Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et on confondra les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec leur représentation en colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Révisions de PCSI

1.1. Produit scalaire, norme associée à un produit scalaire

Définition 14.1 – Produit scalaire, espace préhilbertien, espace euclidien

- On appelle **produit scalaire** sur E une application $(x,y) \in \mathrm{E}^2 \mapsto \langle x \mid y\rangle \in \mathbb{R}$ *(parfois notée* $(x \mid y)$*, voire* $x \cdot y$*)*, possédant les propriétés suivantes :
  (1) **la bilinéarité :** $\forall (x, x_1, x_2, y, y_1, y_2) \in \mathrm{E}^6$, $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,
    - $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid y\rangle = \lambda_1 \langle x_1 \mid y\rangle + \lambda_2 \langle x_2 \mid y\rangle$ *(linéarité à gauche)* ;
    - $\langle x \mid \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \lambda_1 \langle x \mid y_1\rangle + \lambda_2 \langle x \mid y_2\rangle$ *(linéarité à gauche).*

  (2) **la symétrie :** $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2$, $\langle x \mid y\rangle = \langle y \mid x\rangle$;
  (3) **application positive :** $\forall x \in \mathrm{E}$, $\langle x \mid x\rangle \geqslant 0$;
  (4) **application « définie » :** $\forall x \in \mathrm{E}$, $\langle x \mid x\rangle = 0 \iff x = 0_{\mathrm{E}}$.
- E, muni de ce produit scalaire, est appelé **espace préhilbertien réel**.
- On appelle **espace euclidien** tout espace préhilbertien de **dimension finie**.

Remarque 14.1 La linéarité à droite associée à la symétrie entraînent la linéarité à gauche.

Proposition 14.1 – Produits scalaires canoniques :

(1) dans $\mathbb{R}^n$: $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{X}^\top \times \mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X})_i (\mathrm{Y})_i$;

(2) dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^\top \times \mathrm{B}\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\mathrm{A})_{ij} (\mathrm{B})_{ij}$;

(3) dans $\mathscr{C}([a\,;\,b], \mathbb{R})$: $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t$.

Exercice 14.1 – Produits scalaires chez les polynômes et les fonctions.
Montrer que les applications suivantes définissent un produit scalaire :

1. $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}^{(i)}(a) \mathrm{Q}^{(i)}(a)$, où $a \in \mathbb{R}$, dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$;
2. (pour des réels $a_0, \dots, a_n$ deux à deux distincts) $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_i) \mathrm{Q}(a_i)$, dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
3. $(f,g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t) g'(t) \mathrm{d}t$, dans $\mathscr{C}^1([0\,;\,1], \mathbb{R})$.

(mis à jour le 13 avril 2024)

Remarque 14.2 – Bien identifier le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$

➟ Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\boxed{X^\top \times Y = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \langle X \mid Y \rangle.}$

Le produit $X^\top \times Y$ est la forme matricielle du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

➟ Si $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), et si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\forall (i,j) \in [\![1 \ ; n]\!]^2,\ A \times E_j \text{ et } {E_i}^\top \times A \text{ sont la } j^e \text{ colonne et la } i^e \text{ ligne de } A,$$
$$\left\langle E_i \mid E_j \right\rangle = {E_i}^\top \times E_j = \delta_{i,j},$$
$$(A)_{i,j} = \left\langle E_i \mid AE_j \right\rangle = E_i^\top \times A \times E_j,$$
$$(A \times B)_{i,j} = \langle A^\top E_i \mid BE_j \rangle = \langle (A)_{i,\bullet} \mid (B)_{\bullet,j} \rangle = E_i^\top \times A \times B \times E_j.$$

Exercice 14.2. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^\top = -M$, alors $I_n + M$ est inversible.

Définition 14.2 – Norme associée à un produit scalaire

Dans un espace préhilbertien $(E, \langle . | . \rangle)$, l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ est la **norme associée** au produit scalaire.

Remarque 14.3 Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**,
et pour tout vecteur non nul $x \in E$, $\frac{1}{\|x\|}.x$ est le vecteur unitaire obtenu par **normalisation** du vecteur x.

Proposition 14.2 – Polarisation, Parallélogramme, Cauchy-Schwarz

Soient $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien, et $(x, y) \in E^2$,

(1). $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$

(2). $\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$
$= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ *(identité de polarisation)*,

(3). $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *(identité du parallèlogramme)*,

(4). $|\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*
avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Remarque 14.4 – applications usuelles de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

- Dans $\mathbb{R}^n$, $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$,
- dans $\mathscr{C}([a\,;\,b])$, $\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}\,t\right|^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}\,t\right)\left(\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}\,t\right)$.

Exercice 14.3 – Oral CCMP. Montrer que la somme des inverses de n réels strictement positifs de somme égale à 1 est supérieure ou égale à n^2.

1.2. Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales

Dans ce paragraphe, $(\mathrm{E}, \langle . \mid . \rangle)$ est un espace préhilbertien, et $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire.

Définition 14.3

- Deux vecteurs sont **orthogonaux**, on note $x \perp y$, lorsque $\langle x \mid y\rangle = 0$.
- L'orthogonal d'une partie A de E, noté $\mathrm{A}^\perp$, est la partie de E définie par
$$\mathrm{A}^\perp = \{x \in \mathrm{E} \mid \ \forall a \in \mathrm{A},\ \ \langle x | a\rangle = 0\}.$$
- Les parties A et B de E sont **orthogonales**, on note $\mathrm{A} \perp \mathrm{B}$, lorsque $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}^\perp$ ou $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}^\perp$, autrement dit : $\forall x \in \mathrm{A},\ \ \forall y \in \mathrm{B},\ \ \langle x \mid y\rangle = 0$.

Exemple 14.1. Dans l'espace usuel à trois dimensions, l'orthogonal d'une droite D est un plan, et toute droite de ce plan est orthogonale à D.

Exemple 14.2 – Hyperplans de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathrm{A} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, alors
$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\} = \{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathrm{X} \mid \mathrm{A}\rangle = 0\} = \{\mathrm{A}\}^\perp.$$

En particulier,
- dans $\mathbb{R}^2$, la droite d'équation $ax + by = 0$ est $\left\{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\right\}^\perp$,
- dans $\mathbb{R}^3$, le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est $\left\{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)\right\}^\perp$.

Proposition 14.3 – Sous-espace vectoriel orthogonal d'une partie

Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, alors $\mathrm{A}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, et $\mathrm{A} \subset \left(\mathrm{A}^\perp\right)^\perp$.

Remarques 14.5

- $E^{\perp} = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^{\perp} = E$;
- $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)^{\perp} = \{u_1, \ldots, u_n\}^{\perp}$, autrement dit :
$$\boxed{x \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle x | u_i \rangle = 0.}$$
- Pour tout $(a, b) \in E^2$, $a = b \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \langle a | x \rangle = \langle b | x \rangle$
$\Longleftrightarrow \forall e \in \mathscr{B},\ \langle a | e \rangle = \langle b | e \rangle$ *(pour une base $\mathscr{B}$ de E)*

Définition 14.4 – Familles orthogonales, orthonormées

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est

- une **famille orthogonale** lorsque ses éléments sont deux à deux orthogonaux : $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle x_i | x_j \rangle = 0$;
- une **famille orthonormée (ou orthonormale)** lorsque c'est une famille orthogonale de vecteurs unitaires : $\forall (i, j) \in I^2,\ \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij}$.

Exercice 14.4.
Montrer que chacune des suites de fonctions $(t \mapsto \cos(nt))_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $(t \mapsto \sin(nt))_{n \in \mathbb{N}^*}$, est orthonormée dans $\mathscr{C}^0([-\pi\ ;\ \pi])$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \mathrm{d}t$.

Proposition 14.4 – Théorème de Pythagore

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille orthogonale, alors $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

Proposition 14.5

Une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont non nuls (en particulier une famille orthonormale) est une famille libre.

Proposition 14.6 – Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Si $(x_i)_{i \in I}$, avec $I = [\![0, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}$, est une famille **libre** de vecteurs de E, alors **il existe** une famille **orthonormale** $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E telle que pour tout $p \in I$, $\mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_p) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_p)$.

Il suffit de prendre pour tout $p \geqslant 0$, $\varepsilon_p = \dfrac{1}{\left\| e_p \right\|} . e_p$ où $e_p = x_p - \sum\limits_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle\, \varepsilon_i$.

Remarque 14.6 On verra plus tard (voir la proposition 14.11) que :

- $\sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \, \varepsilon_i$ est le projeté orthogonal de x_p sur $\text{Vect}(x_0, \ldots, x_{p-1})$;
- $e_p = x_p - \sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \, \varepsilon_i$, est le projeté orthogonal de x_p sur $\left(\text{Vect}(x_0, \ldots, x_{p-1})\right)^{\perp}$.

Exercice 14.5 – Oral ENSAM (PSI).

.1. Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

.2. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$.

1.3. Bases orthonormées dans un espace euclidien

Proposition 14.7 – Existence de bases orthonormées

(1) Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormale.

(2) Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormale.

Remarque 14.7 la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est bien entendu une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique !
La base de Lagrange construite sur $(a_0, \ldots, a_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle P \mid Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.

Proposition 14.8 – Calculs dans une base orthonormée

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E.

(1) $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i$, autrement dit $\underset{\mathscr{B}}{\text{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x | e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x | e_n \rangle \end{pmatrix}$.

(2) Pour tous vecteurs x, y de E, en notant $X = \underset{\mathscr{B}}{\text{Mat}}(x)$ et $Y = \underset{\mathscr{B}}{\text{Mat}}(y)$,

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle \times \langle y | e_i \rangle = X^{\top} \times Y, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle^2 = X^{\top} \times X.$$

(3) Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\underset{\mathscr{B}}{\text{Mat}}(f) = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $m_{i,j} = \langle f(e_j) | e_i \rangle$.

Remarque 14.8 Une fois qu'on a choisi une base orthonormée, les coordonnées d'un vecteur sont ses produits scalaires avec chacun des vecteurs de la base, et tous les calculs sont canoniques comme dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 14.6 – Oral IMT. On suppose que la famille libre de vecteurs unitaires $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ d'un espace préhilbertien E vérifie la propriété

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E.

1.4. Supplémentaires orthogonaux, projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel

Proposition 14.9 – Sous-espaces orthogonaux et somme directe

Des sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux sont en somme directe.

Dans toute la fin de cette section, E désignera un espace préhilbertien, et $\boxed{V \text{ un sous-espace vectoriel de dimension finie de } E}$.

Proposition 14.10 – L'orthogonal d'un sous-espace de dimension finie est un supplémentaire

Le sous-espace vectoriel $V^\perp$ est le seul sous-espace de E à la fois orthogonal et supplémentaire à V.

Définition 14.5 – Sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal

On dit que $V^\perp$ est le **supplémentaire orthogonal** de V, et on a $\left(V^\perp\right)^\perp = V$.
Si de plus $\dim(E)$ **est finie,** $\dim\left(V^\perp\right) = \dim(E) - \dim(V)$.

Méthode 14.1 – Pour montrer que $F = V^\perp$:

on peut montrer que $F \perp V$ (ce qui entraîne alors que $F \subset V^\perp$ et que F et V sont en somme directe, et que $E = F + V$, ce qui, dans un espace de dimension finie à montrer que $\dim(F) + \dim(V) = \dim(E)$.

Remarques 14.9 – Rappels : projecteur, symétrie, réflexion

Si p est un projecteur de E, alors
- $p \circ p = p$,
- $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$,
- $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$,
- $2p - \mathrm{id}_E$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Si s est une symétrie de E, alors
- $s \circ s = \mathrm{id}_E$,
- $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$,
- $\frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$ est la projection sur $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Définition 14.6 – Projecteur orthogonal

On appelle **projecteur orthogonal** sur V, on le note p_V, le projecteur sur V parallèlement à $V^\perp$.

Remarque 14.10 – Rappel : ne pas oublier que $p_V + p_{V^\perp} = \mathrm{id}_E$, donc que

$$\text{pour tout } x \in E, \quad p_{V^\perp}(x) = x - p_V(x), \text{ et de même } p_V(x) = x - p_{V^\perp}(x).$$

Proposition 14.11 – Caractérisations du projeté orthogonal d'un vecteur

Pour tout vecteur $x \in E$,

$$y = p_V(x) \iff \begin{cases} y \in V \\ x - y \in V^\perp \end{cases} \iff \text{pour toute base orthonormée de V } (e_1, \dots, e_p),\quad y = \sum_{j=1}^{p} \langle x | e_j \rangle\, e_j.$$

Remarque 14.11 – Projection orthogonale sur une droite

Soient $a \in E \setminus \{0_E\}$, et $x \in E$. Le vecteur $\frac{1}{\|a\|}a$ forme une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(a)$, donc

$$p_{\mathrm{Vect}(a)}(x) = \left\langle x \mid \frac{1}{\|a\|}a \right\rangle \frac{1}{\|a\|}a = \frac{\langle x \mid a\rangle}{\langle a \mid a\rangle}\, a.$$

Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une *b.o.n* de E, et $X_a = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(a)$, alors $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(p_{\mathrm{Vect}(a)}) = \dfrac{1}{\|a\|^2} X_a \times X_a^\top$.

On remarque de plus que $\mathrm{id}_E = \sum_{i=1}^{n} p_{\mathrm{Vect}(e_i)}$, et que $I_n = \sum_{i=1}^{n} X_{e_i} \times X_{e_i}^\top$

Exercice 14.7. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(1, -1, 1)$.

Exercice 14.8 – Oral CCP - sans préparation.

.1. Montrer que $(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

.2. Calculer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathrm{Vect}(1,X)$.

Proposition 14.12 – Caractérisation d'un projecteur orthogonal

$u \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\begin{cases} u \circ u = u, \\ \mathrm{Im}(u) \perp \mathrm{Ker}(u). \end{cases}$

Exercice 14.9. Soit E un espace préhilbertien réel, et p un projecteur de E.
Montrer que p est un projecteur orthogonal, que $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$, si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Proposition 14.13 – Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Pour tout vecteur x de E, l'application définie sur V par $z \mapsto \|x - z\|$ possède un minimum atteint en l'unique vecteur $p_V(x)$.
On appelle **distance de x à V** ce nombre :

$$d(x, V) = \|x - p_V(x)\| = \inf_{z \in V} \|x - z\|.$$

Remarques 14.12 Toujours avec les mêmes hypothèses, pour tout $x \in E$,

$$d(x,V) = \|p_{V^\perp}(x)\|, \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x)\|^2 = d(x,V)^2 + \|p_V(x)\|^2.$$

Exercice 14.10 – Oral CCMP. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 \left(t^3 - at^2 + bt - c\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 14.11 – Oral CCINP (sans préparation).
On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par $\langle M \mid N \rangle = \mathrm{Tr}(M^\top \times N)$.
Soient $x \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x - 1 & 4 \\ -2 & \mathrm{sh}x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x + 1 & 3 \\ 6 & -\mathrm{sh}x \end{pmatrix}$.

.1. A-t-on $\langle A \mid B \rangle = 0$?

.2. Montrer que l'espace des matrices symétriques et celui des antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

.3. Déterminer la distance de A à l'espace des symétriques.

2. Orthogonalité des endomorphismes et des matrices

2.1. Isométries vectorielles (ou aussi automorphismes orthogonaux)

Dans toute la suite de ce chapitre, $(\mathrm{E}, \langle .|.\rangle)$ est un espace euclidien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), et $\|.\|$ est la norme euclidienne associée.

Définition 14.7 – Isométrie vectorielle

Un endomorphisme u de E est une **isométrie vectorielle** lorsqu'il conserve la norme, autrement dit lorsque : $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|u(x)\| = \|x\|$.
L'ensemble des isométries vectorielles de E est appelé **groupe orthogonal de** E, on le note $\mathscr{O}(\mathrm{E})$.

Proposition 14.14 – Une isométrie est bijective

Si u est une isométrie vectorielle, alors c'est un automorphisme de E, et sa réciproque est aussi une isométrie.
L'ensemble $\mathscr{O}(\mathrm{E})$ est stable par composition et passage à l'inverse.

Exercice 14.12. Dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P}|\mathrm{Q}\rangle = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}\,t$, montrer que l'endomorphisme $f : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \mapsto \mathrm{P}(1-\mathrm{X})$ est une isométrie.

Proposition 14.15 – Caractérisations d'une isométrie

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Les trois affirmations ci-dessous sont équivalentes :

(1) u est une isométrie vectorielle,

(2) u conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\langle u(x) \mid u(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$;

(3) l'image d'une base orthonormée par u est encore une base orthonormée.

Remarques 14.13

- En particulier, une isométrie conserve l'orthogonalité des vecteurs.
- Les projecteurs orthogonaux, ni les homothéties, hormis $\pm\mathrm{id}_\mathrm{E}$, ne sont pas des isométries vectorielles.

Exercice 14.13 – Spectre réel et sous-espaces propres des isométries.
Montrer que si $u \in \mathscr{O}(\mathrm{E})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{\pm 1\}$, et que $\mathrm{E}_1(u) \perp \mathrm{E}_{-1}(u)$.

Exemple 14.3. L'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$, est une isométrie pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est la matrice de la rotation d'angle θ.

Exercice 14.14 – Symétrie orthogonale, réflexion.
On dit qu'une symétrie $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est **orthogonale** lorsque $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \perp \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$, et qu'une symétrie orthogonale est une **réflexion** lorsque $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$ est une droite, appelée **axe** de la réflexion.

1. Montrer qu'une symétrie s de E est une isométrie vectorielle si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale.
2. Montrer que la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ est l'application $x \mapsto x - 2\dfrac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u$.
3. Si a et b sont deux vecteurs de E distincts et de même norme, montrer qu'il existe une unique réflexion de E qui échange a et b.

Proposition 14.16 – Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable

Si u est une isométrie vectorielle, et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $\mathrm{F}^\perp$ est aussi stable par u.
Ainsi, en notant $p = \dim(\mathrm{F})$ et $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$,

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0_{p,n-p} \\ \hline 0_{n-p,p} & \mathrm{B} \end{array}\right) \text{avec } \mathrm{A} \in Gl_p(\mathbb{R}),\ \ \mathrm{B} \in Gl_{n-p}(\mathbb{R}).$$

2.2. Matrices orthogonales

Pour ce paragraphe en particulier, bien noter que pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$, $||\mathrm{X}||^2 = \mathrm{X}^\top \mathrm{X}$, *et* $||\mathrm{MX}||^2 = \mathrm{X}^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{MX}$.

Définition 14.8 – Matrice orthogonale

Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** lorsque $\mathrm{M}^\top \times \mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.
On note $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, qui est appelé **groupe orthogonal d'ordre** n.

Exemple 14.4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Remarque 14.14
Si $M^\top \times M = I_n$, alors $M^\top$ et M sont inversibles, et inverses l'une de l'autre, donc $M \times M^\top = I_n$. Ainsi $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $M^\top \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Proposition 14.17 – Caractérisations d'une matrice orthogonale par ses lignes et colonnes

La matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale $\boxed{\text{si, et seulement si,}}$ les colonnes (*resp.* les lignes) de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 14.15 En particulier, toute matrice orthogonale peut être considérée comme la matrice de passage entre deux bases orthonormales : la base canonique et la base orthonormée de ses colonnes.

Proposition 14.18 – Caractérisation d'une isométrie par sa matrice dans une base orthonormée

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) u est une isométrie vectorielle ;

(2) dans toute base orthonormale, la matrice associée à u est une matrice orthogonale ;

(3) il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice associée à u est une matrice orthogonale.

Remarques 14.16

(1) Les matrices orthogonales sont la traduction matricielle des isométries vectorielles, qui sont d'ailleurs aussi appelées **automorphismes orthogonaux**.

(2) Attention ! la proposition ci-dessus n'est vraie que **dans une base orthonormale**. Par exemple, la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à $\text{Vect}((1,0))$ *(qui en passant a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique)* admet la matrice non orthogonale $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$dans la base $\big((1,0),(1,1)\big)$, qui n'est pas une base orthonormée.

(3) Symétrie orthogonale : si une matrice M est à la fois symétrique et orthogonale, alors $M^2 = I_n$ donc son endomorphisme canoniquement associé est une symétrie, et une isométrie par la proposition ci-dessus, donc d'après l'exercice 14.14 une symétrie orthogonale.

Proposition 14.19 – Caractérisation d'une matrice orthogonale comme matrice de passage entre bases orthonormées

Soient $\mathscr{C}$ une base orthonormée de E, et $\mathscr{B}$ une famille quelconque de n vecteurs de E.
Alors $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E $\boxed{\text{si, et seulement si}}$, la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{B}$ est orthogonale.

Proposition 14.20 – Déterminant d'une matrice orthogonale

Le déterminant des matrices orthogonales et des isométries vectorielles est égal à 1 ou -1.

Proposition 14.21 – Groupes orthogonal et spécial orthogonal

L'ensemble $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ainsi que l'ensemble noté $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de déterminant 1, sont stables par le produit, le passage à l'inverse, et la transposition.

On appelle $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ groupe **spécial** orthogonal d'ordre n.

Remarques 14.17 Les valeurs propres **réelles** d'une matrice orthogonale, comme d'une isométrie *(voir l'exercice 14.13)*, appartiennent à $\{-1,1\}$, et les deux sous-espaces propres E_1 et E_{-1} sont orthogonaux.

Définition 14.9 – Orientation d'un espace euclidien

Orienter un espace euclidien, c'est choisir l'une de ses bases orthonormales comme base de référence. Toutes les bases orthonormales de même orientation que celle-ci, c'est-à-dire de même déterminant, sont alors dites **orthonormales directes**, les autres sont dites **orthonormales rétrogrades (ou indirectes)**.

2.3. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Proposition 14.22 – Matrices des isométries vectorielles du plan réel

Les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sont de l'une des formes suivantes :

$$\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ où } \theta \in \mathbb{R}.$$

En particulier, $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $\mathrm{R}(\theta)$ ci-dessus, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition 14.23 – Propriétés des matrices spéciales orthogonales

$\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{R}(\theta) \times \mathrm{R}(\theta') = \mathrm{R}(\theta + \theta')$.
Ainsi la multiplication est commutative dans $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$.

Définition 14.10 – Rotations vectorielles planes

Soit $\mathscr{P}$ un plan euclidien orienté par le choix d'une base orthonormée.
Les isométries vectorielles de $\mathscr{P}$ de déterminant $+1$ sont appelées **rotations vectorielles planes**. Leur ensemble, noté $\mathscr{SO}(\mathscr{P})$, est appelé **groupe spécial orthogonal** de $\mathscr{P}$.

Proposition 14.24 – Angle d'une rotation

Pour toute rotation vectorielle plane r de $\mathscr{P}$, il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que la matrice de r dans toute base orthonormée directe de $\mathscr{P}$ est $\mathrm{R}(\theta)$.
Dans ce cas, pour tout vecteur non nul x de $\mathscr{P}$,

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x | r(x) \rangle}{\|x\|^2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\det_{\mathscr{C}}(x, r(x))}{\|x\|^2},$$ où $\mathscr{C}$ est une base orthonormée directe de $\mathscr{P}$.

Proposition 14.25 – Écriture complexe d'une rotation

Dans le plan complexe, $z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta} \times z$ est la rotation vectorielle d'angle θ.

Remarque 14.18 Les isométries vectorielles du plan qui ne sont pas des rotations ont pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée (i, j). Ce sont des réflexions, c'est-à-dire des symétries orthogonales par rapport à la droite dirigée par le vecteur $u = \cos(\theta/2)i + \sin(\theta/2)j$.

Exercice 14.15. Identifier les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles

On se place dans toute la suite dans un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle \quad | \quad \rangle)$.

> *Pour tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on note $\Phi_u : (x, y) \in \mathrm{E}^2 \mapsto \langle u(x) \mid y \rangle$. L'objectif de cette partie est de chercher à quelle condition sur u, l'application Φ_u définit un produit scalaire dans E.*

Exercice 14.16. Vérifier que Φ_u est bilinéaire si, et seulement si, u est linéaire.

3.1. Définitions et premières propriétés

Définition 14.11

$u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est dit **autoadjoint** lorsque : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \ \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle$.
On note $\mathscr{S}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Remarque 14.19 L'endomorphisme u est autoadjoint si, et seulement si, Φ_u est symétrique.

Exercices 14.17.

- Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son son produit scalaire canonique, montrer que $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^\top$ est un endomorphisme autoadjoint.
- Dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}\, t$, montrer que l'endomorphisme $f : \mathrm{P} \mapsto 2\mathrm{X}\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}''(\mathrm{X})$ est autoadjoint.
- Montrer que si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est autoadjoint alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Remarques 14.20 – Projecteurs et symétries

(1) Un projecteur de E est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il est un endomorphisme autoadjoint.
(La réciproque provient de l'exercice précédent, le sens direct vient de

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \ \langle p(x) \mid y \rangle &= \langle p(x) \mid p(y) + (y - p(y)) \rangle \\ &= \langle p(x) \mid p(y) \rangle + \langle \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)} \mid \underbrace{(y - p(y))}_{\in \mathrm{Ker}(p)} \rangle \\ &= \langle p(x) \mid p(y) \rangle.)\end{aligned}$$

(2) Une symétrie de E est une symétrie orthogonale si, et seulement si, elle est un endomorphisme autoadjoint.

Proposition 14.26 – Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint par sa matrice dans une base orthonormée

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) u est un endomorphisme autoadjoint ;

(2) dans toute base orthonormale, la matrice associée à u est une matrice symétrique ;

(3) il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice associée à u est une matrice symétrique.

Remarque 14.21 En particulier, l'endomorphisme canoniquement associé d'une matrice symétrique réelle est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$.

Les endomorphismes autoadjoints sont aussi appelés endomorphismes symétriques.

Exercice 14.18 – .
Montrer qu'un endomorphisme autoadjoint u dans un espace euclidien (*resp.* une matrice symétrique réelle M) n'a que des valeurs propres réelles, et qu'en particulier,

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}), \quad \forall \mathrm{X} \in \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}), \quad \lambda = \frac{\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X}}{\mathrm{X}^\top \mathrm{X}}.$$

Remarques 14.22 L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ isomorphe au sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques, donc $\dim(\mathscr{S}(\mathrm{E})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

3.2. Le théorème spectral : réduction des endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles

Proposition 14.27

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

Proposition 14.28 – Théorème spectral : ortho-diagonalisabilité des endomorphismes autoadjoints

Si u est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien E, alors u est ortho-diagonalisable, autrement dit E possède une base **orthonormée** formée de vecteurs propres de u.

Exercice 14.19 – (**). Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que,

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{\mathrm{Vect}(e_i)}, \text{ (rappelons que } \mathrm{id}_{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^{n} p_{\mathrm{Vect}(e_i)}) \text{ et } \quad \forall x \in \mathrm{E}, \ \Phi_u(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x \mid e_i \rangle^2.$$

Corollaire 14.29 – Théorème spectral : ortho-diagonalisabilité des matrices symétriques réelles

Si $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique réelle**, alors A est ortho-diagonalisable, autrement dit, il existe :

- une matrice **orthogonale** $\mathrm{P} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$,
- et une matrice diagonale $\mathrm{D} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$,

telles que $\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{P} \times \mathrm{D} \times \mathrm{P}^\top.}$

Remarques 14.23 – Autre décomposition d'une matrice symétrique réelle

- La matrice $\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, bien que symétrique !
- Si A est symétrique réelle, alors son endomorphisme canoniquement associé est autoadjoint, donc il existe une base orthonormée $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, et en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres respectives on peut écrire
$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{X}_i \times \mathrm{X}_i^\top.$$

3.3. Nouveaux produits scalaires dans un espace euclidien

Définition 14.12 – Endomorphisme autoadjoint positif et défini positif

Un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ est dit **positif** (*resp.* **défini positif**) lorsque :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \ \langle u(x) \mid x\rangle \geqslant 0 \quad (\textit{resp. } \forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\},\ \ \langle u(x) \mid x\rangle > 0).$$

On note $\mathscr{S}^{+}(\mathrm{E})$ (*resp.* $\mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$) l'ensemble des endomorphisme autoadjoints positifs (*resp.* définis positif) de E.

Remarque 14.24 – Autre définition

- $u \in \mathscr{S}^{+}(\mathrm{E})$ lorsque Φ_u est une forme bilinéaire symétrique positive sur E,
- $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$ lorsque Φ_u est un produit scalaire sur E.

Proposition 14.30 – Caractérisation spectrale des autoadjoints

Soit $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ un endomorphisme autoadjoint. Alors

- u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset [0\,;+\infty[$.
- u est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset]0\,;+\infty[$.

Exercice 14.20 – (**). Soit u un endomorphisme autoadjoint positif d'un espace vectoriel euclidien E.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme v autoadjoint positif tel que $u = v^2$.
2. Établir l'unicité de v en étudiant l'endomorphisme induit par v sur les sous-espaces propres de u.

Définition 14.13 – Matrice symétrique positive et définie positive

Une matrice symétrique $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **positive** (*resp.* **définie positive**) lorsque : $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n,\ \ \mathrm{X}^\top \mathrm{M}\mathrm{X} \geqslant 0 \quad (\textit{resp. } \forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ \ \mathrm{X}^\top \mathrm{M}\mathrm{X} > 0).$

On note $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ (*resp.* $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (*resp.* définies positives) réelles.

Exercice 14.21 – Majoration du déterminant sur $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (Oral CCinP).
Soient $S = (s_{i,j}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de S.

1. Justifier que les termes diagonaux de S sont positifs.
2. Montrer qu'il existe $P = (p_{i,j}) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P \times \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times P^{-1}$, et exprimer les $s_{j,j}$ en fonction des $p_{i,j}$ et des λ_i.
3. Montrer que pour toute fonction f convexe sur $[0 \,;\, +\infty[$, on a $\sum_{i=1}^{n} f(s_{i,i}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)$.
4. En déduire que $\det(S) \leqslant s_{1,1} \times \cdots \times s_{n,n}$.

Proposition 14.31 – Caractérisation spectrale des autoadjoints

Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors

- $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff M \in S_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(M) \subset [0 \,;\, +\infty[$.
- $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff M \in S_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(M) \subset \,]0 \,;\, +\infty[$.

Exercice 14.22. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(1) $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive ;

(2) il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$.

Exercice 14.23. Montrer que l'application

$$\Phi : X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2a^2 + \frac{4}{3}ab + \frac{5}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{7}{3}c^2$$

est la norme associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, que l'on explicitera.
Exprimer alors $\Phi(X)$ sous forme de somme de réels positifs.
(On pourra chercher la matrice M telle que $\Phi(X) = X^\top MX$.)

Preuves et solutions

Une correction de l'exercice 14.1 *énoncé*

.1. Remarquons que cette somme est faussement infinie car tout polynôme a ses dérivées nulles à partir d'un certain rang.

- La symétrie vient de la commutativité du produit des réels,
- la bilinéarité vient de la linéarité de la dérivation, puis de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication,
- et la positivité provient de ce qu'une somme de réels positifs est positive.
- Le caractère défini provient de ce que si $\sum_{i=0}^{+\infty}(\mathrm{P}^{(i)}(a))^2 = 0$, alors *(une somme de réels positifs étant nulle si, et seulement si, tous ces réels sont nuls)* $\mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \cdots = \mathrm{P}^{(\deg(\mathrm{P}))}(a) = 0$, donc a est racine de P d'ordre au moins $\deg(\mathrm{P})+1$, ce qui entraîne que $(\mathrm{X}-a)^{\deg(\mathrm{P})+1}$ divise P, ce qui n'est possible que si P est le polynôme nul.

> *On peut aussi utiliser la formule de Taylor pour les polynômes*
>
> $$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k.$$

.2.
- La symétrie vient de la commutativité du produit des réels,
- la bilinéarité vient des règles de calcul sur les fonctions *(en particulier de ce que $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$)*, puis de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication,
- et la positivité provient de ce qu'une somme de réels positifs est positive.
- Le caractère défini provient de ce que si $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}^2(a_i) = 0$, alors (une somme de réels positifs étant nulle si, et seulement si, tous ces réels sont nuls) $\mathrm{P}(a_0) = \cdots = \mathrm{P}(a_n) = 0$, donc admet au moins $n+1$ racines. Or $\deg(\mathrm{P}) \leqslant n$, donc P est forcément le polynôme nul.

> *Dans l'exercice 14.6, on établit que la base de Lagrange construite sur $(a_0, \ldots, a_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.*

.3. On commence par remarquer que si $f, g \in \mathrm{E}$, alors f' et g' sont continues sur $[0\,;\,1]$, d'où l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$.

- La bilinéarité de φ provient de la linéarité de l'intégrale, ainsi que de la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$,

- et la symétrie provient de la commutativité du produit des réels.
- Pour tout $f \in \mathrm{E}$,

$$\varphi(f,f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}\, t \geqslant 0 \text{ \textit{(par la positivité de l'intégrale des fonctions continues).}}$$

- Si $\varphi(f,f) = 0$, alors

$$f(0)^2 + \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}\, t = 0$$

or derechef, par la positivité de l'intégrale des fonctions continues, $\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}\, t \geqslant 0$, donc

$$f(0)^2 + \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}\, t = 0 \Longleftrightarrow f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}\, t = 0.$$

Or $f \in \mathrm{E}$, donc la fonction $(f')^2 : t \mapsto f'(t)^2$ est continue sur $[0\ ;\ 1]$, et positive sur $[0\ ;\ 1]$, ainsi par la stricte positivité de l'intégrale des fonctions continues, on peut en déduire que la fonction $t \mapsto f'(t)^2$ est nulle sur $[0\ ;\ 1]$.
Ainsi comme f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0\ ;\ 1]$, on obtient par le théorème fondamental de l'analyse que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) \mathrm{d}t = 0 + \int_0^x 0 \mathrm{d}t = 0,$$

autrement dit f est nulle sur $[0\ ;\ 1]$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 14.2 *énoncé*

Supposons que $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, et montrons que $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ est inversible.

> *Les méthodes pour montrer qu'une matrice est inversible sont légions. Je vous invite d'ailleurs à y consacrer la confection d'une fiche de méthodes « pour montrer qu'une matrice est inversible ».*
> *Ici, on va montrer que le noyau de $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ (à vrai dire le noyau de son endomorphisme canoniquement associé) est réduit au vecteur nul (autrement dit que -1 n'est pas valeur propre de M).*

Prenons $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})$, et montrons que $\mathrm{X} = 0_{\mathbb{R}^n}$.

> *Pour montrer que $X = 0_{\mathbb{R}^n}$, on utilise cette nouvelle méthode que nous fournit le caractère « défini » du produit scalaire : on montre que $\langle X \mid X\rangle = 0$. Autrement dit avec la forme canonique du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, on va montrer que $X^\top X = 0$.*

De $X \in \operatorname{Ker}(I_n + M)$ on déduit que $(I_n + M)X = 0_{\mathbb{R}^n}$, d'où $MX = -X$.

- En composant cette égalité par la transposition qui est linéaire on obtient $(MX)^\top = -X^\top$, puis selon la règle de calcul entre transposition et produit matriciel, $X^\top M^\top = -X^\top$, ce qui donne par l'antisymétrie de M, $X^\top M = X^\top$
- En multipliant à gauche les deux membres de l'égalité $MX = -X$ par $X^\top$, on obtient $X^\top MX = -X^\top X = -\|X\|^2$.
- Et en multipliant à droite par X dans $X^\top M = X^\top$, on obtient $X^\top MX = X^\top X = \|X\|^2$.
  On en déduit ainsi que $\|X\|^2 = -\|X\|^2$, donc que $\|X\| = 0$, ce qui entraîne $X = 0_{\mathbb{R}^n}$, C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 14.2 *énoncé*

Soient $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien, et $(x, y) \in E^2$,

1.
$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y \mid x+y\rangle = \langle x \mid x+y\rangle + \langle y \mid x+y\rangle \quad \textit{(par linéarité à gauche)}\\ &= \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle \quad \textit{(par linéarité à droite)}\\ &= \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2 \quad \textit{(par symétrie du produit scalaire).}\end{aligned}$$

2. les identités de polarisation et du parallèlogramme s'obtiennent facilement avec la formule précédente.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons
$$P(t) = \|tx + y\|^2 .$$
   Alors pour tout réel t,
   - $P(t) \geqslant 0$;
   - $P(t) = \|tx + y\|^2 = \|x\|^2\, t^2 + 2\langle x \mid y\rangle\, t + \|y\|^2$ est un polynôme du second degré.

   Ce polynôme du second degré est positif sur tout $\mathbb{R}$, donc son discriminant $\Delta = 4\left(\langle x \mid y\rangle^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\right)$ est négatif, ce qui nous donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   Il y a égalité $\langle x \mid y\rangle^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2$ si, et seulement si, le discriminant est nul, ce qui est vrai si, et seulement si, P a une racine unique t pour laquelle $P(t) = \|tx + y\|^2 = 0$, qui équivaut à la relation de colinéarité $y = -tx$.

Une correction de l'exercice 14.3 *énoncé*

Tout d'abord

$$\begin{aligned} n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 && \textit{(car les } x_k \textit{ sont des réels strictement positifs)} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{x_k})^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2\right) && \textit{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \\ &= 1 \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) && \textit{(car par hypothèse la somme des } x_k \textit{ vaut 1)} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue.

Une preuve de la proposition 14.3 *énoncé*

Soit F un sous-espace vectoriel de E, et

$$\mathrm{F}^{\perp} = \{x \in \mathrm{E} \mid \ \forall a \in \mathrm{F},\ \langle x | a \rangle = 0\}.$$

- Le vecteur nul 0_{E} est évidemment orthogonal à tous les vecteurs de F, donc $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}^{\perp}$, et $\mathrm{F}^{\perp}$ est non vide.
  Soit $(x, y) \in \left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^2$ et λ, μ deux réels, alors pour tout $a \in \mathrm{F}$,

  $$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y \mid a \rangle &= \lambda \langle x \mid a \rangle + \mu \langle y \mid a \rangle \quad \textit{(par linéarité à gauche du produit scalaire)} \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 \quad \textit{(car } x, y \in \mathrm{F}^{\perp}\textit{)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par combinaison linéaire.
- Pour tout $x \in \mathrm{F}$, alors pour tout $y \in \mathrm{F}^{\perp}$, $\langle x \mid y \rangle = 0$, donc $x \in \left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$.

Une correction de l'exercice 14.4 *énoncé*

Pour tout $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$, notons

$$\begin{aligned}
\langle\cos(p\bullet)\mid\cos(q\bullet)\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(pt)\times\cos(qt)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos((p+q)t)+\cos((p-q)t)\right)\mathrm{d}t\\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{p+q}\sin((p+q)t)+\frac{1}{p-q}\sin((p-q)t)\right]_{-\pi}^{\pi} & =0 \text{ si } p\neq q,\\ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2p}\sin(2pt)+t\right]_{-\pi}^{\pi} & =\frac{1}{2\pi}\times 2\pi = 1 \text{ si } p=q.\end{cases}\\
&= \delta_{p,q}\quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\langle\sin(p\bullet)\mid\sin(q\bullet)\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(pt)\times\sin(qt)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(-\cos((p+q)t)+\cos((p-q)t)\right)\mathrm{d}t\\
&= \delta_{p,q}\quad \textit{(comme au-dessus)}
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 14.4 *énoncé*

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale, alors

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \mid \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \mid \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \right\rangle && \textit{(il vaut mieux utiliser deux indices de sommation différent pour appliquer la bilinéarité)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle x_k \mid \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \right\rangle && \textit{(par linéarité à gauche)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \langle x_k \mid x_\ell \rangle \right) && \textit{(à droite)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle x_k \mid x_k \rangle && \textit{(car } (x_1, \dots, x_n) \textit{ est une famille orthogonale, donc } \langle x_k \mid x_\ell \rangle = 0 \textit{ pour } k \neq \ell\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 14.5 *énoncé*

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale dont les vecteurs sont non nuls, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_{\mathrm{E}}.$$

Alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i \right\|^2 = 0,$$

c'est-à-dire grâce au théorème de Pythagore

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| \, \|x_i\|^2 = 0.$$

Une somme de réels positifs ne pouvant être nulle que si ces réels sont nuls on en déduit que

$$\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!], \quad |\lambda_k| \, \|x_k\| = 0,$$

or les x_i sont non nuls, donc leurs normes sont non nulles, d'où

$$\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\ \ \lambda_k = 0.\ \ \text{C.Q.F.D.}$$

Autre méthode : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale dont les vecteurs sont non nuls, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_{\mathrm{E}}.$$

Alors en effectuant le produit scalaire avec x_1,

$$\begin{aligned}
\left\langle x_1 \mid \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\rangle = 0 &\iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_1 \mid x_k \rangle = 0 \ \ \textit{(par linéarité à droite du produit scalaire)}\\
&\iff \lambda_1 \|x_1\|^2 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k 0 = 0 \ \ \textit{(car } \langle x_1 \mid x_k \rangle = 0 \textit{ pour tout } k \geqslant 2 \textit{ car les } x_i \textit{ sont deux à deux orthogonaux)}\\
&\iff \lambda_1 \|x_1\| = 0\\
&\iff \lambda_1 = 0 \ \ \textit{(car } x_1 \neq 0_{\mathrm{E}} \textit{ donc } \|x_1\| \neq 0\textit{)}.
\end{aligned}$$

Ce qu'on vient de faire avec λ_1 peut être fait avec n'importe lequel des scalaires λ_i, donc tous ces scalaires sont nuls. C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 14.6 *énoncé*

Soit $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$, avec $\mathrm{I} = [\![0, n]\!]$ ou $\mathrm{I} = \mathbb{N}$, est une famille **libre** de vecteurs de E.
Procédons par récurrence.

- Au rang $p = 0$, (x_0) est une famille libre, donc $x_0 \neq 0_{\mathrm{E}}$, d'où $\|x_0\| \neq 0$, ainsi le vecteur $\varepsilon_0 = \frac{1}{\|x_0\|} x_0$ vérifie :
  - $\|\varepsilon_0\| = \left\| \frac{1}{\|x_0\|} x_0 \right\| = \frac{1}{\|x_0\|} \|x_0\| = 1$, donc (ε_0) est une famille orthonormale ;
  - $\varepsilon_0 \in \mathrm{Vect}(x_0)$, donc $\mathrm{Vect}(\varepsilon_0) \subset \mathrm{Vect}(x_0)$, et ce sont deux sous-espaces vectoriels de dimension 1, donc $\mathrm{Vect}(\varepsilon_0) = \mathrm{Vect}(x_0)$.
- Supposons qu'à un rang $p \geqslant 1$, on dispose d'une famille orthonormale $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1})$ telle que $\mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{p-1}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1})$.

  Alors au rang suivant p, prenons $e_p = x_p - \sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \varepsilon_i$.

  - Ce vecteur e_p est non nul car sinon $x_p \in \mathrm{Vect}\left(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(x_0, \dots, x_{p-1}\right)$, ce qui contredit l'indépendance linéaire de la famille $\left(x_0, \dots, x_p\right)$.

On peut donc prendre $\varepsilon_p = \frac{1}{\|e_p\|} e_p$, qui est alors un vecteur de norme 1.

➔ Pour tout $j \in [\![0 \,;\, p-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \varepsilon_p \mid \varepsilon_j \right\rangle = \frac{1}{\|e_p\|} \left\langle e_p \mid \varepsilon_j \right\rangle &= \frac{1}{\|e_p\|} \left\langle x_p - \sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \, \varepsilon_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|e_p\|} \left(\left\langle x_p \mid \varepsilon_j \right\rangle - \sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \left\langle \varepsilon_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \right) \quad \textit{(par linéarité à gauche)} \\
&= \frac{1}{\|e_p\|} \left(\left\langle x_p \mid \varepsilon_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=0}^{p-1} \left\langle \varepsilon_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \varepsilon_i | x_p \right\rangle \right) \\
&= \frac{1}{\|e_p\|} \left(\left\langle x_p \mid \varepsilon_j \right\rangle - \left\langle \varepsilon_j | x_p \right\rangle \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc la famille $\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_p\right)$ est orthonormale.

➔ D'une part,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p &\in \operatorname{Vect}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{p-1}, x_p\right) \quad \textit{(par construction de } \varepsilon_p \textit{ et de } e_p\textit{)} \\
&= \operatorname{Vect}\left(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_p\right) \quad \textit{(par récurrence),}
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Vect}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \varepsilon_p\right) \subset \operatorname{Vect}\left(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_p\right)$.
Réciproquement, en écrivant

$$x_p = \|e_p\| \, \varepsilon_p + \sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \, \varepsilon_i,$$

on a $x_p \in \operatorname{Vect}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_p\right)$, et on finit de la même façon.
Donc on a bien la double inclusion, c'est-à-dire l'égalité

$$\operatorname{Vect}\left(x_0, \ldots, x_p\right) = \operatorname{Vect}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_p\right).$$

Et la récurrence est achevée.

Une correction de l'exercice 14.5 *énoncé*

1. ➟ La symétrie vient de la commutativité du produit des réels, la bilinéarité vient de la linéarité de la dérivation, puis de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication, et la positivité provient de ce qu'une somme de réels positifs est positive.

- Le caractère défini provient de ce que si $\sum_{i=0}^{2}(P^{(i)}(0))^2 = 0$, alors (une somme de réels positifs étant nulle si, et seulement si, tous ces réels sont nuls) $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$.
  Donc, grâce à la formule de Taylor pour les polynômes
  $$P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(i)}(0)}{i!}X^i = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 = 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2. - $\|1\|^2 = \langle 1 \mid 1 \rangle = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$, donc 1 est déjà normalisé.
   - $\langle 1 \mid X \rangle = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0$ donc $1 \perp X$,
     et
     $$\|X\|^2 = \langle X \mid X \rangle = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$
     donc la famille $(1, X)$ est orthonormée.
   - On constate de même que $1 \perp X^2$ et $X \perp X^2$, puis que
     $$\left\|X^2\right\|^2 = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 2 = 4$$
     donc que $\left\|X^2\right\| = 2$, d'où que $\left\|\frac{1}{2}X^2\right\| = 1$.
   - On conclut que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(1, X, X^2)$ donne la famille $(1, X, \frac{1}{2}X^2)$

Une preuve de la proposition 14.7 *énoncé*

1. Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. On rappelle que la définition originelle d'un espace vectoriel de dimension finie est un espace vectoriel qui dispose d'une famille génératrice finie, et que le théorème de la base incomplète nous permet d'extraire de cette famille une base de E.

   Il suffit alors de faire subir à cette base l'implacable procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une famille orthonormée. D'après la proposition 14.5, cette famille est libre, ainsi d'après le théorème de la base incomplète, on peut donc la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ de E.

   En appliquant à cette base le procédé de Gram-Schmidt, on obtient une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ dont les k premiers vecteurs coïncident avec ceux de la famille donnée. C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 14.8 *énoncé*

Soient $(\mathrm{E}, \langle.|.\rangle)$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Soit $x \in \mathrm{E}$, notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

   Alors $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, et pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\langle x \mid e_i\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mid e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k \mid e_i\rangle \quad \textit{(par linéarité à gauche de produit scalaire)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,i} \quad \textit{(car } (e_1, \dots, e_n) \textit{ est une base orthonormée)}\\ &= x_i, \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

2. Soient $x, y \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned}\langle x \mid y\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k\rangle\, e_k \mid \sum_{i=1}^{n} \langle y \mid e_i\rangle\, e_i \right\rangle \quad \textit{(d'après le résultat précédent)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k\rangle \left(\sum_{i=1}^{n} \langle y \mid e_i\rangle \langle e_k \mid e_i\rangle \right) \quad \textit{(par linéarité à gauche, puis à droite)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k\rangle \left(\sum_{i=1}^{n} \langle y \mid e_i\rangle\, \delta_{k,i} \right) \quad \textit{(car } (e_1, \dots, e_n) \textit{ est une base orthonormée)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k\rangle (\langle y \mid e_k\rangle) = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k\rangle \times \langle y \mid e_k\rangle\,.\end{aligned}$$

3. Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $m_{i,j}$ est la coordonnée sur le vecteur e_i du vecteur $f(e_j)$, et cette coordonnée, d'après le premier point de la proposition, vaut bien $\left\langle f(e_j) \mid e_i \right\rangle$.

Une correction de l'exercice 14.6 *énoncé*

1. Appliquons l'égalité donnée en hypothèse pour $x = e_1$:

$$\begin{aligned} 1 &= \|e_1\| \quad \textit{(car par hypothèse les } e_i \textit{ sont unitaires)} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \langle e_i \mid e_k \rangle^2 \quad \textit{(par hypothèse)} \\ &= \langle e_1 \mid e_1 \rangle^2 + \sum_{k=2}^{p} \langle e_i \mid e_k \rangle^2 = 1 + \sum_{k=2}^{p} \langle e_i \mid e_k \rangle^2, \end{aligned}$$

donc $\sum_{k=2}^{p} \langle e_i \mid e_k \rangle^2 = 0$, ce qui n'est possible que si pour tout $k \in [\![2 ; p]\!]$, $\langle e_1 \mid e_k \rangle = 0$.
Donc e_1 est orthogonal à tous les autres vecteurs.
La propriété caractéristique de la famille $\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ est indépendante de la numérotation de ses vecteurs, donc toute propriété concernant e_1 vis à vis des autres vecteurs, est généralisable à chaque vecteur de la famille.

> *Les personnes qui jugent cet argument irrecevable feront elles-mêmes le cas général.*

Donc la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthogonale.

Comme on sait que les e_i sont unitaires, on peut conclure que $\boxed{\text{la famille } (e_1, \ldots, e_p) \text{ est orthonormée}}$.

2. > *On sait dorénévant que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormée, donc elle est libre, mais il reste à prouver qu'elle est génératrice de E pour achever l'exercice.*
> *Pour montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p\right)$, comme l'inclusion de droite à gauche est évidente, il reste à montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $x \in \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p\right)$. Pour cela on montrer que $x = p_{\mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p\right)}(x)$, c'est-à-dire $x = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle e_k$, et ici aussi on va prouver cette égalité en montrant que la norme de la différence des deux vecteurs est nulle.*

Soit x un vecteur de E, et y le vecteur $y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle e_k$, montrons que $x = y$.

Alors pour $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$

$$\langle y \mid e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle\, e_k \mid e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \langle e_k \mid e_i \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle\, \delta_{i,k} = \langle x \mid e_i \rangle \quad \textit{(par orthonormalité de } (e_i)_{i\in[\![1\,;\,p]\!]}\textit{)}.$$

donc, par hypothèse de l'exercice

$$\|x-y\| = \sum_{k=1}^{p} \langle x-y \mid e_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{p} \left(\langle x \mid e_k \rangle - \langle y \mid e_k \rangle\right)^2 = 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une preuve de la proposition 14.9

énoncé

Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p$, supposons que

$$x_1 + \cdots + x_p = 0_{\mathrm{E}} \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=1}^{p} x_k = 0_{\mathrm{E}}.$$

Alors grâce au théorème de Pythagore

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_i\|^2 = 0.$$

Une somme de réels positifs ne pouvant être nulle que si ces réels sont nuls on en déduit que

$$\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!], \quad \|x_k\| = 0,$$

autrement dit

$$\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!], \quad x_k = 0_{\mathrm{E}}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Autre méthode : Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p$, supposons que

$$x_1 + \cdots + x_p = 0_{\mathrm{E}} \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=1}^{p} x_k = 0_{\mathrm{E}}.$$

Alors en effectuant le produit scalaire avec x_1,

$$\begin{aligned}
&\left\langle x_1 \mid \sum_{k=1}^{p} x_k \right\rangle = 0\\
\iff &\sum_{k=1}^{p} \langle x_1 \mid x_k\rangle = 0 \text{ (par linéarité à droite du produit scalaire)}\\
\iff &\|x_1\|^2 + \sum_{k=2}^{p} 0 = 0 \text{ (car } \langle x_1 \mid x_k\rangle = 0 \text{ pour tout } k \geqslant 2 \text{ car les } \mathrm{E}_i \text{ sont deux à deux orthogonaux)}\\
\iff &\|x_1\| = 0\\
\iff &x_1 = 0_{\mathrm{E}}.
\end{aligned}$$

Ce qu'on vient de faire avec x_1 peut être fait avec n'importe lequel des vecteurs x_i, donc tous ces vecteurs sont nuls. C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 14.10 *énoncé*

Montrer que $\mathrm{V} \oplus \mathrm{V}^{\perp} = \mathrm{E}$.

- Les sous-espaces vectoriels V et $\mathrm{V}^{\perp}$ sont orthogonaux donc en somme directe par la proposition précédente.
- Le sous-espace vectoriel V est de dimension finie, donc par le procédé de Gram-Schmidt sur une base quelconque de V, on peut obtenir une base orthonormée $\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ de V .

  Pour tout vecteur x de E, notons $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i\rangle e_i$, et montrons que $x - y \in \mathrm{V}^{\perp}$.

  Pour cela, il suffit de vérifier (voir la remarque 14.7) que $x - y$ est orthogonal à tout vecteur d'une base de V.

  Soit $j \in [\![1 ; n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\left\langle x - y \mid e_j\right\rangle &= \left\langle x \mid e_j\right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i\rangle e_i \mid e_j \right\rangle\\
&= \left\langle x \mid e_j\right\rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i\rangle \left\langle e_i \mid e_j\right\rangle\\
&= \left\langle x \mid e_j\right\rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i\rangle \delta_{i,j}\\
&= \left\langle x \mid e_j\right\rangle - \left\langle x \mid e_j\right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

  Ainsi $x - y \in \mathrm{V}^{\perp}$, donc $x = y + (x - y)$ est dans $\mathrm{V} + \mathrm{V}^{\perp}$.

On peut donc conclure que $E \subset V + V^{\perp}$, donc que $E = V + V^{\perp}$.

- On a donc prouvé que $E \subset V \oplus V^{\perp}$

Montrons que $\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = V$.

- On sait déjà par la proposition 14.3 que $V \subset \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$.
- Réciproquement, soit $z \in \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$. On vient de voir que $E = V \oplus V^{\perp}$, donc il existe un unique $x \in V$ tel que $z = x + (z - x)$ avec $z - x \in V^{\perp}$.
  alors
  $$\langle z - x \mid z - x \rangle = \langle z \mid z - x \rangle - \langle x \mid z - x \rangle \quad \textit{(par bilinéarité du produit scalaire)}$$
  or
  - $\langle z \mid z - x \rangle = 0$, car $z \in \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$ et $z - x \in V^{\perp}$,
  - $\langle x \mid z - x \rangle = 0$, car $x \in V$ et $z - x \in V^{\perp}$,

  donc $\langle z - x \mid z - x \rangle = 0$, donc $z - x = 0_E$, d'où $z = x$, ce qui prouve que $z \in V$.

Enfin si E est de dimension finie, il découle directement de $E = V \oplus V^{\perp}$ que $\dim\left(V^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(V)$.

Une correction de l'exercice 14.7 *énoncé*

Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $a = (1, -1, 1)$, et s la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(a)$. Alors $s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - 2\, p_{\mathrm{Vect}(a)}$.

Notons de plus $X_a = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, alors d'après la remarque précédente :

$$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(s) = I_3 - 2 \times \frac{1}{3} X_a \times X_a^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une correction de l'exercice 14.8 *énoncé*

1. - La symétrie vient de la commutativité du produit des réels, la bilinéarité vient de la linéarité de l'intégrale, et la positivité provient de la croissance de l'intégrale.
   - Le caractère défini provient de ce que si $\int_{-1}^{1} P^2(t)\mathrm{d}\,t = 0$, alors par la **stricte positivité** de l'intégrale, comme $t \mapsto P^2(t)$ est continue et positive, alors P s'annule sur tout le segment $[-1\ ;\ 1]$, donc admet une infinité de racines, ce qui prouve que P est le polynôme nul.
2. Pour calculer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathrm{Vect}(1, X)$, commençons par déterminer une base orthonormée $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ de $\mathrm{Vect}(1, X)$ par orthonormalisation de Gram-Schmidt

de $(1, \mathrm{X})$:

- $\langle 1 \mid 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1^2 \mathrm{d}\,t = 2$, donc on prend $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\times 1)$.
- $\langle \mathrm{X} \mid \varepsilon_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \mathrm{X} \mid 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} t \mathrm{d}\,t = 0$, donc $\mathrm{X} \perp \varepsilon_0$.
- $\langle \mathrm{X} \mid \mathrm{X}\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}\,t = \frac{2}{3}$, donc on prend

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\mathrm{X} = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{X}.$$

- On en déduit (voir la prop 14.11) que le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathrm{Vect}(1, \mathrm{X})$ est

$$\begin{aligned} p(\mathrm{X}^3) &= \left\langle \mathrm{X}^3 \mid \varepsilon_0 \right\rangle \varepsilon_0 + \left\langle \mathrm{X}^3 \mid \varepsilon_1 \right\rangle \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{X}^3 \mid 1 \right\rangle 1 + \frac{3}{2}\left\langle \mathrm{X}^3 \mid \mathrm{X} \right\rangle \mathrm{X} \\ &= \frac{1}{2} \times \int_{-1}^{1} t^3 \mathrm{d}\,t \times 1 + \frac{3}{2} \times \int_{-1}^{1} t^4 \mathrm{d}\,t \times \mathrm{X} \\ &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{3}{2} \times \frac{2}{5}\mathrm{X} = \frac{3}{5}\mathrm{X}. \end{aligned}$$

3. La distance de X^3 à $\mathrm{Vect}(1, \mathrm{X})$ est d'après le cours

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\mathrm{X}^3, \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X})\right) &= \left\|\mathrm{X}^3 - p_{\mathrm{Vect}(1,\mathrm{X})}(\mathrm{X}^3)\right\| = \left\|\mathrm{X}^3 - \frac{3}{5}\mathrm{X}\right\| \\ &= \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 \mathrm{d}t} = \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{6}{25}x^5 + \frac{3}{25}x^3\right]_{-1}^{1} \\ &= \sqrt{\frac{8}{175}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} \simeq 0{,}214, \end{aligned}$$

ce dont on se doutait vachement depuis le début.

Une correction de l'exercice 14.9 *énoncé*

> *Ici, E n'est pas un espace de dimension finie, on ne peut donc pas travailler dans une base.*

Soit p un projecteur de E, autrement dit $p \circ p = p$.

(i) Supposons que $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$.

Alors pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$x = p(x) + (x - p(x)) \text{ avec } p(x) \perp (x - p(x))$$

donc l'identité de Pythagore nous donne

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \\ \text{d'où } \|x\|^2 &\geqslant \|p(x)\|^2 \end{aligned}$$

et comme $\|x\|$ et $\|p(x)\|$ sont positifs, on en déduit que

$$\|x\| \geqslant \|p(x)\|\,.$$

(ii) Réciproquement, montrons que

$$\big(\forall x \in \mathrm{E},\ \ \|p(x)\| \leqslant \|x\|\big) \Rightarrow \big(\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)\big)$$

en prouvant sa contraposée, autrement dit, supposons que $\mathrm{Ker}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ ne sont pas orthogonaux, et montrons qu'il existe z dans E tel que $\|p(z)\| > \|z\|$.

→ Posons $\mathrm{V} = \mathrm{Ker}\,(p)$ et u la projection orthogonale sur $\mathrm{V}^{\perp}$.

→ $\mathrm{Ker}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ ne sont pas orthogonaux, donc il existe $x \in \mathrm{Ker}\,(p)$ et $y \in \mathrm{Im}\,(p)$ tels que $\langle x \mid y\rangle \neq 0$.
Posons alors $z = u(y)$. Par définition

$$y = z + y - z, \ \text{ avec } \ z \in \mathrm{V}^{\perp} \text{ et } y - z \in \mathrm{V}.$$

ainsi

$$\begin{aligned} p(y) &= p(z) + p(y - z) \ \ \textit{(par linéarité de } p\textit{)} \\ &= p(z) \ \ \textit{(car } y - z \in \mathrm{V} = \mathrm{Ker}\,(p)\textit{)}, \end{aligned}$$

mais $y \in \mathrm{Im}\,(p)$, donc $p(y) = y$.
Ainsi $y = p(z)$, donc $\|y\| = \|p(z)\|$.

→ Or grâce au théorème de Pythagore

$$\|y\|^2 = \|z\|^2 + \|y - z\|^2\,.$$

Mais $\|y - z\|^2 > 0$, car sinon $y = z$, donc $y \in \mathrm{V}^{\perp}$, dont on déduit, puisque $x \in \mathrm{Ker}\,(p) = \mathrm{V}$, que $\langle y \mid x\rangle = 0$, ce qui contredit la définition initiale de x et y.

→ Par conséquent $\|y\|^2 < \|z\|^2 = \|p(y)\|^2$, donc par stricte croissance de $\square \mapsto \square^2$ sur $[0\ ;\ +\infty[$,

$$\|y\| < \|p(y)\|\,, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

(iii) **Autre méthode pour la réciproque** : supposons que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, et montrons que $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$.

Prenons $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$, et montrons que $\langle x \mid y \rangle = 0$.

On sait que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_\mathrm{E})$, donc $p(y) = y$, et comme $x \in \mathrm{Ker}(p)$, on a pour tout réel t, $p(y+tx) = p(y) + tp(x) = y$.

Ainsi pour tout réel t, par hypothèse de départ

$$\begin{aligned}\|p(y+tx)\| \leqslant \|y+tx\| &\Longleftrightarrow \|p(y+tx)\|^2 \leqslant \|y+tx\|^2 \\ &\Longleftrightarrow \|y\|^2 \leqslant \|y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle t + \|x\|^2 t^2 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leqslant 2\langle x \mid y\rangle t + \|x\|^2 t^2.\end{aligned}$$

Donc le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 2\langle x \mid y\rangle \mathrm{X} + \|x\|^2 \mathrm{X}^2$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$, et ceci n'est possible que si son discriminant est négatif.

Or ce discriminant vaut

$$\Delta = (2\langle x \mid y\rangle)^2 - 4 \times \|x\|^2 \times 0 = (2\langle x \mid y\rangle)^2,$$

donc il est positif.

Par conséquent, $\Delta = 0$, donc $\langle x \mid y\rangle = 0$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 14.10

énoncé

On se place dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, muni du produit scalaire $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}\,t$. C'est un espace euclidien.

Ainsi

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 + bt - c)^2 \mathrm{d}\,t = \inf_{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]} \int_0^1 (t^3 - \mathrm{P}(t))^2 \mathrm{d}\,t$$

On remarquera que $(a,b,c) \mapsto (a,-b,c)$ est une bijection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$, ou plus simplement, que $a\mathrm{X}^2 - b\mathrm{X} + c$ parcourt $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ aussi efficacement que $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, quand (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$.

Ainsi

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 + bt - c)^2 \mathrm{d}\,t = \inf_{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]} \left\|\mathrm{X}^3 - \mathrm{P}\right\|^2.$$

On sait d'après le cours que cette borne inférieure existe, c'est même un minimum, atteint en $\mathrm{P} = p_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}^3)$, et elle définit la distance, ici au carré, entre X^3 et $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Ce projeté orthogonal $\mathrm{P} = p_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}^3)$ est caractérisé par

$$\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}],\ \text{c'est-à-dire } \mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c,\ \text{où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,$$

et

$$X^3 - P \in \mathbb{R}_2[X]^\perp = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)^\perp,$$
$$\text{c'est-à-dire } \langle X^3 - P \mid 1\rangle = \langle X^3 - P \mid X\rangle = \left\langle X^3 - P \mid X^2\right\rangle = 0.$$

Donc il suffit de trouver les réels a, b, c tels que

$$\langle X^3 - (aX^2 + bX + c) \mid 1\rangle = \langle X^3 - (aX^2 + bX + c) \mid X\rangle = \left\langle X^3 - (aX^2 + bX + c) \mid X^2\right\rangle = 0,$$

autrement dit

$$\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)\mathrm{d}\,t = 0 \Longleftrightarrow -\frac{a}{3} - \frac{b}{2} - c + \frac{1}{4} = 0 \Longleftrightarrow 4a + 6b + 12c = 3$$
$$\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c) \times t\mathrm{d}\,t = 0 \Longleftrightarrow -\frac{a}{4} - \frac{b}{3} - \frac{c}{2} + \frac{1}{5} = 0 \Longleftrightarrow 15a + 20b + 30c = 12$$
$$\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c) \times t^2\mathrm{d}\,t = 0 \Longleftrightarrow -\frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{c}{3} + \frac{1}{6} = 0 \Longleftrightarrow 12a + 15b + 20c = 10.$$

On obtient donc un système dont la résolution ne peut nous échapper car nous disposons du pivot de Gauss qui nous retourne, implacablement :

$$a = 3/2, \quad b = -3/5, \quad c = 1/20.$$

Par conséquent,

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 + bt - c)^2\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \left(t^3 - \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{120}\right)\right)^2 \mathrm{d}\,t = \frac{1}{2800}.$$

Une correction de l'exercice 14.11 *énoncé*

1. $$\begin{aligned}\langle A \mid B\rangle &= (\mathrm{ch}(x) - 1) \times (\mathrm{ch}(x) + 1) + 4 \times 3 + (-2) * 6 + \mathrm{sh}(x) \times (-\mathrm{sh}(x)) \\ &= \mathrm{ch}(x)^2 - 1 - \mathrm{sh}(x)^2 = \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 - 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. ➟ On suppose connu que l'ensemble $\mathscr{S}$ des matrices symétriques et celui $\mathscr{A}$ des matrices antisymétriques sont bien des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit S une matrice symétrique, et A une matrice antisymétrique, alors

$$\begin{aligned}\langle A \mid S\rangle &= \operatorname{Tr}(A^\top \times S) = \operatorname{Tr}(-A\times S) \ \textit{(car A est antisymétrique)}\\ &= -\operatorname{Tr}(A\times S) \ \textit{(car la trace est linéaire)}\\ &= -\operatorname{Tr}(S\times A) \ \textit{(par propriété de la trace)}\\ &= -\operatorname{Tr}(S^\top \times A) \ \textit{(car S est symétrique)}\\ &= -\langle S \mid A\rangle\end{aligned}$$

  ainsi $\langle A \mid S\rangle = -\langle S \mid A\rangle$, or le produit scalaire est symétrique, donc $\langle A \mid S\rangle = \langle S \mid A\rangle$, d'où $\langle A \mid S\rangle = -\langle A \mid S\rangle$, puis $2\langle A \mid S\rangle = 0$, et par conséquent $\langle A \mid S\rangle = 0$.
  On a prouvé que le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques sont orthogonaux (et donc en somme directe).
- De plus pour toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on remarque (parce qu'on l'a déjà vu cette année, et même l'an dernier) que

$$M = \frac{1}{2}\left(M + M^\top\right) + \frac{1}{2}\left(M - M^\top\right),$$

  où $\frac{1}{2}\left(M+M^\top\right)$ est symétrique, tandis que $\frac{1}{2}\left(M-M^\top\right)$ est antisymétrique.
  Ainsi $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S} + \mathscr{A}$, et l'inclusion réciproque étant évidente, on a bien $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathscr{S} + \mathscr{A}$.
- On peut donc conclure que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. La distance de A à $\mathscr{S}$ est la norme de $A - p_{\mathscr{S}}(A)$, qui est égal à $p_{\mathscr{A}}(A)$.
   Or on a vu au-dessus que

$$\begin{aligned}p_{\mathscr{A}}(A) &= \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\operatorname{ch}x - 1 & 4\\ -2 & \operatorname{sh}x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\operatorname{ch}x - 1 & -2\\ 4 & \operatorname{sh}x\end{pmatrix}\right]\\ &= \begin{pmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   donc la distance voulue est

$$\left\|\begin{pmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Une preuve de la proposition 14.14 *énoncé*

- Tout d'abord, E est un espace euclidien, donc il est de dimension finie. Ainsi u étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il est bijectif si, et seulement si, il est injectif, ce qui revient pour une application linéaire à ce que $\operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.

- Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0_{\mathrm{E}}$, donc en particulier $\|u(x)\| = 0$.
  Or u étant une isométrie, $\|u(x)\| = \|x\|$.
  Par conséquent, $\|x\| = 0$, ce qui prouve que $x = 0_{\mathrm{E}}$, C.Q.F.D.

Enfin, pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned}\left\|u^{-1}(x)\right\|^2 &= \left\|u\left(u^{-1}(x)\right)\right\|^2 \quad \textit{(car u est une isométrie)}\\ &= \|x\|^2,\end{aligned}$$

donc u^{-1} est aussi une isométrie.

Une correction de l'exercice 14.12 *énoncé*

On peut remarquer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, en posant $u = 1 - t$ dans l'intégrale :

$$\|f(\mathrm{P})\|^2 = \int_0^1 \mathrm{P}(1-t)^2 \mathrm{d}t = \int_1^0 \mathrm{P}(u)^2(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 \mathrm{P}(u)^2 \mathrm{d}u = \|\mathrm{P}\|^2.$$

Une preuve de la proposition 14.15 *énoncé*

- On montre que (1) entraîne (2) à l'aide des identités de polarisation de la prop 14.2, qui permettent de retrouver le produit scalaire à partir de la norme.
- Supposons que (2) : u conserve le produit scalaire, alors pour toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E,

  $$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2,\ \left\langle u(e_i) \mid u(e_j)\right\rangle = \left\langle e_i \mid e_j \right\rangle = \delta_{i,j}$$

  donc $\left(u(e_1), \ldots, u(e_n)\right)$ est bien une base orthonormée de E.
- Supposons que (3) : l'image $\left(u(e_1), \ldots, u(e_n)\right)$ d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E par u est encore une base orthonormée.
  Alors pour tout vecteur x,

  $$\begin{aligned}\|u(x)\|^2 &= \left\|u\left(\sum_{k=1}^n \langle x \mid e_k\rangle e_k\right)\right\|^2\\ &= \left\|\sum_{k=1}^n \langle x \mid e_k\rangle u(e_k)\right\| \quad \textit{(par linéarité de u)}\\ &= \sum_{k=1}^n \langle x \mid e_k\rangle^2 \quad \textit{(car $\left(u(e_1), \ldots, u(e_n)\right)$ est une base orthonormée, donc on applique la prop 14.8),}\\ &= \|x\|^2 \quad \textit{(de nouveau grâce à la prop 14.8).}\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 14.13 *énoncé*

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des valeurs propres réelles de u, alors il existe deux vecteurs non nuls x et y tels que $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$.
Ainsi d'une part, comme u est une isométrie :

$$\langle u(x) \mid u(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle,$$

et par définition de x et y :

$$\langle u(x) \mid u(y)\rangle = \langle \lambda x \mid \mu y\rangle = \lambda\mu \langle x \mid y\rangle,$$

d'où

$$(1 - \lambda\mu) \langle x \mid y\rangle = 0.$$

Ainsi :

→ si $\langle x \mid y\rangle \neq 0$, alors $\lambda\mu = 1$, en particulier dans le cas où $\lambda = \mu$ et $x = y$, on obtient $\lambda^2 = 1$, donc $\lambda = \pm 1$.
Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{\pm 1\}$.

→ Dans le cas où $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, on obtient $\langle x \mid y\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}_1(u)$ et $y \in \mathrm{E}_{-1}(u)$, donc $\mathrm{E}_1(u) \perp \mathrm{E}_{-1}(u)$.

Une correction de l'exercice 14.14 *énoncé*

Soit s une symétrie, alors on sait que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{E}$, et que $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$. En particulier, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $p(x) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$.

1. Supposons que s est une isométrie, alors, pour tous $a \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $b \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$,

$$\langle a \mid b\rangle = \langle s(a) \mid s(b)\rangle = \langle a \mid -b\rangle = -\langle a \mid b\rangle$$

donc $\langle a \mid b\rangle = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \perp \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$, donc ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires orthogonaux.

2. Supposons que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$ sont supplémentaires orthogonaux, montrons que s est une isométrie.
Soit $x \in \mathrm{E}$, alors

$$s(x) = (2p - \mathrm{id}_\mathrm{E})(x) = 2p(x) - x = p(x) - (x - p(x)),$$

donc avec l'identité de Pythagore, comme $p(x) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$, et que ces deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux,

$$\begin{aligned}\|s(x)\|^2 &= \|p(x)\|^2 + \|-(x-p(x))\|^2 \\ &= \|p(x)\|^2 + \|x-p(x)\|^2 \\ &= \|p(x)+(x-p(x))\|^2 = \|x\|^2\end{aligned}$$

donc s est une isométrie.

3. ➟ Soit s la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(a)$, alors $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(a)$ et $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E) = (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$.
   ➟ On sait de plus (voir la remarque 14.9) que $q = \frac{1}{2}(s+\mathrm{id}_E)$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ (autrement dit la projection sur $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$), et donc que $p = \mathrm{id}_E - q$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(a)$.
   ➟ Ainsi, comme la famille composée uniquement du vecteur $\frac{1}{\|a\|}a$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(a)$, on sait grâce à la proposition 14.11 (et l'exercice 14.8) que pour tout $x \in E$, $p(x) = \frac{\langle x|a\rangle}{\langle a|a\rangle}a$.
   ➟ Ainsi

$$s = 2q - \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - 2p : x \mapsto x - 2p(x) = x - 2\frac{\langle x \mid a\rangle}{\langle a \mid a\rangle}a.$$

4. **Analyse :** s'il existe une telle réflexion s échangeant a et b, alors $s(a) = b$ et $s(b) = a$, donc $s(a-b) = b-a = -(a-b)$, donc $a-b \in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ et $a-b \neq 0_E$. Comme ce sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ est l'axe de la réflexion, donc une droite, on peut conclure que cet axe est $\mathrm{Vect}(a-b)$.
   Ainsi, s'il existe une telle réflexion s échangeant a et b, alors c'est la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(a-b)$.
   Synthèse : soit s la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(a-b)$.
   Grâce au résultat de la question précédente

$$\begin{aligned}s(a) &= a - 2 \times \frac{\langle a \mid a-b\rangle}{\langle a-b \mid a-b\rangle}(a-b) \\ &= a - 2\frac{\|a\|^2 - \langle a \mid b\rangle}{\|a\|^2 - 2\langle a \mid b\rangle + \|b\|^2}(a-b) \\ &= a - 2\frac{\|a\|^2 - \langle a \mid b\rangle}{2\left(\|a\|^2 - \langle a \mid b\rangle\right)}(a-b) \ \ (\text{car } \|a\| = \|b\|) \\ &= a - (a-b) = b, \ \ \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 14.16 *énoncé*

Soit $y \in u\left(F^{\perp}\right)$, montrons que $y \in F^{\perp}$. Pour ce faire prenons un vecteur quelconque $x \in F$ et montrons que $\langle x \mid y\rangle = 0$.

- Tout d'abord $y \in u\left(F^{\perp}\right)$, donc il existe $t \in F^{\perp}$ tel que $y = u(t)$, ainsi

$$\langle x \mid y\rangle = \langle x \mid u(t)\rangle\,.$$

- D'autre part, F étant stable par u, u induit un endomorphisme u_F de F, et celui-ci est aussi bijectif car son noyau est $\operatorname{Ker}(u_F) = F \cap \operatorname{Ker}(u) = F \cap \{0_E\} = \{0_E\}$.
  Par conséquent, il existe $r \in F$ tel que $x = u_F(r)$, donc $x = u(r)$ par définition de u_F, et on obtient

$$\begin{aligned}\langle x \mid y\rangle &= \langle u(r) \mid u(t)\rangle = \langle r \mid t\rangle \quad \textit{(car u est une isométrie, donc conserve le produit scalaire)}\\ &= 0 \quad \textit{(car $r \in F$ et $t \in F^{\perp}$)}\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 14.17 *énoncé*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $M^{\top} \times M = I_n$, autrement dit, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, $\left(M^{\top} \times M\right)_{i,j} = \delta_{i,j}$.
Or, en tenant compte de la remarque 14.2, $\left(M^{\top} \times M\right)_{i,j}$ est le produit scalaire (canonique dans $\mathbb{R}^n$) de la i^e ligne de $M^{\top}$, c'est-à-dire la i^e colonne de M, par la j^e colonne de M.
Ainsi, en notant $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de M, $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, $\left\langle C_i \mid C_j\right\rangle = \delta_{i,j}$, ce qui caractérise le fait que $C_1,\dots,C_n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
On a vu que $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $M^{\top} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Mais ceci équivaut d'après le résultat précédent à ce que les colonnes de $M^{\top}$, qui ne sont autres que les lignes de M, forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Une preuve de la proposition 14.18 *énoncé*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$

1. Supposons que (1) : u est une isométrie vectorielle de E.
   Soit $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E, notons $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, et rappelons le troisième point de la proposition 14.8 :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2,\ (M)_{i,j} = \left\langle u(e_j) \mid e_i\right\rangle\,.$$

Alors pour tout $(i,j)\in [\![1\ ;\ n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{M}^\top\times\mathrm{M}\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{M}^\top\right)_{i,k}(\mathrm{M})_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{M})_{k,i}(\mathrm{M})_{k,j}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle u(e_i)\mid e_k\rangle\left\langle u(e_j)\mid e_k\right\rangle \quad \textit{(donc d'après le troisième point de la proposition 14.8)}\\
&= \left\langle u(e_i)\mid u(e_j)\right\rangle \quad \textit{(grâce au deuxième point le troisième point de la proposition 14.8)}\\
&= \left\langle e_i\mid e_j\right\rangle \quad \textit{(car } u \textit{ est une isométrie, donc elle conserve le produit scalaire)}\\
&= \delta_{i,j} \quad \textit{(car } (e_1,\dots,e_n) \textit{ est une base orthonormée)}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{M}^\top\times\mathrm{M}=\mathrm{I}_n$, ce qui prouve que (2) : dans toute base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, la matrice $\mathrm{M}=\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est une matrice orthogonale.

2. (2) entraîne évidemment (3).
3. Supposons que (3) : il existe une base orthonormale $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ dans laquelle $\mathrm{M}=\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est une matrice orthogonale.

   Montrons que u est une isométrie en montrant que l'image $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ de la base $\mathscr{B}$ par u est encore une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

   Pour tout $(i,j)\in [\![1\ ;\ n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
\left\langle u(e_i)\mid u(e_j)\right\rangle &= \sum_{k=1}^{n}\langle u(e_i)\mid e_k\rangle\times\left\langle u(e_j)\mid e_k\right\rangle \quad \textit{(avec le deuxième point le troisième point de la proposition 14.8)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{M})_{k,i}\times(\mathrm{M})_{k,j} \quad \textit{(avec le troisième point de la proposition 14.8)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{M})_{k,i}\times\left(\mathrm{M}^\top\right)_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{M}^\top\right)_{j,k}\times(\mathrm{M})_{k,i}\\
&= \left(\mathrm{M}^\top\times\mathrm{M}\right)_{j,i}\\
&= \left(\mathrm{I}_n\right)_{j,i} \quad \textit{(par hypothèse de départ)}\\
&= \delta_{j,i} \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 14.20 *énoncé*

Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $M \times M^\top = I_n$, donc en particulier $\det(M \times M^\top) = \det(I_n) = 1$, or le déterminant du produit de deux matrices carrées est le produit de leurs déterminants, et le déterminant d'une matrice carrée est égal au déterminant de sa transposée, donc $\det(M)^2 = 1$, et comme M est une matrice à coefficients réels, $\det(M) \in \mathbb{R}$, donc on en déduit que $\det(M) = \pm 1$.
Le déterminant d'une isométrie vectorielle est le déterminant de n'importe laquelle de ses matrices, qui sont orthogonales dans une base orthonormée.

Une correction de l'exercice 14.15 *énoncé*

1. On remarque que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

donc A représente la rotation du plan euclidien d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. De même

$$B = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

donc, B est la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Une correction de l'exercice 14.16 *énoncé*

On remarque que Φ_u est linéaire à droite comme le produit scalaire quelle que soit l'application u.

- Si u est linéaire, alors pour tous $(x_1, x_2, y) \in E^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \Phi_u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) &= \langle u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \mid y \rangle \\ &= \langle \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) \mid y \rangle \quad \textit{(par linéarité de u)} \\ &= \lambda_1 \langle u(x_1) \mid y \rangle + \lambda_2 \langle u(x_2) \mid y \rangle \quad \textit{(par linéarité à gauche du produit scalaire)} \\ &= \lambda_1 \Phi_u(x_1, y) + \lambda_2 \Phi_u(x_2, y), \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

- Réciproquement, si Φ_u est linéaire à gauche, alors pour tous $(x_1, x_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in$

$\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\forall y \in \mathrm{E},\ \langle u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \mid y\rangle &= \Phi_u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y)\\ &= \lambda_1 \Phi_u(x_1, y) + \lambda_2 \Phi_u(x_2, y) \quad \textit{(par linéarité à gauche de } \Phi_u\textit{)}\\ &= \lambda_1 \langle u(x_1) \mid y\rangle + \lambda_2 \langle u(x_2) \mid y\rangle\\ &= \langle \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) \mid y\rangle \quad \textit{(par linéarité à gauche du produit scalaire),}\end{aligned}$$

ainsi, après al-mukabalah (qui consiste à passer tous les termes à gauche de l'égalité) et encore avec la linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\forall y \in \mathrm{E},\ \langle u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2)) \mid y\rangle = 0,$$

donc le vecteur $u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2))$ est dans $\mathrm{E}^\perp$, mais on sait que $\mathrm{E}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$, donc

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2)) = 0_\mathrm{E}$$

autrement dit

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = (\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2)), \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 14.17 *énoncé*

➟ Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{A}^\top \mid \mathrm{B}\right\rangle &= \mathrm{Tr}\left(\left(\mathrm{A}^\top\right)^\top \times \mathrm{B}\right) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A} \times \mathrm{B})\\ \text{et}\ \left\langle \mathrm{A} \mid \mathrm{B}^\top\right\rangle &= \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^\top \times \mathrm{B}^\top) = \mathrm{Tr}((\mathrm{BA})^\top) \quad \textit{(par propriété de la transposition)}\\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{BA}) \quad \textit{(car la transposition ne change pas la trace)}\\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) \quad \textit{(autre propriété de la trace)}\end{aligned}$$

donc

$$\left\langle \mathrm{A}^\top \mid \mathrm{B}\right\rangle = \left\langle \mathrm{A} \mid \mathrm{B}^\top\right\rangle$$

ce qui prouve que $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top$ est un endomorphisme autoadjoint.

- Soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$, on remarque que

$$\begin{aligned} f(\mathrm{P}) &= 2\mathrm{X}\mathrm{P}'(\mathrm{X})+(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}''(\mathrm{X}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathrm{X}}(\mathrm{X}^2-1)\times\mathrm{P}'(\mathrm{X})+(\mathrm{X}^2-1)\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathrm{X}}(\mathrm{P}'(\mathrm{X})) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathrm{X}}\Big((\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'(\mathrm{X})\Big), \end{aligned}$$

donc avec une intégration par parties

$$\begin{aligned} \langle f(\mathrm{P})\mid\mathrm{Q}\rangle &= \int_{-1}^{1}\Big(2t\mathrm{P}'(t)+(t^2-1)\mathrm{P}''(t)\Big)\times\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((t^2-1)\mathrm{P}'(t)\Big)\times\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t \\ &= \Big[(t^2-1)\mathrm{P}'(t)\times\mathrm{Q}'(t)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(t^2-1)\mathrm{P}'(t)\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1}(t^2-1)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

on constate que P et Q sont interchangeables dans cette expression, donc *mutatis mutandis* on peut affirmer que

$$\langle f(\mathrm{P})\mid\mathrm{Q}\rangle=\int_{-1}^{1}(t^2-1)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(t^2-1)\mathrm{Q}'(t)\mathrm{P}'(t)\mathrm{d}t=\langle f(\mathrm{Q})\mid\mathrm{P}\rangle\,.$$

Donc f est un endomorphisme autoadjoint.

- Soit $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
  - Pour tout $(x,y)\in\mathrm{Ker}(f)\times\mathrm{Im}(f)$,

$$\begin{aligned} \langle x\mid y\rangle &= \langle x\mid f(t)\rangle && \textit{(car } y\in\mathrm{Im}(f) \textit{ donc il existe } t\in\mathbb{R} \textit{ tel que } y=f(t)\textit{)} \\ &= \langle f(x)\mid t\rangle && \textit{(car } u \textit{ est autoadjoint)} \\ &= \langle 0_{\mathrm{E}}\mid t\rangle && \textit{(car } x\in\mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

    Donc $\mathrm{Ker}(f)\perp\mathrm{Im}(f)$.
  - De plus grâce au théorème du rang la somme de leurs dimensions donne $\dim(\mathrm{E})$ *(E est censé être de dimension finie).*
  - Donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Une correction de l'exercice 14.18 *énoncé*

Soient E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et u un endomorphisme autoadjoint de E.
Alors, d'après la proposition 14.26, la matrice $\mathrm{M} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est une matrice symétrique (et à coefficients réels, bien sûr, puisque par définition, un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u)$, et x un vecteur propre associé. Notons $\mathrm{X} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

Alors $u(x) = \lambda x$ se traduit matriciellement dans la base $\mathscr{B}$ par $\mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X}$.

- En multipliant à gauche les deux membres de cette égalité par $\overline{\mathrm{X}}^\top = (\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n)$, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{X}}^\top \mathrm{MX} = \overline{\mathrm{X}}^\top (\lambda \mathrm{X}) = \lambda \overline{\mathrm{X}}^\top \mathrm{X} &= \lambda (\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k x_k = \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}_{\in \mathbb{R}}.\end{aligned}$$

- D'autre part, en conjuguant les deux membres de l'égalité $\mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X}$, sachant que la conjugaison passe à travers les combinaisons linéaires et les produits, on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{M}} \times \overline{\mathrm{X}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathrm{X}} &\Longleftrightarrow \mathrm{M} \times \overline{\mathrm{X}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathrm{X}} \quad \textit{(car M est à coefficients réels)} \\ &\Longleftrightarrow \overline{\mathrm{X}}^\top \mathrm{M}^\top = \overline{\lambda}\,\overline{\mathrm{X}}^\top \quad \textit{(en appliquant la transposition, et en utilisant ses propriétés)} \\ &\Longleftrightarrow \overline{\mathrm{X}}^\top \mathrm{M} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathrm{X}}^\top \quad \textit{(car M est symétrique).}\end{aligned}$$

  On multiplie à present les deux membres de cette égalité à droite par X, ce qui nous donne

$$\overline{\mathrm{X}}^\top \mathrm{MX} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathrm{X}}^\top \mathrm{X} = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

- On obtient par conséquent que

$$\overline{\mathrm{X}}^\top \mathrm{MX} = \lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{X}}^\top \mathrm{MX} = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2,$$

  donc

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$$

or $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ est un réel non nul, car x est un vecteur non nul en tant que vecteur propre, donc on peut multiplier les deux membres de cette égalité par son inverse et obtenir l'égalité

$$\lambda = \overline{\lambda},$$

qui prouve bien que $\boxed{\lambda \text{ est un réel}}$.
Et on a vu en cours de route que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et si X est un vecteur propre associé,

$$\overline{X}^\top MX = \lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \lambda \overline{X}^\top X.$$

On sait que $\lambda \in \mathbb{R}$ et que X est à coefficients réels, donc

$$X^\top MX = \lambda X^\top X.$$

On sait en outre que X est par hypothèse un vecteur non nul, donc que sa norme $\|X\|^2 = X^\top X$ est un réel strictement positif, et par conséquent

$$\lambda = \frac{X^\top MX}{X^\top X}.$$

Une preuve de la proposition 14.27 *énoncé*

Soient λ, μ deux valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint u, avec $\lambda \neq \mu$.
Prenons $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$, alors

$$\begin{aligned} \lambda\langle x \mid y\rangle &= \langle \lambda x \mid y\rangle\langle u(x) \mid y\rangle \\ &= \langle x \mid u(y)\rangle \ \textit{(car u est autoadjoint)} \\ &= \langle x \mid \mu y\rangle = \mu\langle x \mid y\rangle. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda\langle x \mid y\rangle &= \mu\langle x \mid y\rangle, \\ \text{c'est-à-dire } (\lambda-\mu)\langle x \mid y\rangle &= 0 \\ \text{d'où } \langle x \mid y\rangle &= 0 \ \textit{car } \lambda \neq \mu. \end{aligned}$$

Donc $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$.

Une correction de l'exercice 14.19 *énoncé*

(1) On a pris un endomorphisme u de E autoadjoint, donc par le théorème spectral, il est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une telle base, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres respectives.

Soit x un vecteur de E.

➟ Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, on sait que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i,$$

donc par linéarité

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x \mid e_i \rangle e_i.$$

➟ Or pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, le vecteur e_i forme à lui tout seul une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(e_i)$, donc

$$p_{\mathrm{Vect}(e_i)}(x) = \langle x \mid e_i \rangle e_i$$ *(par le second point de la proposition 14.11),*

ainsi

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{\mathrm{Vect}(e_i)}(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{\mathrm{Vect}(e_i)} \right)(x)$$

On a bien prouvé que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{\mathrm{Vect}(e_i)}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

(2) Pour tout $x \in$ E, comme on sait que $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x \mid e_i \rangle e_i$, et comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée :

$$\begin{aligned} \Phi_u(x,x) = \langle u(x) \mid x \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \langle x \mid e_i \rangle) \times \langle x \mid e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x \mid e_i \rangle^2 . \end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 14.30 *énoncé*

D'après le théorème spectral, tout endomorphisme symétrique u de E est orthodiagonalisable, autrement dit diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres, associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
Alors pour tout $x \in \mathrm{E}$, on sait que

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\, e_i$$

donc par linéarité de u

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\, \lambda_i e_i,$$

ainsi grâce aux règles de calcul du produit scalaire dans une base orthonormée

$$(u(x) \mid x) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\, \lambda_i \times (x \mid e_i) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2\, \lambda_i.$$

On en déduit que :

- si $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$, alors par définition pour tout $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, $(u(x) \mid x) > 0$, donc en particulier pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$,

  $$\left(u(e_j) \mid e_j\right) > 0,$$

  or

  $$\left(u(e_j) \mid e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(e_j \mid e_i\right)^2}_{=\delta_{i,j}} \lambda_i = \lambda_j,$$

  donc $\lambda_j > 0$.
- Réciproquement, si $\mathrm{Sp}(u) \subset [0 ; +\infty[$, alors pour tout $x \in \mathrm{E}$,

  $$(u(x) \mid x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x \mid e_i)^2\, \lambda_i}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$

  et

  $$\begin{aligned} (u(x) \mid x) = 0 &\iff \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2\, \lambda_i = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1 ; n]\!],\ (x \mid e_i)^2\, \lambda_i = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1 ; n]\!],\ (x \mid e_i)^2 = 0 \ \ (\textit{car } \lambda_i > 0) \\ &\iff x = 0_{\mathrm{E}}, \end{aligned}$$

donc $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$.

Une correction de l'exercice 14.20

énoncé

1. Par le théorème spectral, u est un endomorphisme autoadjoint, donc il est diagonalisable dans une base $\mathscr{B}$ de vecteurs propres. Dans cette base, la matrice de u est
$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$
en notant $\mathrm{Sp}(u) = \{\,\lambda_1, \dots, \lambda_n\,\}$.
On sait de plus que u est autoadjoint positif, donc ses valeurs propres sont positives.
Notons v l'endomorphisme de E qui a pour matrice $\mathrm{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ dans la base $\mathscr{B}$, alors
$$\begin{aligned}\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(v^2) &= \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(v)^2 \quad \textit{(par propriété fondamentale du produit matriciel)}\\ &= \mathrm{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)^2 = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \textit{(par propriété du produit de matrices diagonales)}\\ &= \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(u),\end{aligned}$$
donc $v^2 = u$, car $\square \mapsto \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(\square)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit v une solution, c'est-à-dire un endomorphisme autoadjoint positif qui vérifie $v^2 = u$.
   - ➟ Comme u et v commutent, puisque
   $$u \circ v = v^2 \circ v = v^3 = v \circ v^2 = v \circ u,$$
   on sait que les sous-espaces propres de u sont stables par v.
   Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, posons $\mathrm{F} = \mathrm{E}_\lambda(u)$, et v_F l'endomorphisme de F induit par v.
   - ➟ Comme v est autoadjoint, il est diagonalisable, donc v_F aussi grâce à la proposition 11.18.
   - ➟ De plus, pour toute valeur propre μ de v_F, et vecteur propre $x \in \mathrm{F}$ de v_F
   $$\begin{aligned}&(v_\mathrm{F})^2(x) = v^2(x) = u(x) = \lambda x \quad \textit{(car } x \in \mathrm{F} = \mathrm{E}_\lambda(u)\textit{)},\\ &(v_\mathrm{F})^2(x) = \mu^2 x,\end{aligned}$$
   ainsi $\left(\lambda - \mu^2\right) x = 0_\mathrm{E}$, et comme x est non nul par définition d'un vecteur propre, on obtient $\mu^2 = \lambda$.
   - ➟ De plus $\mathrm{Sp}(v_\mathrm{F}) \subset \mathrm{Sp}(v)$, donc les valeurs propres de v_F sont positives comme celles de v, et par conséquent $\mu = \sqrt{\lambda}$.
   - ➟ Ainsi v_F admet pour unique valeur propre $\sqrt{\lambda}$ et est diagonalisable, donc $v_\mathrm{F} = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_\mathrm{F}$.

   Ceci détermine v de manière unique sur chaque sous-espace propre de u et puisque ceux-ci sont supplémentaires dans E, on peut conclure l'unicité de v.

Une correction de l'exercice 14.21 *énoncé*

1. Notons $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   Pour tout $j \in [\![1 \,;\, n]\!]$, on sait grâce à la remarque 14.2 que

$$s_{j,j} = E_i^\top \times S \times E_j$$

   donc par définition d'une matrice symétrique positive, $s_{j,j} \geqslant 0$.
2. Le théorème spectral nous donne l'existence de P. Posons $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
   Pour tout $j \in [\![1 \,;\, n]\!]$, grâce à la formule du produit matriciel :

$$\begin{aligned} s_{j,j} &= \left(P\Delta P^\top\right)_{j,j} = \sum_{k=1}^{n} (P\Delta)_{j,k} \left(P^\top\right)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (P\Delta)_{j,k} p_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} p_{j,\ell} (\Delta)_{\ell,k} \right) p_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} \left(p_{j,k}\lambda_k\right) p_{j,k} \qquad \left(\text{car } \Delta_{\ell,k} = \begin{cases} \lambda_k & \text{si } \ell = k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_{j,k}^2. \end{aligned}$$

3. Les colonnes de P forment une base orthonormée, donc pour tout i$\in [\![1 \,;\, n]\!]$, les $(p_{k,i}^2)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont positifs ou nuls et de somme égale à 1.
   De plus S est symétrique positive, donc les λ_i sont dans $[0 \,;\, +\infty[$, où f est convexe,

> *f est convexe sur I si et seulement si*
>
> $$\forall (a,b) \in I^2, \ \ \forall t \in [0,1], f(ta + (1-t)b) \leqslant t f(a) + (1-t) f(b).$$
>
> *Et cette inégalité se généralise par récurrence à*
>
> $$\forall (a_1, \dots, a_n) \in I^2, \ \forall (t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1,$$
> $$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i).$$

   Ainsi

$$f(s_{i,i}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}^2 f(\lambda_k).$$

Donc en additionnant des inégalités pour i de 1 à n :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(s_{i,i}) &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{k,i}^2 f(\lambda_k) = \sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} p_{k,i}^2 f(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{k,i}^2 f(\lambda_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{k,i}^2\right) f(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \ \textit{(car } \mathrm{P}\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})\textit{)}\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \ \textit{(pour éviter l'indice } k,k \textit{ dans la question suivante).}\end{aligned}$$

4. La matrice S étant définie positive, ses valeurs propres sont toutes strictement positives, ainsi que $\det \mathrm{S} = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$, d'où

$$\begin{aligned}\ln(\det \mathrm{S}) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(\lambda_k) \ \textit{(par propriété fondamentale du logarithme)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(\lambda_k),\end{aligned}$$

Mais la fonction $f = -\ln$ est convexe sur $]0 \,;\, +\infty[$ car elle est $\mathscr{C}^2$ de dérivée $x \mapsto +\frac{1}{x^2}$ positive, donc en appliquant l'inégalité de la question précédente :

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1}^{n} \ln\left(s_{i,i}\right) &= \sum_{i=1}^{n} (-\ln)\left(s_{i,i}\right)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} (-\ln)(\lambda_i) = -\ln(\det(\mathrm{S}))\end{aligned}$$

d'où l'inégalité cherchée en passant à l'opposé (fonction décroissante) puis à l'exponentielle (fonction croissante).

Par continuité, la majoration de la question 4 s'étend aux matrices de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Une correction de l'exercice 14.22 — *énoncé*

➟ Supposons que A est symétrique et a ses valeurs propres positives, alors

- A est diagonalisable grâce au théorème spectral, et il existe $\mathrm{P} \in \mathscr{O}(n)$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{P}^\top \mathrm{DP}$, où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de A.

- Notons alors $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, et $B = \Delta P$, on a alors

$$\begin{aligned} B^\top B &= (\Delta P)^\top \times (\Delta P) = P^\top \Delta^\top \Delta P \\ &= P^\top \Delta^2 P \quad \textit{(car Δ est diagonale)} \\ &= P^\top D P \quad \textit{(par les propriétés du produit des matrices diagonales)} \\ &= A. \quad \textsc{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

➟ Réciproquement, si $A = B^\top B$ où $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors

- $A^\top = \left(B^\top B\right)^\top = B^\top \left(B^\top\right)^\top = B^\top B = A$, donc A est une matrice symétrique.
- Soit λ une valeur propre de A, comme A est symétrique réelle, on sait que λ est un réel. De plus, prenons un vecteur propre X de A associé à λ, alors

$$\begin{aligned} AX = \lambda X \iff B^\top BX = \lambda X \\ &\Rightarrow X^\top B^\top BX = X^\top \times \lambda X \quad \textit{(en multipliant à gauche par $X^\top$)} \\ &\Rightarrow (BX)^\top (BX) = \lambda X^\top X \iff \|BX\|^2 = \lambda \|X\|^2 \\ &\iff \lambda = \frac{\|BX\|^2}{\|X\|^2} \quad \textit{(car X est un vecteur propre, donc est non nul, d'où $\|X\|^2 \neq 0$),} \end{aligned}$$

d'où λ est un réel positif, c.q.f.d.

Une correction de l'exercice 14.23

énoncé

On se débrouille pour obtenir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

qui vérifie

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad \Phi(X) = X^\top AX.$$

La matrice A est une matrice symétrique réelle, donc ortho-diagonalisable.
Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = (X-1)(X-2)(X-3),$$

donc les valeurs propres de A sont strictement positives, ce qui fait de A une matrice symétrique définie positive.
On en déduit que l'application $(X, Y) \mapsto X^\top AY$ est bien un produit scalaire sur E, et que $\Phi(X) = \sqrt{X^\top AX}$ est bien la norme associée.
Les sous-espaces propres de A sont

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \ E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right), \ \text{ et } \ E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

On savait déjà que les sous-espaces propres étaient deux à deux orthogonaux, donc en normalisant chaque vecteur propre, on a obtenu une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, que l'on prend en colonnes pour obtenir la matrice de passage orthogonale

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

qui vérifie donc

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=D} P^\top.$$

Ainsi pour tout $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(X) = X^\top AX = X^\top PDP^\top X = \left(P^\top X\right)^\top D \left(P^\top X\right),$$

or

$$P^\top X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2a+2b+c \\ a+2b-2c \\ 2a+b+2c \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2a+2b+c & a+2b-2c & 2a+b+2c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2a+2b+c \\ a+2b-2c \\ 2a+b+2c \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}(-2a+2b+c)^2 + \frac{2}{9}(a+2b-2c)^2 + (2a+b+2c)^2. \end{aligned}$$