $X \in \mathbb{K}^p$, $AX = 0$, alors en particulier pour pour les vecteurs $E_i = \left(\delta_{k,i}\right)_{k\in[\![1\,;\,p]\!]}$ de la base canonique de $\mathbb{K}^p$, $A \times E_i = 0$. Or $A \times E_i$ est la i^e colonne de A.

  Donc toutes les colonnes de A sont nulles, ce qui prouve que $A = 0_{n,p}$.

Une correction de l'exercice 9.3 *énoncé*

(1) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, alors $(A)_{i,j} = (B)_{i,j} = 0$ pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

Par conséquent, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
(A \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}(B)_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{j} (A)_{i,k}(B)_{k,j} \ \textit{(car B est triangulaire supérieure)} \\
&= \sum_{k=i}^{j} (A)_{i,k}(B)_{k,j} \ \textit{(car A est triangulaire supérieure)} \\
&= 0 \ \textit{(dès que } j < i\textit{)}
\end{aligned}$$

donc $A \times B$ est encore dans $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$.

On remarque de plus que pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$,

$$(\mathrm{A}\times\mathrm{B})_{i,i} = \sum_{k=i}^{i}(\mathrm{A})_{i,k}(\mathrm{B})_{k,i} = (\mathrm{A})_{i,i}(\mathrm{B})_{i,i}$$

donc les diagonales se multiplient terme à terme.

(2) Comme les combinaisons linéaires de matrices se font terme à terme, on en déduit que si $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(d_1,\ldots,d_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathrm{D})$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\mathrm{P}(d_1),\ldots,\mathrm{P}(d_n))$.
Donc P est un polynôme annulateur de D si, et seulement si, $\mathrm{P}(d_1) = \ldots = \mathrm{P}(d_n) = 0$, ce pourquoi il suffit de prendre

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X}-d_1)\cdots(\mathrm{X}-d_n).$$

Une correction de l'exercice 9.4

énoncé

(1) $(\mathrm{M}-\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

et $\mathrm{M}+\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}) = (\mathrm{M}-\mathrm{I}_3)^2(\mathrm{M}+\mathrm{I}_3) = 0_3.$$

(2) Le reste $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ de la division euclidienne de X^n par P vérifie

$$\begin{cases} \mathrm{X}^n = \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{Q}(\mathrm{X}) + \mathrm{R}(\mathrm{X}) & (1) \\ \deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{P}) = 3 & (2) \end{cases}$$

de (2) on déduit qu'il existe trois réels a, b, c qui vérifient

$$\mathrm{R}(\mathrm{X}) = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c.$$

(1) donne alors

$$(3) : \mathrm{X}^n = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)\mathrm{Q}(\mathrm{X}) + (a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c).$$

On va à présent utiliser le fait que le polynôme $\mathrm{B}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)\mathrm{Q}(\mathrm{X})$ *admet* 1 *comme racine double (donc* $\mathrm{B}(1) = \mathrm{B}'(1) = 0$*) et* -1 *comme racine (*$\mathrm{B}(-1) = 0$*).*

- En remplaçant X par 1, (3) donne $1^n = \underbrace{\mathrm{B}(1)}_{=0} \times \mathrm{Q}(1) + (a+b+c)$, c'est-à-dire $\underline{a+b+c=1}$.
- En -1, (3) donne
$$(-1)^n = \underbrace{\mathrm{B}(-1)}_{=0} \times \mathrm{Q}(-1) + (a(-1)^2 + b(-1) + c),$$
c'est-à-dire $\underline{a-b+c=(-1)^n}$.
- Si on dérive (3), on obtient
$$n\mathrm{X}^{n-1} = \mathrm{B}'(\mathrm{X})\mathrm{Q}(\mathrm{X}) + \mathrm{B}(\mathrm{X})\mathrm{Q}'(\mathrm{X}) + (2a\mathrm{X}+b)$$
qui donne en 1
$$n = \underbrace{\mathrm{B}'(1)}_{=0}\mathrm{Q}(1) + \underbrace{\mathrm{B}(1)}_{=0}\mathrm{Q}'(1) + (2a+b)$$
soit $\underline{2a+b=n}$.

Le triplet (a,b,c) est donc solution du système
$$\begin{cases} a+b+c & = & 1 \\ a-b+c & = & (-1)^n \\ 2a+b & = & n \end{cases}$$
On applique à ce système les opérations élémentaires sur les lignes
$$\begin{aligned} &\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1, \\ &\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1, \\ &\mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2, \\ &\mathrm{L}_3 \leftarrow -\frac{1}{2}\mathrm{L}_3, \\ &\mathrm{L}_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\mathrm{L}_2, \\ &\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \end{aligned}$$
on obtient $\begin{cases} a & = & \frac{2n-1+(-1)^n}{4} \\ b & = & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ c & = & \frac{-2n+3+(-1)^n}{4} \end{cases}$ dont on déduit le reste
$$\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \left(\frac{2n-1+(-1)^n}{4}\right)\mathrm{X}^2 + \left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\mathrm{X} + \left(\frac{-2n+3+(-1)^n}{4}\right).$$

(3) En M, l'égalité $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$ donne $M^n = P(M)Q(M) + R(M)$.
Sachant que $P(M) = 0_3$, on en déduit que $M^n = R(M)$, c'est-à-dire
Remarque : si, audacieusement, il nous vient à l'idée de remplacer n par -1, on obtient

$$M^{-1} = \left(\frac{-2-1+(-1)}{4}\right)M^2 + \left(\frac{1-(-1)}{2}\right)M + \left(\frac{2+3+(-1)}{4}\right)I_3 = -M^2 + M + I_3,$$

qui est l'inverse de M

Une correction de l'exercice 9.5

énoncé

- Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^{p+1} = 0_n$, et grâce à l'identité géométrique, comme $I_nB = BI_n = B$,

$$(I_n - B) \times \sum_{k=0}^{p} B^k = \sum_{k=0}^{p} B^k \times (I_n - B) = I_n^{p+1} - B^{p+1} = I_n,$$

donc $I_n - B$ est inversible (d'inverse $\sum\limits_{k=0}^{p} B^k$).

- Puis on écrit $A + B$ sous la forme

$$A + B = A(I_n + A^{-1}B) = A\left(I_n - (-A^{-1}B)\right),$$

et on va établir que $(-A^{-1}B)$ est nilpotente pour se ramener au résultat précédent.

  - Tout d'abord, A^{-1} et B commutent entre elles, car $B = A^{-1}AB = A^{-1}BA$, donc en multipliant par A^{-1} à droite, on obtient $BA^{-1} = A^{-1}B$.
  - Ainsi

$$\left(-A^{-1}B\right)^p = (-1)^p \left(A^{-1}\right)^p B^p = 0_n,$$

donc $\left(-A^{-1}B\right)$ est nilpotente.

On en déduit grâce au résultat précédent que $I_n + A^{-1}B$ est inversible, donc, un produit de matrices inversibles restant inversible, que $A(I_n + A^{-1}B)$ l'est aussi, c'est-à-dire que $A + B$ est inversible, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 9.6 *énoncé*

On sait que

$$P(M) = (M - I_3)^2(M + I_3) = 0_3.$$

Or $P(M) = M^3 - M^2 - M + I_3$, ainsi

$$P(M) = 0_3 \Leftrightarrow M^3 - M^2 - M + I_3 = 0_3 \Leftrightarrow M(-M^2 + M + I_3) = I_3,$$

ce qui prouve que M est inversible d'inverse $M^{-1} = -M^2 + M + I_3$.

Une preuve de la proposition 9.6 *énoncé*

(1) Supposons que le système $AX = B$ admet une unique solution que l'on note X_0, et montrons que le système homogène $AX = 0$ a pour unique solution la solution nulle.
Soit X_1 une solution du système homogène $AX = 0$, alors $A(X_0 + X_1) = AX_0 + AX_1 = B + 0 = B$, donc $X_0 + X_1$ est aussi solution du système $AX = B$. Par unicité, on en déduit que $X_0 + X_1 = X_0$, donc que $X_1 = 0$.

(2) Supposons que le système homogène $AX = 0$ a pour unique solution la solution nulle. Si $X \in \operatorname{Ker}(A)$, alors $AX = 0$, et donc par hypothèse $X = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$, et par conséquent A est inversible.

(3) Si A est inversible, alors $AX = B$ équivaut à $X = A^{-1}B$, qui est alors l'unique solution du système $AX = B$.

Une preuve de la proposition 9.7 *énoncé*

La matrice $\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{Mat}}(\mathscr{B}')$ est en fait $\underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}}{\operatorname{Mat}}(\mathrm{id}_E)$, tandis que $\underset{\mathscr{B}'}{\operatorname{Mat}}(\mathscr{B}) = \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\operatorname{Mat}}(\mathrm{id}_E)$. Ainsi par la proposition 9.1 :

$$\begin{aligned}
\underset{\mathscr{B}'}{\operatorname{Mat}}(\mathscr{B}) \times \underset{\mathscr{B}}{\operatorname{Mat}}(\mathscr{B}') &= \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\operatorname{Mat}}(\mathrm{id}_E) \times \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}}{\operatorname{Mat}}(\mathrm{id}_E) \\
&= \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}{\operatorname{Mat}}(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E) = \underset{\mathscr{B}'}{\operatorname{Mat}}(\mathrm{id}_E) \\
&= I_n.
\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 9.8 *énoncé*

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
E_{\mathscr{B}'} \arrow[r, "u" description, "\mathrm{M}' = \underset{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(u) = \mathrm{QMP}^{-1}"] & F_{\mathscr{C}'} & \\
E_{\mathscr{B}} \arrow[u, "\mathrm{id}_E" description, "\mathrm{P} = \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B})"] \arrow[r, "u" description, "\mathrm{M} = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u)"] \arrow[rr, bend right, "v\circ u" description, "\underset{\mathscr{B},\mathscr{D}}{\mathrm{Mat}}(v\circ u) = \mathrm{N}\times\mathrm{M}"'] & F_{\mathscr{C}} \arrow[u, "\mathrm{id}_F" description, "\mathrm{Q} = \underset{\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C})"'] \arrow[r, "v" description, "\mathrm{N} = \underset{\mathscr{C},\mathscr{D}}{\mathrm{Mat}}(v)"] & G_{\mathscr{D}}
\end{tikzcd}$$

(1) Pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned}
\underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(x) &= \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_\mathrm{E}(x)) \\
&= \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_\mathrm{E}) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) \quad \textit{(par le premier point de la proposition 9.1)} \\
&= \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x).
\end{aligned}$$

(2) Pour tout $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$,

$$\begin{aligned}
\underset{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(u) &= \underset{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_\mathrm{F} \circ u \circ \mathrm{id}_\mathrm{E}) \\
&= \underset{\mathscr{C},\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_\mathrm{F}) \times \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) \times \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_\mathrm{E}) \quad \textit{(par le second point de la proposition 9.1)} \\
&= \underset{\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C}) \times \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}').
\end{aligned}$$

(3) Pour tout endomorphisme u de E, en adaptant le résultat ci-dessus,

$$\underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(u) = \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(u) = \underset{\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}').$$

Une correction de l'exercice 9.7 *énoncé*

(1) ➟ Si M est de rang 1, alors la famille de ses vecteurs colonnes engendre un sous-espace

vectoriel de dimension 1, c'est-à-dire une droite vectorielle Vect(C) où $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ est une matrice-colonne non nulle.
Ainsi pour chacune des colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de M, il existe un réel ℓ_j qui vérifie $C_j = \ell_j C$. On obtient ainsi

$$M = \left(\ell_j c_i\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

soit, en posant $L = \begin{pmatrix} \ell_1 \cdots \cdot \ell_n \end{pmatrix}$ qui est une matrice-ligne, non nulle car sinon M serait nulle, $M = CL$.

- Réciproquement, si $M = CL$, où C est une colonne non nulle, et $L = (\ell_1 \ldots, \ell_n)$ une ligne non nulle, alors $M = CL$ est la matrice dont les colonnes sont $\ell_1 C, \ell_2 C, \ldots, \ell_n C$.
Toutes les colonnes de M sont donc colinéaires *(ce qui veut dire « sont dans la même ligne, la même droite »)*, donc $\mathrm{rg}(M) \leqslant 1$.
Mais d'autre part C n'est pas nulle, et au moins un des ℓ_j est non nul, donc au moins une des colonnes de M est non nulle, donc $\mathrm{rg}(M) \geqslant 1$.
Par conséquent, $\mathrm{rg}(M) = 1$.

(2) (a) On reprend le résultat de la question précédente, alors $A = CL = \left(\lambda_j c_i\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. En particulier $LC = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i\right) \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$, et $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \in \mathbb{K}$, donc en confondant les scalaires et les matrices de $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$, $LC = \mathrm{tr}(A)$.
Ainsi $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = \mathrm{tr}(A)CL = \mathrm{tr}(A)A$.

(b) On en déduit par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = (\mathrm{tr}(A))^{k-1}A$, puis par la formule du binôme, applicable ici car $I_n A = A I_n = A$,

$$\begin{aligned}(I_n + A)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} I_n^{k-i} A^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i = I_n + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (\mathrm{tr}A)^{i-1} A.\end{aligned}$$

Ainsi :

- si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors A^k est nulle dès que $k = 2$, et

$$(I_n + A)^k = I_n + kA \ ;$$

- si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$,

$$\begin{aligned}(I_n + A)^k &= I_n + \frac{1}{\mathrm{tr}(A)} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\mathrm{tr}A)^k - 1 \right) A \\ &= I_n + \frac{1}{\mathrm{tr}(A)} \left((1 + \mathrm{tr}(A))^k - 1 \right) A.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 9.8 *énoncé*

(1) Tout d'abord, la matrice J_r est échelonnée donc son rang saute aux yeux : il est égal à r, puis par conservation du rang, toute matrice équivalente à J_r reste de rang r.

(2) Réciproquement, supposons qu'une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r.
Notons u son application linéaire canoniquement associée, F un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans $\mathbb{K}^p$.

- Par le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = p - r$, et par caractéristique d'un supplémentaire, $\dim(F) = r$.
  Soit $\mathscr{A} = (e_1, \dots, e_r)$ une base de F, alors $u(\mathscr{A}) = (u(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ car
  - $\mathrm{card}(u(\mathscr{A})) = r = \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$,
  - si $\sum_{k=1}^{r} \lambda_i u(e_i) = 0$, comme

  $$\sum_{k=1}^{r} \lambda_i u(e_i) = 0 = u\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_i e_i\right) \quad \textit{(par linéarité de u)}$$

  on en déduit que $\sum_{k=1}^{r} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(u)$.

  Or $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est une base de F, donc $\sum_{k=1}^{r} \lambda_i e_i \in F$.

  Par conséquent $\sum_{k=1}^{r} \lambda_i e_i \in F \cap \mathrm{Ker}(u)$, or F et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires, donc $\sum_{k=1}^{r} \lambda_i e_i = 0$.
  Enfin comme $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est une base de F, donc une famille libre, on en déduit que les λ_i sont nuls, donc que $(u(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est libre.

- Notons finalement, $\mathscr{B} = \left(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p\right)$ une base de $\mathbb{K}^p$ adaptée à $\mathbb{K}^p = F \oplus \mathrm{Ker}(u)$, et $\mathscr{C} = \left(u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_n\right)$ une base de $\mathbb{K}^n$ adaptée à $\mathrm{Im}(u)$, alors

  $$\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = J_r,$$

  ce qui donne le résultat voulu avec la formule de changement de bases.

Une preuve de la proposition 9.10 *énoncé*

Il suffit d'appliquer le résultat de l'exercice ci-dessus, ainsi si $\mathrm{rg}(A) = r$, alors

$$A^\top = PJ_rQ^\top = Q^\top {J_r}^\top P^\top,$$

et ${J_r}^\top$ est la matrice canonique de rang r de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, et $Q^\top$ et $P^\top$ sont inversibles donc $\mathrm{rg}(A^\top) = r = \mathrm{rg}(A)$.

Une correction de l'exercice 9.9 *énoncé*

On montre par récurrence que ce déterminant, que l'on note D_n, vaut $D_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Pour la relation de récurrence, on utilise la linéarité par rapport à la dernière colonne, qui donne :

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix} \\
&= D_{n-1} + y_n \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1 \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & \cdots & x_n \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

puis avec les opérations $C_i \leftarrow C_i - y_i C_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$,

$$D_n = D_{n-1} + y_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & x_n \end{vmatrix} = D_{n-1} + x_n y_n.$$

Et je vous laisse détailler la récurrence.

Une correction de l'exercice 9.10 *énoncé*

Méthode 9.4 – Pour calculer le déterminant d'une matrice :

dans le cas classique où la somme S des termes des lignes est la même pour chaque ligne,

- *on additionne toutes les autres colonnes à la première avec* $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \sum_{j=2}^{n} \mathrm{C}_j$*, ce qui remplace la première colonne par une colonne dont tous les termes valent* S*,*
- *on met* S *en facteur, ce qui donne une première colonne dont tous les termes valent* 1*,*
- *on utilise cette première colonne sur les autres pour annuler un maximum de termes.*

→ On additionne toutes les autres colonnes de notre matrice à la première, ce qui remplace la première colonne par une colonne dont tous les termes valent $a+(n-1)b$,

→ on met $a+(n-1)b$ en facteur, ce qui donne une première colonne dont tous les termes valent 1,

→ on effectue $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j - b\mathrm{C}_1$, qui donne une matrice triangulaire inférieure dont un terme diagonal vaut $a+(n-1)b$ et les autres valent $a-b$, dont le déterminant est le produit des termes diagonaux $(a+(n-1)b)\times(a-b)^{n-1}$.

Comme les opérations élémentaires effectuées conservent le déterminant, on peut conclure que notre matrice de départ a pour déterminant

$$(a+(n-1)b)\times(a-b)^{n-1}.$$

Une correction de l'exercice 9.11 *énoncé*

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on développe Δ_{n+2} par rapport à la première ligne :

$$\Delta_{n+2} = (a+b) \times \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$- 1 \times \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

(on développe le second déterminant par rapport à sa première ligne)

$$= (a+b) \times \Delta_{n+1} - 1 \times ab \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)\Delta_{n+1} - ab\Delta_n.$$

(2) Ainsi la suite de terme général Δ_n est récurrente linéaire d'ordre 2, son équation caractéristique $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ a pour racines évidentes a et b, donc

- si $a \neq b$, il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n = \lambda a^n + \mu b^n.$$

Enfin grâce à $\Delta_1 = a+b$ et $\Delta_2 = (a+b)^2 - ab$, on obtient si on applique clairement le pivot de Gauss sur un système 2x2 d'inconnues λ et μ, que $\lambda = \frac{a}{a-b}$ et $\mu = \frac{b}{b-a}$, donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

- si $a = b$, il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n = (\lambda n + \mu)a^n.$$

Enfin grâce à $\Delta_1 = 2a$ et $\Delta_2 = 3a^2$, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n = (n+1)a^n.$$

Une preuve de la proposition 9.15 *énoncé*

On sait que $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de F, donc le sous-espace vectoriel F est stable par u, si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $u(e_i) \in \mathrm{F}$, autrement dit $u(e_i)$ est combinaison linéaire de $(e_1,\dots,e_p)$ et a pour coordonnée 0 sur $(e_{p+1},\dots,e_n)$, ce qui donne des 0 sur les dernières lignes des p premières colonnes de la matrice $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$, qui est alors de la forme proposée.

Une correction de l'exercice 9.12 *énoncé*

Je vous laisse vous convaincre que $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ et $u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$ si, et seulement si, dans une base de E adaptée à la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, la matrice de u est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{B} & 0 \end{array}\right).$$

Une correction de l'exercice 9.13 *énoncé*

Montrons par récurrence sur n que « toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à termes diagonaux nuls donne la matrice nulle quand on l'élève à la puissance n ».

- Pour $n = 2$,

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_2.$$

- Supposons que la propriété est vraie au rang $n-1$ (pour $n \geqslant 2$), et montrons qu'elle est vraie au rang n.

  Prenons une matrice $\mathrm{T}_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à termes diagonaux nuls, donc de la forme

$$\mathrm{T}_n = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{L} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{T}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right),$$

  où $\mathrm{L} \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, et surtout T_{n-1} est dans $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, triangulaire supérieure à termes diagonaux nuls.

  Alors par des produits par blocs successifs, on montre que

$$\mathrm{T}_n^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{L}\mathrm{T}_{n-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{T}_{n-1}^2 \\ 0 & \end{array}\right), \quad \mathrm{T}_n^3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{L}\mathrm{T}_{n-1}^2 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{T}_{n-1}^3 \\ 0 & \end{array}\right),$$

puis (encore par récurrence)

$$\mathrm{T}_n^n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{LT}_{n-1}^{n-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{T}_{n-1}^n \\ 0 & \end{array}\right).$$

Ainsi grâce à l'hypothèse de récurrence $\mathrm{T}_{n-1}^{n-1} = 0_{n-1}$, on obtient bien $\mathrm{T}_n^n = 0_n$.

Une correction de l'exercice 9.14 *énoncé*

Il suffit d'utiliser l'exemple 9.2.

Une preuve de la proposition 9.18 *énoncé*

- On nous donne chaque L_i sous forme factorisée, où l'on constate directement que L_k a pour racines les a_j pour tout entier j pris entre 0 et n, distinct de i.
  En revanche,
  $$\mathrm{L}_i(a_i) = \prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = \prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} 1 = 1^n = 1.$$
  Donc pour tout $(i,j) \in [\![0\ ;\ n]\!]^2$, $\mathrm{L}_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
- Chaque polynôme L_k s'obtient en multipliant par un réel non-nul le produit de n polynômes de la forme $(\mathrm{X} - a_i)$, donc il est de degré n, et appartient à $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
  La famille $(\mathrm{L}_0,\ldots,\mathrm{L}_n)$ est une famille de cardinal $n+1$, dont tous les polynômes sont dans $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, et $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est de dimension $n+1$. Donc il suffit de prouver que cette famille est libre pour conclure que c'est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$:

  prenons $n+1$ scalaires $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$ qui vérifient
  $$\lambda_0\mathrm{L}_0(\mathrm{X}) + \cdots + \lambda_n\mathrm{L}_n(\mathrm{X}) = \theta \ \ \textit{(le polynôme nul)}$$
  Alors pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, en remplaçant X par a_i, on obtient
  $$\lambda_0 \underbrace{\mathrm{L}_0(a_i)}_{=0} + \cdots + \lambda_{i-1} \underbrace{\mathrm{L}_{i-1}(a_i)}_{=0} + \lambda_i \underbrace{\mathrm{L}_i(a_i)}_{=1} + \lambda_{i+1} \underbrace{\mathrm{L}_{i+1}(a_i)}_{=0} \cdots + \lambda_n \underbrace{\mathrm{L}_n(a_i)}_{=0} = 0,$$
  d'où $\lambda_i = 0$, ce qui achève de prouver que la famille $(\mathrm{L}_0,\ldots,\mathrm{L}_n)$ est libre.

  On peut donc conclure que $(\mathrm{L}_0,\ldots,\mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
- Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, le résultat ci-dessus nous assure l'existence et l'unicité des coordonnées $(c_0,\ldots,c_n)$ de P dans $\mathscr{L}$ telles que $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} c_k\mathrm{L}_k$.

Mais de la même manière que dans la question précédente, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathrm{P}(a_i) = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathrm{L}_k(a_i) = c_i.$$

Donc les coordonnées demandées sont $\mathrm{P}(a_0), \ldots, \mathrm{P}(a_n)$.

Une correction de l'exercice 9.15 *énoncé*

Les polynômes de Lagrange définis sur les réels $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$ sont les

$$\mathrm{L}_k = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{\mathrm{X} - i}{k - i}.$$

Ils forment d'après la proposition ci-dessus une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, dans laquelle P s'écrit

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(k)\mathrm{L}_k = \sum_{k=0}^{n} t^k \mathrm{L}_k \ \textit{(par hypothèse)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathrm{P}(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} t^k \mathrm{L}_k(n+1) = \sum_{k=0}^{n} t^k \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{n+1-i}{k-i} \\
&= \sum_{k=0}^{n} t^k \frac{(n+1) \times \cdots \times (n-k+2)}{k(k-1) \cdots \times 1} \times \frac{(n-k) \cdots 1}{(-1)(-2) \cdots \times (-(n-k))} \\
&= \sum_{k=0}^{n} t^k \frac{(n+1)! \times (n-k)!}{(n-k+1)! \times k! \times (-1)^{n-k}(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)! \times k!} \left(\frac{1}{-1}\right)^{n-k} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k}\, t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k}\, t^k - (-1)^{-1} t^{n+1} \\
&= -\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{(n+1)-k}\, t^k + t^{n+1} \\
&= -(t-1)^{n+1} + t^{n+1} = \boxed{t^{n+1} - (t-1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 9.19 *énoncé*

Première méthode : on effectue les opérations $C_j \leftarrow C_j - a_1 C_{j-1}$, mais pour j qui décroît de n à 2. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
V_n(a_1,\dots,a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1\, a_2 & \dots & a_2^{n-2} - a_1\, a_2^{n-3} & a_2^{n-1} - a_1\, a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1\, a_n & \dots & a_n^{n-2} - a_1\, a_n^{n-3} & a_n^{n-1} - a_1\, a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & (a_2 - a_1)a_2 & \dots & (a_2 - a_1)\, a_2^{n-3} & (a_2 - a_1)\, a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n - a_1 & (a_n - a_1)a_n & \dots & (a_n - a_1)\, a_n^{n-3} & (a_n - a_1)\, a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&\quad \textit{(en développant suivant la première ligne)} \\
&= (a_2 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-3} & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-3} & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&\quad \textit{(en factorisant chaque ligne } L_i \textit{ par } a_i - a_1\textit{)} \\
&= (a_2 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \times V_{n-1}(a_2,\dots,a_n).
\end{aligned}$$

On finit alors par récurrence :

- On vérifie aisément que pour tout $a_1 \in \mathbb{K}$,

$$V_1(a_1) = |1| = 1.$$

- Soit $n \geqslant 2$, supposons que

$$\forall (\square_1,\dots,\square_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}, \quad V_{n-1}(\square_1,\dots,\square_{n-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (\square_j - \square_i).$$

  Alors au rang suivant, pour tout $(a_1,\dots,a_{n-1},a_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned}
V_n(a_1,a_2,\dots,a_n) &= (a_2 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \times V_{n-1}(a_2,\dots,a_n) && \textit{(d'après la relation établie au début)} \\
&= (a_2 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \times \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) && \textit{(par l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Deuxième méthode :

- Si les a_i ne sont pas deux à deux distincts alors $V_n(a_1,\dots,a_n)$ est nul car au moins deux lignes seront égales.
- On suppose alors que les a_i sont 2 à 2 distincts, et on pose pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = V_{n+1}(a_1,\dots,a_n,x)$.
  En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient $P(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n, et son coefficient dominant est le coefficient de x^n, à savoir
  $$(-1)^{n+1+n+1}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = V_n(a_1,\dots,a_n).$$
  Mais comme $P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n) = 0$, car ce sont des déterminants dont deux lignes sont égales, on en déduit que les racines de P sont $a_1,\dots,a_n$, donc que la forme factorisée de $P(x)$ est $P(x) = V_n(a_1,\dots,a_n) \times (x-a_1)\cdots(x-a_n)$.
  Puis on constate que cette égalité reste vraie si les a_i ne sont pas deux à deux distincts, car elle donne alors $0 = 0$, ce qui est vrai.
- On finit alors par récurrence comme dans la méthode précédente.

Une correction de l'exercice 9.16 — *énoncé*

Avec les polynômes de Lagrange : soient $(x_i,y_i) \in \mathbb{R}^2$ pour $i \in [\![0 \,;\, n]\!]$, avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, qui définissent $n+1$ points du plan deux à deux distincts.

Il suffit de prendre les polynômes de Lagrange $L_0,\dots,L_n$ associés aux x_i. Alors le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k$$

est bien de degré au plus n, et vérifie $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![0 \,;\, n]\!]$.

Si un autre polynôme Q vérifie les mêmes conditions, alors le polynôme $P-Q$ est encore de degré $\deg(P-Q) \leqslant \max(\deg(P),\deg(Q)) \leqslant n$, mais admet pour racines tous les a_i, ce qui lui fait $n+1$ racines. Donc $P-Q$ est nul, autrement dit $P = Q$.

Avec la matrice de Vandermonde : on cherche $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i$.

Cela revient donc à chercher $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0\\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1\\ \vdots\\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2\dots\dots x_0^{n-1} & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2\dots\dots x_1^{n-1} & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2\dots\dots x_2^{n-1} & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2\dots\dots x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

système dont la matrice des cordonnées n'est autre que la matrice de Vandermonde de $(x_0,\dots,x_n)$.
On sait que le déterminant de cette matrice est $\mathrm{V}_{n+1}(x_0,\dots,x_n)$, qui est non nul car les x_i sont deux à deux distincts.
Par conséquent, la matrice du système est inversible, donc le système a une unique solution $(a_0,\dots,a_n)$, ce qui donne un unique polynôme dont la courbe passe par les $n+1$ points de départ.

Une preuve de la proposition 9.20 *énoncé*

En effet, si $\mathrm{P}\in\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})&=\det(\mathrm{P}^{-1})\times\det(\mathrm{A})\times\det(\mathrm{P})\\ &=\frac{1}{\det(\mathrm{P})}\times\det(\mathrm{A})\times\det(\mathrm{P})=\det(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 9.21 *énoncé*

D'une part si A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases, alors la formule de changement de base est de la forme $\mathrm{B}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, où P est la matrice de passage.
D'autre part, si A et B sont semblables, avec $\mathrm{B}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, il suffit de considérer la matrice inversible P comme une matrice de passage de la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^n$ à une autre base $\mathscr{B}$, alors par la formule de changement de base, B est la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Une correction de l'exercice 9.17

énoncé

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Pour montrer que N est semblable à A, il suffit de trouver une base $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice N.
Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{N}$ équivaut à

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - 2e_2 - 2e_3 \\ f(e_2) = 2e_2 \\ f(e_3) = 2e_3. \end{cases}$$

➟ Pour e_2 et e_3 cherchons $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifie $f(u) = 2u$.

$$\begin{aligned} f(u) = 2u &\Longleftrightarrow (f - 2\,\mathrm{id})(u) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow y = 2x \\ &\Longleftrightarrow u = (x,2x,z) = x(1,2,0) + z(0,0,1). \end{aligned}$$

On choisit donc $e_2 = (1,2,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

➟ Cherchons à présent $e_1 = (x,y,z)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) = 2e_1 - 2e_2 - 2e_3 &\Longleftrightarrow (f - 2\,\mathrm{id})(e_1) = -2e_2 - 2e_3 \\ &\Longleftrightarrow (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow y = 2x - 2, \end{aligned}$$

donc on choisit $e_1 = (0,-2,0)$.

➟ Enfin $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(e_1,e_2,e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, est de rang 3 (il suffit d'échanger C_1 et C_2), donc (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Cette matrice est la matrice P de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$, et, grâce à la formule de changement de bases, elle vérifie bien $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

Une correction de l'exercice 9.18 *énoncé*

L'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour matrice $2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(i,2j)$.

Une correction de l'exercice 9.19 *énoncé*

(1)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left(A^\top \times \overline{B}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left(A^\top \times \overline{B}\right)_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(A^\top\right)_{i,k} \times \left(\overline{B}\right)_{k,i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \times \overline{b_{k,i}} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \times \overline{b_{i,j}} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\overline{b_{i,j}}.
\end{aligned}$$

(2) En particulier,

$$\operatorname{Tr}\left(A^\top \times \overline{A}\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\overline{a}_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left|a_{i,j}\right|^2$$

donc $\operatorname{Tr}\left(A^\top \times \overline{A}\right) = 0$ si, et seulement si, $\left|a_{i,j}\right|^2 = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$, ce qui équivaut à $A = 0_n$.

Une correction de l'exercice 9.20 *énoncé*

Si un couple (A,B) de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est tel que $AB - BA = I_n$, alors $\operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr}(I_n) = n$, or

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(AB - BA) &= \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(BA) \quad \textit{(car la trace est linéaire)} \\
&= 0 \quad \textit{(par propriété de la trace)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $n = 0$.
Or on peut considérer que $n \geqslant 1$, vu que personne ne sait ce qu'est $\mathscr{M}_0(\mathbb{K})$, donc la réponse à la question initiale est « non ».

Une correction de l'exercice 9.21

énoncé

La matrice dans la base canonique $\mathscr{C} = \Big(i = (1,0), j = (0,1)\Big)$ de $\mathbb{R}^2$ de cet endomorphisme u est

$$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(i),u(j)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

et cette matrice a pour trace $2 + (-2) = 0$, donc la trace de l'endomorphisme est nulle.

Une correction de l'exercice 9.22

énoncé

Si $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est un projecteur, alors $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E, et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$. Ainsi dans une base de E adaptée à $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, la matrice de p est diagonale, avec sur sa diagonale autant de 1 que la dimension de $\mathrm{Im}(p)$, et le reste de 0.
On en déduit que sa trace est

$$\mathrm{Tr}(p) = \dim(\mathrm{Im}(p)) \times 1 + \dim(\mathrm{Ker}(p)) \times 0 = \mathrm{rg}(p).$$