Question de cours 1

1. Donner la définition de deux matrices semblables.
   Caractériser le fait que deux matrices sont semblables.
2. Définir la trace d'une matrice, et la trace d'un endomorphisme.
   Que vaut la trace d'un projecteur ?
3. Donner la formule du développement d'un déterminant par rapport à une ligne, ou une colonne.
4. Donner la base de Lagrange (et les coordonnées de tout polynôme dans cette base), et le déterminant de Vandermonde, associés à $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{K}$. Étudier l'inversibilité, et donner son inverse le cas échéant, de la matrice $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de terme général

$$b_{i,j} = \begin{cases} a^{j-i}, & \text{si } i \leqslant j\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2

1. Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ qui commutent avec
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. En déduire les solutions dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ de l'équation $\mathrm{X}^2 = \mathrm{A}$.

Exercice 3

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$.

(mis à jour le 30 novembre 2023)

Exercice 4

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les réels $(x_1 = 0, x_2, \dots, x_n)$ la matrice $\mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $m_{i,j} = 1 + \delta_{i,j} x_i$ est-elle inversible ?
Donner son inverse le cas échéant.
Indication : il est souvent utile de se faire une idée du résultat final en étudiant d'abord les petites valeurs de n. (Remarquer que $x_1 = 0$, donc que $m_{1,1} = 1$.)

Exercice 5

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'application φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$.
Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et déterminer $\mathrm{Tr}(\varphi)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$, et on considère la matrice carrée M d'ordre n de terme général $\mathrm{M}_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)}$.
Calculer M^2, et en déduire $|\det(\mathrm{M})|$.

Exercice 7

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'application φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$.
Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et déterminer $\mathrm{Tr}(\varphi)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$.

Exercice 8

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$.
Montrer que f peut être représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in [\![1 \,;\, n]\!]$, et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = r$ et $\mathrm{A}^2 = 0_n$.
   Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B}^2 = 0_n$, et $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{B})$.
   Montrer que les matrices A et B sont semblables.
3. Le résultat est-il encore vrai en remplaçant 2 par 3 ?

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Si $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$, peut-on en déduire que p est un projecteur ?
2. On suppose que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p) = 1$, montrer que p est un projecteur.

Exercice 11

Montrer que l'application $\Phi : \mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^\top$, de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, est un endomorphisme, et donner son déterminant.

Exercice 12

Soit x un réel. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathrm{V}_j = \begin{pmatrix} a_j \\ a_j^2 \\ \vdots \\ a_j^n \end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant dans la base canonique de la famille

$$\left(\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_2 + \mathrm{V}_3, \mathrm{V}_3 + \mathrm{V}_4, \ldots, \mathrm{V}_{n-1} + \mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n + \mathrm{V}_1\right).$$

Solutions

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

On traite les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, à la vue desquels on conjecture que l'inverse de B est la matrice C dont le terme général vaut

$$(\mathrm{C})_{i,} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j\,; \\ -a, & \text{si } j - i = 1\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{B} \times \mathrm{C})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{B})_{i,k}(\mathrm{C})_{k,j} = (\mathrm{B})_{i,j-1} \times (-a) + (\mathrm{B})_{i,j} \times 1 \\ &= \begin{cases} 0 \times (-a) + 0 \times 1 = 0 & \text{si } j < i, \\ 0 \times (-a) + 1 \times 1 = 1 & \text{si } j = i, \\ a^{j-1-i} \times (-a) + a^{j-i} \times 1 = 0 & \text{si } j > i \end{cases} \\ &= \delta_{i,j},\end{aligned}$$

donc $\mathrm{B} \times \mathrm{C} = \mathrm{I}_n$ C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

1. On pose $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on calcule AX et XA, dont on identifie les coefficients, et on obtient que $\mathrm{AX} = \mathrm{XA}$ si, et seulement si, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

2. Si $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est solution de $\mathrm{X}^2 = \mathrm{A}$, alors en particulier

   $$\mathrm{AX} = \mathrm{X}^2\mathrm{X} = \mathrm{X}^3 = \mathrm{X}\mathrm{X}^2 = \mathrm{XA}$$

   donc X commute avec A, et par conséquent, grâce à la question précédente, X est de la forme $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Nous n'avons donc plus qu'à chercher les solutions de $X^2 = A$ parmi les matrices de cette forme.

Si $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} X^2 = A &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff a = b = c = 1 \text{ ou } a = b = c = -1 \end{aligned}$$

donc les solutions de $X^2 = A$ sont les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une correction de l'exercice 3

énoncé

On remarque que la somme des trois lignes donne une ligne constante, dont peut être mise en facteur pour laisser une ligne de 1.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} &\underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \\ &= (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+a+b+c) \times 1 \\ &= 1+a+b+c \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

1. En soustrayant, dans la matrice M, la ligne L_1 à chacune des lignes de L_2 à L_n, on obtient la matrice triangulaire supérieure ci-dessous (qui a le même déterminant que M car ces opérations élémentaires ne modifient pas le déterminant) :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, donc son déterminant s'obtient par le produit des termes diagonaux : $x_2 \times \cdots \times x_n$.
Ainsi, $\det(\mathrm{M}) = x_1 \cdots x_n$, et par conséquent M est inversible si, et seulement si, aucun des x_i n'est nul.

2. Par la méthode de Gauss-Jordan,

> *La méthode de Gauss Jordan est la méthode par laquelle on place côte à côte* A *et* I_n*, on effectue des opérations sur les lignes sur l'ensemble* $\left(\mathrm{A} \mid \mathrm{I}_n\right)$ *jusqu'à obtenir la matrice* $\left(\mathrm{I}_n \mid \mathrm{B}\right)$*, et la matrice* B *est alors* A^{-1}*.*

nous obtenons

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{x_2} & -\frac{1}{x_2} \\ -\frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 \end{pmatrix}^{-1} \mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} & -\frac{1}{x_2} & -\frac{1}{x_3} \\ -\frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_2} & 0 \\ -\frac{1}{x_3} & 0 & \frac{1}{x_3} \end{pmatrix},$$

on va donc montrer que l'inverse de M est la matrice

$$\mathrm{N}=\begin{pmatrix} 1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{x_k} & -\frac{1}{x_2} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{1}{x_n} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{x_n} \end{pmatrix}.$$

Soit $(i,j)\in[\![1\ ;\ n]\!]^2$, alors

$$(\mathrm{M}\times\mathrm{N})_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{M})_{i,k}(\mathrm{N})_{k,j}.$$

➟ Si $i=j=1$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})_{i,j}=(\mathrm{M}\times\mathrm{N})_{1,1}&=\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{M})_{1,k}(\mathrm{N})_{k,1}\\&=(\mathrm{M})_{1,1}(\mathrm{N})_{1,1}+\sum_{k=2}^{n}(\mathrm{M})_{1,k}(\mathrm{N})_{k,1}\\&=1\times\left(1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_k}\right)+\sum_{k=2}^{n}1\times\left(-\frac{1}{x_k}\right)\\&=1,\end{aligned}$$

- si $i>1$ et $j=1$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{M}\times\mathrm{N})_{i,j} = (\mathrm{M}\times\mathrm{N})_{i,1} &= \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{M})_{i,k}(\mathrm{N})_{k,1}\\
&= 1\times\left(1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_k}\right)+\sum_{k=2}^{i-1}1\times\left(-\frac{1}{x_k}\right)\\
&+(1+x_i)\times\left(-\frac{1}{x_i}\right)+\sum_{k=i+1}^{n}1\times\left(-\frac{1}{x_k}\right)\\
&= 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_k}+\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{x_k}\right)+\underbrace{x_i\times\left(-\frac{1}{x_i}\right)}_{=-1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

- si $i=1$ et $j>1$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{M}\times\mathrm{N})_{i,j} = (\mathrm{M}\times\mathrm{N})_{1,j} &= \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{M})_{1,k}(\mathrm{N})_{k,j}\\
&= \sum_{k=1}^{n}1\times(\mathrm{N})_{k,j} = -\frac{1}{x_j}+\frac{1}{x_j}=0
\end{aligned}$$

- si $i>1$ et $j>1$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{M}\times\mathrm{N})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{M})_{i,k}(\mathrm{N})_{k,j}\\
&= (\mathrm{M})_{i,1}\times\left(-\frac{1}{x_j}\right)+(\mathrm{M})_{i,j}\times\frac{1}{x_j}\\
&= \frac{1}{x_j}\times\Big((\mathrm{M})_{i,j}-(\mathrm{M})_{i,1}\Big) = \frac{1}{x_j}\times\Big((\mathrm{M})_{i,j}-1\Big)\\
&= \begin{cases}\dfrac{1}{x_j}\times(1-1)=0 & \text{si } i\neq j,\\ \dfrac{1}{x_j}\times\Big(1+x_j-1\Big)=1 & \text{si } i=j.\end{cases}
\end{aligned}$$

- Donc dans tous les cas $(\mathrm{M}\times\mathrm{N})_{i,j}=\delta_{i,j}$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, pour toute matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{E}_{ij}) = \mathrm{AE}_{ij} &= \left(\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} a_{k\ell}\mathrm{E}_{k\ell}\right)\mathrm{E}_{ij} = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} a_{k\ell}\mathrm{E}_{k\ell}\mathrm{E}_{ij}\\ &= \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} a_{k\ell}\delta_{\ell i}\mathrm{E}_{kj} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{ki}\mathrm{E}_{kj}\end{aligned}$$

Sur la diagonale de la matrice de φ dans la base canonique $\left(\mathrm{E}_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il y a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ la coordonnée de $\varphi(\mathrm{E}_{ij})$ sur E_{ij}, c'est-à-dire a_{ii}, d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\varphi) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ii} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\mathrm{Tr}(\mathrm{A})\\ &= n\mathrm{Tr}(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

$\mathrm{M}^2 = n\left(\mathrm{E}_{11} + \sum_{i=2}^{n}\mathrm{E}_{i,n-i+2}\right)$.

Par permutation des colonnes $\det(\mathrm{M}^2) = (-1)^{n(n-1)/2}n^n$, donc $|\det(\mathrm{M})| = n^{n/2}$.

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, pour toute matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{E}_{ij}) = \mathrm{AE}_{ij} &= \left(\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} a_{k\ell}\mathrm{E}_{k\ell}\right)\mathrm{E}_{ij} = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} a_{k\ell}\mathrm{E}_{k\ell}\mathrm{E}_{ij}\\ &= \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} a_{k\ell}\delta_{\ell i}\mathrm{E}_{kj} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{ki}\mathrm{E}_{kj}\end{aligned}$$

Sur la diagonale de la matrice de φ dans la base canonique $\left(\mathrm{E}_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il y a pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ la coordonnée de $\varphi(\mathrm{E}_{ij})$ sur E_{ij}, c'est-à-dire a_{ii}, d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\varphi) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ii} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\operatorname{Tr}(\mathrm{A})\\ &= n\operatorname{Tr}(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 8

énoncé

Il s'agit de montrer l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f aura pour matrice $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

- On sait que $f\neq 0$, donc $\operatorname{rg}(f)\geqslant 1$, et par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(f))\leqslant 2$.
- Mais $f^2=0$, donc *(je vous laisse prouver que)* $\operatorname{Im}(f)\subset\operatorname{Ker}(f)$, d'où $\operatorname{rg}(f)\leqslant\dim(\operatorname{Ker}(f))$.
  Mais le théorème du rang nous dit que $\operatorname{rg}(f)=3-\dim(\operatorname{Ker}(f))$, donc $\dim(\operatorname{Ker}(f))\geqslant\frac{3}{2}$.
- On en déduit que $\dim(\operatorname{Ker}(f))=2$, et que $\dim(\operatorname{Im}(f))=1$.
- On en déduit donc qu'on peut prendre un vecteur e_2 non nul qui engendre $\operatorname{Im}(f)$.
  Par définition de $\operatorname{Im}(f)$, il existe un vecteur e_3 tel que $f(e_3)=e_2$, et comme $e_2\neq 0$, $e_3\notin\operatorname{Ker}(f)$.
  De plus $\operatorname{Im}(f)\subset\operatorname{Ker}(f)$, donc $e_2\in\operatorname{Ker}(f)$, et $f(e_2)=0$.
  Comme $\operatorname{Ker}(f)$ est de dimension 2, on peut compléter la famille libre (e_2) en une base (e_1,e_2) de $\operatorname{Ker}(f)$.
  On sait que (e_1,e_2) est libre, et que e_3 n'est pas dans $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$, donc on peut affirmer (d'après le second point de la proposition 2.4) que la famille (e_1,e_2,e_3) est libre.

Comme elle a le nombre requis de vecteurs, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

➟ Enfin

$$\begin{aligned}\underset{(e_1,e_2,e_3)}{\mathrm{Mat}}(f) &= \underset{(e_1,e_2,e_3)}{\mathrm{Mat}}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))\\ &= \underset{(e_1,e_2,e_3)}{\mathrm{Mat}}(0,,e_2)\\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 10 *énoncé*

1. La matrice $\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$ a pour rang 2 et pour trace 2, mais son carré est différent d'elle-même.
2. Supposons que $\mathrm{rg}(p)=\mathrm{Tr}(p)=1$, et notons M la matrice de p dans une base de E.
   Alors $\mathrm{rg}(\mathrm{M})=\mathrm{Tr}(\mathrm{M})=1$.
   Dans ce cas, la famille de ses vecteurs colonnes engendre un sous-espace vectoriel de dimension 1, c'est-à-dire une droite vectorielle Vect(C) où $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$ est une matrice-colonne non nulle.
   Ainsi pour chacune des colonnes $\mathrm{C}_1,\ldots,\mathrm{C}_n$ de M, il existe un réel λ_j qui vérifie $\mathrm{C}_j=\lambda_j\mathrm{C}$. On obtient ainsi

$$\mathrm{M}=\left(\lambda_j c_i\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

   soit, en posant $\mathrm{L}=\begin{pmatrix}\lambda_1\cdots\lambda_n\end{pmatrix}$ qui est une matrice-ligne, non nulle car sinon M serait nulle, $\mathrm{M}=\mathrm{CL}$.
   On en déduit que $\mathrm{M}=\mathrm{CL}=\left(\lambda_j c_i\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. En particulier $\mathrm{LC}=\left(\sum_{i=1}^n c_i\lambda_i\right)\in\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$, et $\mathrm{tr}(\mathrm{M})=\sum_{i=1}^n\lambda_i c_i\in\mathbb{K}$, donc en confondant les scalaires et les matrices de $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$, $\mathrm{LC}=\mathrm{tr}(\mathrm{A})$.

Ainsi $M^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = \mathrm{tr}(M)CL = \mathrm{tr}(M)M$, mais comme on a supposé que $\mathrm{Tr}(M) = 1$, on obtient $M^2 = M$, ce qui prouve que $p^2 = p$ et que p est un projecteur.

Une correction de l'exercice 11

énoncé

La matrice de Φ dans une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ adaptée au sous-espace vectoriel des matrices symétriques, et à celui matrices antisymétriques, est une matrice diagonale avec des 1 pour les matrices symétriques, et des -1 pour les antisymétriques. Donc le déterminant de Φ est le déterminant de cette matrice, c'est-à-dire $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, car le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques a pour dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ (ce résultat a été vu en exemple du cours).

Une correction de l'exercice 12

énoncé

En développant suivant la première ligne :

$$\Delta_n(x) = (1+x^2)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x).$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique (d'inconnue r)

$$r^2 - (1+x^2)r + x^2 = 0$$

dont on trouve les racines x^2 et 1 à l'œil nu vu qu'on se souvient des relations entre racines et coefficients.

On en déduit que si $x \notin \{-1,1\}$, il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_n(x) = a \times 1^n + b \times \left(x^2\right)^n = a + bx^{2n}.$$

À l'aide de $\Delta_1(x) = 1+x^2$ et $\Delta_2(x) = (1+x^2)^2 - x^2 = 1+x^2+x^4$, on obtient $a = \frac{1}{1-x^2}$ et $b = -\frac{x^2}{1-x^2}$, d'où après simplifications

$$\Delta_n(x) = \frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}.$$

Mais $\Delta_n(x)$ est un déterminant, donc si on le développait totalement on obtiendrait une forme polynomiale en x, et en particulier la fonction $x \mapsto \Delta_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
En particulier la continuité en ± 1 nous donne

$$\Delta_n(\pm 1) = \lim_{x \to \pm 1} \Delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

Une correction de l'exercice 13 *énoncé*

Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

- Tout d'abord, remarquons qu'en factorisant chaque colonne V_j par a_j on obtient grâce à la linéarité par rapport à chaque colonne que

$$\begin{aligned}
\det_{\mathscr{C}}(V_1, \dots, V_n) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots \dots a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 \dots \dots a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n \dots \dots a_{n-1}^n & a_n^n \end{vmatrix} \\
&= a_1 \times \dots \times a_n \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots \dots \dots 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \dots \dots a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} \dots \dots a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= a_1 \times \dots \times a_n \times V_n(a_1, \dots, a_n) \\
&= a_1 \times \dots \times a_n \times \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_j - a_i).
\end{aligned}$$

- La linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne nous donne

$$\begin{aligned}
&\det_{\mathscr{C}}(V_1 + V_2, V_2 + V_3, V_3 + V_4, \dots, V_{n-1} + V_n, V_n + V_1) \\
&= \det_{\mathscr{C}}(V_1 + V_2, V_2 + V_3, V_3 + V_4, \dots, V_{n-1} + V_n, V_n) \\
&\quad \det_{\mathscr{C}}(V_1 + V_2, V_2 + V_3, V_3 + V_4, \dots, V_{n-1} + V_n, V_1).
\end{aligned}$$

  - Dans

$$\det_{\mathscr{C}}(V_1 + V_2, V_2 + V_3, V_3 + V_4, \dots, V_{n-1} + V_n, V_n)$$

on effectue les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_{j+1}$ pour j allant de $n-1$ à 1, et comme ces opérations conservent le déterminant, on obtient

$$\begin{aligned}&\det_{\mathscr{C}}\left(V_1+V_2, V_2+V_3, V_3+V_4, \ldots, V_{n-1}+V_n, V_n\right)\\&\quad=\det_{\mathscr{C}}\left(V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{n-1}, V_n\right).\end{aligned}$$

- Dans le second déterminant

$$\det_{\mathscr{C}}\left(V_1+V_2, V_2+V_3, V_3+V_4, \ldots, V_{n-1}+V_n, V_1\right)$$

on effectue d'abord $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$, puis les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ pour j allant de 2 à $n-1$, qui donnent

$$\begin{aligned}&\det_{\mathscr{C}}\left(V_1+V_2, V_2+V_3, V_3+V_4, \ldots, V_{n-1}+V_n, V_1\right)\\&\quad=\det_{\mathscr{C}}(V_2, V_3, \ldots, V_n, V_1),\end{aligned}$$

puis les $n-1$ échanges $C_j \leftarrow C_{j+1}$ pour j allant de $n-1$ à 1 donnent, sachant qu'un échange de lignes ou de colonnes change le signe du déterminant,

$$\begin{aligned}&\det_{\mathscr{C}}\left(V_1+V_2, V_2+V_3, V_3+V_4, \ldots, V_{n-1}+V_n, V_1\right)\\&\quad=\det_{\mathscr{C}}(V_2, V_3, \ldots, V_n, V_1)\\&\quad=(-1)^{n-1}\det_{\mathscr{C}}\left(V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, V_n\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&\det_{\mathscr{C}}\left(V_1+V_2, V_2+V_3, V_3+V_4, \ldots, V_{n-1}+V_n, V_n+V_1\right)\\&\quad=\left(1+(-1)^n\right)\det_{\mathscr{C}}\left(V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{n-1}, V_n\right)\\&\quad=\begin{cases}2a_1\times\cdots\times a_n\times\displaystyle\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_j-a_i) & \text{si } n \text{ est pair,}\\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}\end{aligned}$$