(i) L'élève Chaprot n' pas arrêté de commettre l'erreur qui consiste à affirmer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p^n$ *est égale à* $\frac{1}{1-p}$, *sans prêter attention au fait l'indice minimal dans la somme est* 1, *et non* 0 *!*
Donc je rappelle que si $|x| < 1$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

$$\text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x \times \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = x \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

$$\text{ou aussi} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$$

(ii) N'oubliez pas que très souvent la bonne démarche pour déterminer la probabilité d'un événement B *est de*

étape 1 : *commencer par analyser, décomposer l'événement* B *(par exemple dans le cas d'une succession d'expériences, on peut écrire* B *comme intersection et/ou réunions d'événements du type* P_i*) ;*

étape 2 : *puis en déduire* $\mathbb{P}(B)$ *en appliquant les propriétés de la probabilité (σ-additivité, probabilité d'une intersection, continuité croissante ou décroissante, etc).*

(iii) Donner la loi de probabilité d'une variable X, *c'est donner :*

- *l'ensemble* $X(\Omega)$ *des valeurs de* X,
- *les probabilités* $\mathbb{P}(X = x)$ *pour toutes les valeurs* $x \in X(\Omega)$.

Donner la loi conjointe d'un couple (X, Y) *de variables aléatoires, c'est donner :*

- *les ensembles* $X(\Omega)$ *et* $Y(\Omega)$ *des valeurs de* X *et* Y,
- *les probabilités* $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$ *pour tous les couples de valeurs* $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Questions de cours 1

1. Qu'est-ce que la loi conjointe d'un couple aléatoire discret (X,Y) ?

   C'est la donnée

   - *des ensembles* $X(\Omega)$ *et* $Y(\Omega)$ *des valeurs de* X *et* Y,
   - *et pour tout couple* $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ *de la probabilité* $\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y))$.,

   Que sont les lois marginales d'un couple aléatoire discret (X,Y) ?

   Ce sont les lois de X *et de* Y.

   Comment les retrouve-t-on ?

   En utilisant la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par l'une ou l'autre des variables : Pour tout $y\in Y(\Omega)$,

   $$\mathbb{P}(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y))=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)\times\mathbb{P}_{(X=x)}(Y=y).$$

   De même, pour tout $x\in X(\Omega)$,

   $$\mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y))=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(Y=y)\times\mathbb{P}_{(Y=y)}(X=x).$$

2. Qu'est-ce que la covariance d'un couple aléatoire discret ?

   Soient X *et* Y *deux variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}(X^2)$ *et* $\mathbb{E}(Y^2)$ *existent.*
   Alors le réel $\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ *existe, on le note* $\mathrm{Cov}(X,Y)$, *et on l'appelle* ***covariance*** *de* X *et* Y.

   Que vaut la variance d'une somme de variables ?

   $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

3. Qu'est-ce qu'une suite i.i.d de variables ?

   C'est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi de probabilité.

4. Donner la loi faible des grands nombres.

*Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, qui suivent toutes la même loi d'espérance m et de variance σ^2, alors en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'**estimation** suivante :*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

5. Quel est la formule la plus utilisée dans ce chapitre ?

C'est la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par une variable aléatoire.

Exercice 1

Soit $n \geqslant 2$, et (X, Y) un couple aléatoire discret à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]^2$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ pour lequel

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = k\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Déterminer la valeur de k.
2. Donner les lois de probabilité de X et Y, reconnaître la loi de $X - 1$ et déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Étudier l'indépendance de X et Y.

Exercice 2

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0\,;1[$).

On pose $Y_n = X_n X_{n+1} X_{n+2}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. Pour tout entier $n \geqslant 3$, déterminer la variance de S_n.

Exercice 3

On effectue une succession indéfinie de lancers indépendants avec une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in \ ]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = (1-p)$.
On dit que la première série est de longueur $L_1 = n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième, l'autre.
On définit de même la longueur L_2 de la 2-ieme série.

1. Déterminer la loi de L_1 *(vérifier ce résultat)*.
2. Calculer l'espérance de L_1. Pour quelle valeur de p, $E(L_1)$ est-elle minimum ?
3. Donner la loi du couple (L_1, L_2).
4. Déterminer la loi de L_2, puis son espérance.
5. L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?
6. On admet l'existence de la covariance de L_1 et L_2. Son signe est-il prévisible ?

Exercice 4

1. Soit $p \in \ ]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant « pile » avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois « pile ». Soit X le nombre aléatoire de « face » obtenus au cours de cette expérience.
   (a) Déterminer la loi de X. *(Vérifier ce résultat.)*
   (b) Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.
2. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et calculer sa valeur.
3. Montrer que Y et $Z = X - Y$ sont indépendantes.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0\,;1[$. On pose $D = Y - X$ si $Y > X$ et $D = 0$ sinon.

1. Donner la loi de D.
2. Montrer que D admet une espérance dont on donnera la valeur.

Exercice 6

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée ($c \in \mathbb{N}^*$). On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages (n étant un entier fixé supérieur ou égal à 2).
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable indicatrice de « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche ».
On définit alors, pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, la variable aléatoire $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Donner la loi de X_1, la loi du couple (X_1, X_2), et en déduire la loi de X_2.
2. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de Z_p.
4. Soit $p \leqslant n-1$.
   (a) Pour tout $k \in Z_p(\Omega)$, donner la loi de X_{p+1} conditionnée par $(Z_p = k)$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}([X_{p+1} = 1]) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$.
   (c) En déduire par récurrence que X_p suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 7

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant X)$ et $\mathbb{P}(Y = X)$.

Exercice 8

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ tel que, pour $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{2^{i+j}}$.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9

Soient a et b deux réels strictement positifs, tel que $a \leqslant 1$, et X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$ si $i < j$ et $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-b} b^i a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!}$ sinon.

1. Déterminer les lois de X et de Y. Calculer leurs espérances et leurs variances.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

Exercice 10

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et N une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1[$. On lance une pièce équilibrée N fois. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de pile obtenus.

1. Donner la loi conditionnelle de X sachant que $(N = n_0)$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{n}{k} x^n$, ainsi que sa somme.
3. Déterminer la loi de X.

Exercice 11

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0, 1[$. Déterminer les lois des variables

$$N = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = 1\} \text{ et } Y = X_{N+1} + \cdots + X_{2N}.$$

Exercice 12

Soient $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé, A et B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique.
Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation

$$(E_\omega) : y'' + (A(\omega) - 1)y' + B(\omega)y = 0$$

tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 13

1. Pour tout $\lambda \in]0 ; +\infty[$, on note X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
   Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(|X_\lambda - \lambda| \geqslant \varepsilon\lambda) \xrightarrow[\lambda \longrightarrow +\infty]{} 0$.
2. Soient, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer la limite, lorsque $\lambda \to +\infty$, de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.

Solutions

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

1. La loi conjointe donnée est valide si et seulement si

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])=1$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) &= k\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}\\ &= k\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\\ &= k\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\\ &= k\times(1+1)^n\times(1+1)^n = k\,2^{2n}.\end{aligned}$$

On conclut donc que $k\,2^{2n}=1$, donc que $k=\frac{1}{2^{2n}}$.

2. Les lois de X et de Y sont les lois marginales du couple X, Y, donc $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!]$, et pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$, grâce à la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par Y

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=i]) = \sum_{j=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) &= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}\\ &= \frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{i-1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{i-1}2^n = \binom{n}{i-1}\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

Et le résultat est le même pour Y.

La variable $X-1$ a pour ensemble de valeurs $[\![0,n]\!]$, et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X-1=k]) = \mathbb{P}([K=k+1]) &= \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

donc $X-1$ suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
On en déduit que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X-1+1) = \mathbb{E}(X-1)+1 = n \times \frac{1}{2}+1$, et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X-1) = n \times \frac{1}{4}$.

3. Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n+1]\!]^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) &= \frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}\\ &= \binom{n}{i-1}\frac{1}{2^n}\times\binom{n}{j-1}\frac{1}{2^n}\\ &= \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}([Y=j])\end{aligned}$$

donc X et Y sont indépendantes.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la variable Y_n est le produit de variables de Bernoulli qui prennent les valeurs 0 et 1, donc $Y_n(\Omega) = \{0,1\}$.

$$(Y_n = 1) = (X_n X_{n+1} X_{n+2} = 1) = (X_n = 1)\cap(X_{n+1}=1)\cap(X_{n+2}=1),$$

donc par indépendance des variables X_i,

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = p^3,$$

ainsi Y_n suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p^3)$, et par conséquent

$$\mathbb{E}(Y_n) = p^3 \text{ et } \mathbb{V}(Y_n) = p^3\left(1-p^3\right).$$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right) &= \sum_{k=1}^n \underbrace{\mathbb{V}(Y_k)}_{=p^3} + 2\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}\operatorname{Cov}(Y_k,Y_\ell)\\ &= n\times p^3 + 2\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}\operatorname{Cov}(Y_k,Y_\ell).\end{aligned}$$

Tout d'abord, $Y_k = X_k X_{k+1} X_{k+2}$ et $Y_\ell = X_\ell X_{\ell+1} X_{\ell+2}$, donc si $k+2 < \ell$, alors grâce au lemme des coalitions, les variables Y_k et Y_ℓ sont indépendantes, donc dans ce cas

$$\operatorname{Cov}(Y_k, Y_\ell) = 0,$$

ainsi il ne reste dans la somme que les termes correspondant aux couples $(k, \ell = k+2)$ et $(k, \ell = k+1)$, d'où

$$\mathbb{V}(S_n) = n\,p^3 + 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-2} \operatorname{Cov}\left(Y_k, Y_{k+2}\right) + 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \operatorname{Cov}\left(Y_k, Y_{k+1}\right).$$

- Soit $k \in [\![1\ ;\ n-2]\!]$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\left(Y_k, Y_{k+2}\right) &= \mathbb{E}\left(Y_k \times Y_{k+2}\right) - \mathbb{E}(Y_k)\,\mathbb{E}\left(Y_{k+2}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(X_k X_{k+1} X_{k+2}^2 X_{k+3} X_{k+4}\right) - \left(p^3\right)^2,\end{aligned}$$

  et la variable $X_k X_{k+1} X_{k+2}^2 X_{k+3} X_{k+4}$ est aussi une variable de Bernoulli donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_k X_{k+1} X_{k+2}^2 X_{k+3} X_{k+4}\right) &= \mathbb{P}\left(X_k X_{k+1} X_{k+2}^2 X_{k+3} X_{k+4} = 1\right)\\ &= \mathbb{P}(X_k = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_{k+4} = 1\right)\\ &= p^5,\end{aligned}$$

  donc

$$\operatorname{Cov}\left(Y_k, Y_{k+2}\right) = p^5 - p^6.$$

- De même, soit $k \in [\![1\ ;\ n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\left(Y_k, Y_{k+1}\right) &= \mathbb{E}\left(X_k X_{k+1}^2 X_{k+2}^2 X_{k+3}\right) - \left(p^3\right)^2\\ &= p^4 - p^6.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= n\,p^3 + 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-2} \left(p^5 - p^6\right) \operatorname{Cov}\left(Y_k, Y_{k+2}\right) + 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \left(p^4 - p^6\right)\\ &= n\,p^3 + (n-2)\left(p^5 - p^6\right) + (n-1)\left(p^4 - p^6\right),\end{aligned}$$

dont on se contentera.

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

1. La longueur L_1 de la première série a pour valeur minimale 1, et n'a pas de limite maximale, donc $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, notons, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,A_i =« le i-ème lancer donne Pile », alors
   $$[L_1 = k] = \left(A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_k} \cap A_{k+1}\right).$$
   Or les événements A_i sont mutuellement indépendants, et de probabilité p, donc
   $$\mathbb{P}([L_1 = k]) = p^k(1-p) + (1-p)^k p.$$
   On utilise la série géométrique, qui nous dit que pour tout réel x qui vérifie $|x| < 1$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, ainsi
   $$\begin{aligned}\sum_{k \in L_1(\Omega)} \mathbb{P}([L_1 = k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(p^k(1-p) + (1-p)^k p) \\ &= (1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} p^k + p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k \\ &= (1-p)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} p^k - 1\right) + p\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k - 1\right) \\ &= (1-p) \times \left(\frac{1}{1-p} - 1\right) + p \times \left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right) \quad \textit{(car } p \in]0\,;1[\textit{)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. À l'aide de la première dérivée de la série géométrique, qui permet d'affirmer que pour tout réel x qui vérifie $|x| < 1$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, on peut

écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k\in L_1(\Omega)} k\times \mathbb{P}([L_1=k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\times\left(p^k(1-p)+(1-p)^k p\right)\\ &= (1-p)p\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}\\ &= (1-p)p\times\frac{1}{(1-p)^2} + p(1-p)\times\frac{1}{(1-(1-p))^2}\\ &= \frac{p}{1-p}+\frac{1-p}{p},\end{aligned}$$

donc L_1 admet une espérance qui vaut $E(L_1) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.

Cherchons la valeur de p qui rend $E(L_1)$ minimale.

Par une étude de fonction : On considère $E(L_1)$ comme une fonction de p, pour adopter des notations plus courantes, notons $f(p) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$ et étudions la fonction f, sur $]0\,;1[$. Cette fonction est dérivable sur cet intervalle et pour tout $p\in\,]0\,;1[$,

$$f'(p) = \frac{1}{(1-p)^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2p-1}{(1-p)^2p^2} = \left(p-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{(1-p)^2p^2}$$

donc les variations de f (que je ne détaille pas) nous permettent d'affirmer que f (donc l'espérance de L_1) est minimale pour $p=\frac{1}{2}$.

Par d'habiles considérations : pour tout réel $p\in\,]0\,;1[$

$$\begin{aligned}\frac{p}{1-p}+\frac{1-p}{p} = \frac{p^2+(1-p)^2}{(1-p)p} = \frac{2p^2-2p+1}{p-p^2} &= \frac{1-2(p-p^2)}{p-p^2}\\ &= \frac{1}{p-p^2}-2 = -\frac{1}{p^2-p}-2\\ &= -\frac{1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}-2\\ &= \frac{1}{\frac{1}{4}-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2}-2\end{aligned}$$

donc $\mathrm{E}(\mathrm{L}_1) = \dfrac{1}{\frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2} - 2$, ainsi cette valeur est minimale lorsque $\frac{1}{\frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2}$ est minimale, ce qui est le cas lorsque $\frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$ est maximale, ce qui échoit lorsque $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2$ est minimale. Cette dernière quantité est un carré, dont la valeur minimale est 0 pour $p = \frac{1}{2}$.

Résumons-nous : $\mathrm{E}(\mathrm{L}_1)$ est minimale pour $p = \frac{1}{2}$.

3. Comme L_1, la variable L_2 a pour ensemble de valeurs $\mathrm{L}_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$, alors de la même manière que dans la première question,

$$[\mathrm{L}_1 = k] \cap [\mathrm{L}_2 = \ell] = \left(\mathrm{A}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{A}_k \cap \overline{\mathrm{A}_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{A}_{k+\ell}} \cap \mathrm{A}_{k+\ell+1}\right) \cup \left(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{A}_k} \cap \mathrm{A}_{k+1} \cap \cdots \cap \mathrm{A}_{k+\ell+1} \cap \overline{\mathrm{A}_{k+\ell+1}}\right)$$

dont on déduit que $\mathbb{P}([\mathrm{L}_1 = k] \cap [\mathrm{L}_2 = \ell]) = p^{k+1}(1-p)^\ell + (1-p)^{k+1}p^\ell$.

4. On en déduit la loi de L_2 comme loi marginale du couple $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}([\mathrm{L}_2 = \ell])} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{L}_1 = k] \cap [\mathrm{L}_2 = \ell]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(p^{k+1}(1-p)^\ell + (1-p)^{k+1}p^\ell\right) \\
&= (1-p)^\ell p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1} + p^\ell (1-p)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} \\
&= (1-p)^\ell p^2 \times \frac{1}{1-p} + p^\ell (1-p)^2 \times \frac{1}{1-(1-p)} \\
&\boxed{= (1-p)^{\ell-1} p^2 + p^{\ell-1}(1-p)^2}.
\end{aligned}$$

Avec les mêmes arguments que pour l'existence et le calcul de l'espérance de L_1,

$$\boxed{E(L_2)} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \times ((1-p)^{\ell-1}p^2 + p^{\ell-1}(1-p)^2)$$
$$= p^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell(1-p)^{\ell-1} + (1-p)^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell p^{\ell-1}$$
$$= p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} + (1-p)^2 \times \frac{1}{(1-p)^2} \boxed{= 2}.$$

5. D'après les calculs précédents,

$$\mathbb{P}([L_1 = 1] \cap [L_2 = 1]) = p^2(1-p)^1 + (1-p)^2 p^1 = p(1-p) \times [p + 1 - p]$$
$$= p(1-p),$$

or

$$\mathbb{P}([L_1 = 1]) = p^1(1-p) + (1-p)^1 p = 2p(1-p)$$

et

$$\mathbb{P}([L_2 = 1]) = (1-p)^{1-1}p^2 + p^{1-1}(1-p)^2 = p^2 + (1-p)^2$$
$$= 2p^2 - 2p + 1 = -2p(1-p) + 1.$$

Ainsi l'égalité $\mathbb{P}([L_1 = 1] \cap [L_2 = 1]) = \mathbb{P}([L_1 = 1])\mathbb{P}([L_2 = 1])$, entraîne après calculs

$$p(1-p) \times [-4p(1-p) + 1] = 0$$

donc comme $p \in]0\,;1[$, on obtient $p = \frac{1}{2}$.

On en déduit qu'il est nécessaire que $p = \frac{1}{2}$ pour que L_1 et L_2 soient indépendantes.

Réciproquement, supposons que $p = \frac{1}{2}$, alors pour tout $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathbb{P}([L_1 = k] \cap [L_2 = \ell]) = p^{k+1}(1-p)^{\ell} + (1-p)^{k+1}p^{\ell} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+\ell}$$
$$\mathbb{P}([L_1 = k]) = p^k(1-p) + (1-p)^k p = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$\mathbb{P}([L_2 = \ell]) = (1-p)^{\ell-1}p^2 + p^{\ell-1}(1-p)^2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell}$$

donc L_1 et L_2 sont indépendantes (dans le cas où $p = \frac{1}{2}$.

6. Si $p = \frac{1}{2}$ la covariance est nulle car les deux variables sont indépendantes, tandis que si $p \neq \frac{1}{2}$, une grande valeur de L_1 signifie que l'on a très probablement commencé par le côté le plus probable, donc la deuxième série sera probablement assez courte, et réciproquement.

   On peut donc prévoir que le coefficient de corrélation sera négatif, donc la covariance négative.

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

1. (a) ➟ Le nombre de « face » obtenus avant le 2^e face peut être nul si les deux premiers lancers donnent « pile », et n'a pas de limite supérieure, donc $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$.

   ➟ Soit $k \in \mathbb{N}$, $[X = k] = A \cap B$ où $A =$"les $k+1$ premiers lancers donnent 1 « pile » et k « face »", et $B =$"le $k+2^e$ lancer donne « pile »".

   Le nombre de « pile » obtenus au cours des $k+1$ premiers lancers suit clairement une loi binomiale de paramètres $k+1$ et p, donc $\mathbb{P}(A) = \binom{k+1}{1} p(1-p)^k = (k+1)p(1-p)^k$.

   L'événement B est indépendant de l'événement A et a pour probabilité p.

   On obtient finalement,

   $$\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = (k+1)p(1-p)^k \times p = (k+1)p^2(1-p)^k}.$$

   ➟ La somme des probabilités est

   $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)p^2(1-p)^k = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} \quad \textit{(première dérivée de la série géométrique de raison } 1-p\textit{, avec } 0 < 1-p < 1\textit{)}, \\ &= 1.\end{aligned}$$

   (b) La variable X a des valeurs positives donc elle admet une espérance si et seulement si la série $\sum k \times \mathbb{P}([X = k])$ est convergente.

Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} k \times \mathbb{P}([X=k]) &= p^2 \sum_{k=0}^{N} k(k+1)(1-p)^k \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)k(1-p)^{k-1} \quad \textit{(}k' = k+1\textit{)} \\
&= p^2(1-p) \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)k(1-p)^{k-2} \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} p^2(1-p) \times \frac{2}{(1-(1-p))^3} \quad \textit{(dérivée seconde de la même série)} \\
&= \frac{2(1-p)}{p}
\end{aligned}$$

Donc X admet une espérance qui vaut $\boxed{E(X) = \dfrac{2(1-p)}{p}}$.

2. (a) ➟ Encore une fois Y prend ses valeurs dans N, car la valeur n que peut prendre X n'a pas de limite supérieure : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

➟ On considère la loi de Y comme une loi marginale du couple (X, Y), donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=k]) &= \sum_{n \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=n] \cap [Y=k]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) \times \mathbb{P}_{[X=n]}([Y=k])
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant $[X=n]$, Y est un entier pris au hasard dans $[\![0, n]\!]$, donc

$$P_{[X=n]}([Y=k]) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{si } n \geqslant k\,; \\ 0, & \text{si } n < k. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}([Y=k])} &= \sum_{n\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=n]\cap[Y=k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty}(n+1)p^2(1-p)^n \times \frac{1}{n+1} \\
&= p^2\sum_{n=k}^{+\infty}(1-p)^n = p^2\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^{n+k} \quad \textit{(en posant } n'=n-k\textit{)} \\
&= p^2(1-p)^k\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n = p^2(1-p)^k \times \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= \boxed{p(1-p)^k}.
\end{aligned}$$

(b) On reconnaît presque en Y une variable qui suit une loi géométrique, mais quelques détails ne collent pas. C'est en fait la variable $Y' = Y+1$ qui suit la loi géométrique de paramètre p. En effet, $Y'(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([Y'=k]) = \mathbb{P}([Y+1=k]) = \mathbb{P}([Y=k-1]) = p(1-p)^{k-1}.$$

On en déduit que Y admet une espérance qui vaut

$$E(Y) = E(Y'-1) = E(Y')-1 = \frac{1}{p}-1 = \frac{1-p}{p}.$$

3. La variable Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $h \in \mathbb{N}$, grâce à la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit

par Y,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=h) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=j) \times P_{(Y=j)}(Z=h) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} P\Big((Y=j)\cap(Z=h)\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} P\Big((Y=j)\cap(X-Y=h)\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} P\Big((Y=j)\cap(X=h+j)\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p^2(1-p)^{h+j} \ \textit{(comme dans la question 2(a))} \\
&= p^2(1-p)^h \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = p^2(1-p)^h \times \frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p)^h.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(j,h)\in\mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big((Z=h)\cap(Y=j)\big) = P\big((X=h+j)\cap(Y=j)\big) &= P_{X=j+h}(Y=j)\mathbb{P}(X=h+j) \\
&= p^2q^{h+j} = \mathbb{P}(Z=h)\times\mathbb{P}(Y=j),
\end{aligned}$$

donc Y et Z sont indépendantes.

Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

1. (i) D'après sa définition, D prend des valeurs entières positives, donc $D(\Omega)=\mathbb{N}$. La valeur 0 a clairement un statut particulier, on va donc commencer par chercher la probabilité des autres valeurs.

   (ii) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

   La formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par X nous donne

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}([D=n])} &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\big([X=k]\cap[Y=k+n]\big)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])\times\mathbb{P}([Y=k+n]) \quad \textit{(car X et Y sont indépendantes)}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p\times(1-p)^{k+n-1}p\\
&= (1-p)^n p^2\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2(k-1)} = (1-p)^n p^2\sum_{k=0}^{+\infty}\left((1-p)^2\right)^k\\
&= (1-p)^n p^2\times\frac{1}{1-(1-p)^2} \quad \textit{(série géométrique, avec } \left|(1-p)^2\right|<1\textit{)}\\
&= (1-p)^n p^2\times\frac{1}{2p-p^2} \boxed{=\frac{p(1-p)^n}{2-p}}.
\end{aligned}$$

(iii) La loi de probabilité de D doit vérifier $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([D=n])=1$, donc

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}([D=0])} &= 1-\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}([D=n]) = 1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p(1-p)^n}{2-p}\\
&= 1-\frac{p(1-p)}{2-p}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1} = 1-\frac{p(1-p)}{2-p}\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n\\
&= 1-\frac{p(1-p)}{2-p}\times\frac{1}{1-(1-p)} = 1-\frac{1-p}{2-p}\\
&\boxed{=\frac{1}{2-p}}.
\end{aligned}$$

2. Grâce à la première dérivée de la série géométrique de raison $1-p$, D

admet une espérance qui est

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{D}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \mathbb{P}([\mathrm{D}=n]) = 0 \times \frac{1}{2-p} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{p(1-p)^n}{2-p} \\
&= \frac{p(1-p)}{2-p} \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = \frac{p(1-p)}{2-p} \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\
&= \frac{1-p}{p(2-p)}
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 6

énoncé

1. La variable Z_p représente le nombre de boules blanches obtenues au cours des p premiers tirages.
2. On peut directement affirmer que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et donc que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = 1/2$.
3. . X_1 et X_2 prennent pour valeurs 0 et 1 ;
   - $\mathbb{P}([\mathrm{X}_1 = 0] \cap [\mathrm{X}_2 = 0]) = \mathbb{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2) = \mathbb{P}(\mathrm{N}_1) \times \mathbb{P}(\mathrm{N}_2/\mathrm{N}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} = \frac{c+1}{2(c+2)}$, car sachant N_1, l'urne contient au moment du deuxième tirage $c+2$ boules dont $c+1$ boules noires ;
   - de la même manière $\mathbb{P}([\mathrm{X}_1 = 1] \cap [\mathrm{X}_2 = 0]) = \frac{1}{2(c+2)}$, $\mathbb{P}([\mathrm{X}_1 = 0] \cap [\mathrm{X}_2 = 1]) = \frac{1}{2(c+2)}$, et $\mathbb{P}([\mathrm{X}_1 = 1] \cap [\mathrm{X}_2 = 1]) = \frac{c+1}{2(c+2)}$.
   - La loi (marginale) de X_2 s'obtient par sommation des termes de la loi conjointe

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\mathrm{X}_2 = 0]) &= \mathbb{P}([\mathrm{X}_1 = 0] \cap [\mathrm{X}_2 = 0]) + \mathbb{P}([\mathrm{X}_1 = 1] \cap [\mathrm{X}_2 = 0]) \\
&= \frac{c+1}{2(c+2)} + \frac{1}{2(c+2)} = \frac{c+2}{2(c+2)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   et de même $\mathbb{P}([\mathrm{X}_2 = 1]) = \frac{1}{2}$.
   Donc X_2 suit la loi $\mathscr{B}(1, 1/2)$ et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2) = 1/2$.
4. . L'ensemble des valeurs de Z_2 est $\mathrm{Z}_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$;
   - $\mathbb{P}([\mathrm{Z}_2 = 0]) = \mathbb{P}([\mathrm{X}_1 = 0] \cap [\mathrm{X}_2 = 0]) = \frac{c+1}{2(c+2)}$;

- $\mathbb{P}([Z_2=1]) = \mathbb{P}([X_1=0]\cap[X_2=1]) + \mathbb{P}([X_1=0]\cap[X_2=1]) = \frac{2}{2(c+2)} = \frac{1}{c+2}$;
- $\mathbb{P}([Z_2=2]) = \mathbb{P}([X_1=1]\cap[X_2=1]) = \frac{c+1}{2(c+2)}$.

5. L'ensemble des valeurs de Z_p est $Z_p(\Omega) = [\![0,p]\!]$.
6. (a) Sachant $[Z_p=k]$, le $p+1^{ime}$ tirage est effectué dans une urne qui contient $2+pc$ boules dont $1+kc$ boules blanches (et $1+(p-k)c$ boules noires), donc
$$\mathbb{P}([X_{p+1}=1]/[Z_p=k]) = \frac{1+kc}{2+pc}.$$
   (b) On applique la formule des probabilités totales sur le système complet formé par les événements $[Z_p=k]$ pour $k\in[\![0,p]\!]$,
$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}([X_{p+1}=1])} &= \sum_{k=0}^{p}\mathbb{P}([Z_p=k])\times\mathbb{P}([X_{p+1}=1]/[Z_p=k])\\
&= \frac{1}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}(1+kc)\mathbb{P}([Z_p=k])\\
&= \frac{1}{2+pc}\left[\sum_{k=0}^{p}\mathbb{P}([Z_p=k]) + c\sum_{k=0}^{p}k\mathbb{P}([Z_p=k])\right]\\
&= \frac{1}{2+pc}[1+c\mathrm{E}(Z_p)] = \boxed{\frac{1+c\mathrm{E}(Z_p)}{2+pc}}
\end{aligned}$$
   (c) ➟ On a déjà vu que X_1 suit $\mathscr{B}(1,1/2)$ et que X_2 suit $\mathscr{B}(1,1/2)$;
   ➟ soit $p\in[\![1,p-1]\!]$, supposons que les variables $X_1, X_2, \dots, X_p$ suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, alors, grâce à la linéarité de l'espérance,
$$\mathrm{E}(Z_p) = \sum_{i=1}^{p}\mathrm{E}(X_i) = p\times\frac{1}{2} = \frac{p}{2},$$
   ainsi $\mathbb{P}(X_{p+1}=1) = \frac{1+c\mathrm{E}(Z_p)}{2+pc} = \frac{1+c\frac{p}{2}}{2+pc} = \frac{1}{2}$.

Donc, comme on sait déjà que $X_{p+1}(\Omega) = \{0,1\}$, X_{p+1} suit aussi $\mathscr{B}(1,1/2)$.

➟ On peut donc conclure grâce au principe de récurrence que toutes les variables X_p suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Une correction de l'exercice 7

énoncé

Tout d'abord

$$(Y = X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (X = n) \cap (Y = n),$$

donc par σ-additivité de la probabilité, puis indépendance des variables X et Y

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \times \mathbb{P}(Y = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(p(1-p)^{n-1}\right)^2 \\
&= p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^n \quad \textit{(en posant } n' = n-1\textit{)} \\
&= p^2 \times \frac{1}{1-(1-p)^2} \quad \textit{(car } \left|(1-p)^2\right| < 1\textit{)} \\
&= \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}$$

De plus, X et Y étant indépendantes et de même loi, il n'y aucune raison de ne pas avoir l'égalité $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \mathbb{P}(Y \leqslant X)$, ainsi

$$\begin{aligned}
1 = \mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}((X \leqslant Y) \cup (Y \leqslant X)) \\
&= \mathbb{P}(X \leqslant Y) + \mathbb{P}(Y \leqslant X) - \mathbb{P}\underbrace{((X \leqslant Y) \cap (Y \leqslant X))}_{=(X=Y)} \\
&= 2\mathbb{P}(Y \leqslant X) - \mathbb{P}(X = Y) \\
&= 2\mathbb{P}(Y \leqslant X) - \frac{p}{2-p},
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}(Y \leqslant X) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p}{2-p}\right) = \frac{1}{2-p}.$$

Une correction de l'exercice 8

énoncé

On utilise le système complet d'événements $(Y = j)_{j \geqslant 1}$ pour calculer la loi de X : pour tout $i \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^i}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^i} \times \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2^i}.$$

Comme $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$ vaut 1, on vérifie à cette occasion que la famille $(\frac{1}{2^{i+j}})_{i,j \geqslant 1}$ est bien un germe de probabilité sur $(\mathbb{N}^*)^2$. Par symétrie évidente des rôles de X et Y, on a

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^j}.$$

Il est alors clair que

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j),$$

donc que X et Y sont indépendantes.

Une correction de l'exercice 9

énoncé

1. Comme $(Y = j), j \in \mathbb{N}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne pour $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=0}^{i} \frac{e^{-b} b^i a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} = \frac{e^{-b} b^i}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a^j (1-a)^{i-j}$$
$$= \frac{e^{-b} b^i}{i!} [a + (1-a)]^i = \frac{e^{-b} b^i}{i!}$$

De même :

$$\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i=j}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\mathrm{e}^{-b}\frac{a^j b^j}{j!}\sum_{i=j}^{+\infty}\frac{[b(1-a)]^{i-j}}{(i-j)!}=\mathrm{e}^{-b}\frac{a^j b^j}{j!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[b(1-a}{n!}$$
$$=\mathrm{e}^{-b}\frac{a^j b^j}{j!}\mathrm{e}^{b-ab}=\mathrm{e}^{-ab}\frac{a^j b^j}{j!}$$

Ainsi $X\hookrightarrow\mathscr{P}(b)$ et $Y\hookrightarrow\mathscr{P}(ab)$. Le cours donne alors $\mathbb{E}(X)=V(X)=b$ et $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{V}(Y)=ab$.

2. Non car $\mathbb{P}[(X=0)\cap(Y=0)]=\mathrm{e}^{-b}$ alors que $\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Y=0)=\mathrm{e}^{-b}\mathrm{e}^{-ab}$ et $\mathrm{e}^{-ab}\neq 1$ puisque $ab>0$.
3. On a $Z(\Omega)\subset\mathbb{Z}$ et, pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Z=-k)=\mathbb{P}(X-Y=-k)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=i+k)=\sum_{i=0}^{+\infty}0=0$$

et

$$\mathbb{P}(Z=k)=\mathbb{P}(X-Y=k)=\sum_{i=k}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=i-k)=\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-b}b^i a^{i-k}(1-a)^k}{(i-k)!k!}$$
$$=\mathrm{e}^{-b}b^k\frac{(1-a)^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(ba)^j}{j!}=\mathrm{e}^{-b}b^k\frac{(1-a)^k}{k!}\times\mathrm{e}^{ab}=\mathrm{e}^{-b(1-a)}\frac{[b(1-a)]^k}{k!}$$

On reconnait la loi de Poisson : $Z\hookrightarrow\mathscr{P}(b(1-a))$.

Une correction de l'exercice 10 *énoncé*

1. Sachant $N=n_0$, on réalise n_0 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ et X compte le nombre de succès. La loi conditionnelle de X sachant $N=n_0$ est donc binomiale de paramètres n_0 et $\frac{1}{2}$.
2. Comme $\binom{n}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^k}{k!}$, la série entière f a même rayon de convergence que $\sum\frac{n^k}{k!}x^n$, c'est-à-dire *(je vous laisse appliquer la méthode utilisant le critère de d'Alembert)* 1.

Pour $x \in]-1\,;1[\setminus\{0\}$, on a $\frac{k!f(x)}{x^k} = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$, dérivée k-ième de $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Or cette dérivée k-ième vaut $x \longmapsto \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ donc pour $x \in]-1\,;1[\setminus\{0\}$, on a $\frac{k!f(x)}{x^k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ soit

$$\forall x \in]-1\,;1[\setminus\{0\}, \quad f(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}},$$

ce qui reste valable pour $x = 0$.

3. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par N donne

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{N}=n)\mathrm{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{X}=k).$$

   Comme $\mathrm{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{X}=k) = 0$ pour $n < k$, il reste pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \sum_{n=k}^{+\infty}(1-p)^{n-1}p\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{p}{1-p}f\left(\frac{1-p}{2}\right)$$
$$= \frac{p}{1-p} \times \frac{(\frac{1-p}{2})^k}{(\frac{1+p}{2})^{k+1}}.$$

   Et pour $k = 0$, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=0) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}p\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{2}\right)^n$$
$$= \frac{p}{1-p} \times \frac{\frac{1-p}{2}}{\frac{1+p}{2}} = \frac{p}{1+p}.$$

Une correction de l'exercice 11 *énoncé*

1. Le cours affirme que N suit la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

2. Il est clair que l'image de Y est $\mathbb{N}$. On calcule sa loi en utilisant le système complet d'événements $(N = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et l'indépendance de toutes les variables étudiées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k, N = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} + \cdots + X_{2n} = k, N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} + \cdots + X_{2n} = k)\mathbb{P}(N = n).\end{aligned}$$

Comme $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, le cours affirme que la somme de n quelconques d'entre elles suit une loi binomiale de paramètres (n,p). Comme $1-(1-p)^2 = p(2-p)$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n \times p(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2n-1} = p\frac{1-p}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} p(1-p)^{n-1} = p^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}(1-p)^{2n-k-1} \\ &= \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\left((1-p)^2\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

Si l'on pose $f : t \in]-1,1[\ \mapsto \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, le théorème de dérivation terme à terme des sommes de séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence montre que

$$\forall t \in]-1,1[, \quad f^{(k)}(t) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)t^{n-k}.$$

Comme $1-(1-p)^2 = p(2-p)$, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

Une correction de l'exercice 12 *énoncé*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on résout $y'' + ny' + py = 0$ pour savoir dans quels cas toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$. L'équation caractéristique est $t^2 + nt + p = 0$; son discriminant est $\Delta = n^2 - 4p$.

- Si $\Delta > 0$: les solutions sont de la forme $y(x) = \alpha.left]-\infty\ ;\ 0e^{r_1 x} + \beta.e^{r_2 x}$ avec $r_1 = \frac{-n-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{-n+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ pour tous réels α et β si et seulement si ($r_1 < 0$ et $r_2 < 0$) si et seulement si $\Delta < n^2$. Or cette condition est toujours vérifiée puisque $p \in \mathbb{N}^*$.
- Si $\Delta = 0$: les solutions sont de la forme $y(x) = (\alpha.x+\beta)e^{rx}$ avec $r = -\frac{n}{2}$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ pour tous réels α et β si et seulement si $r < 0$ si et seulement si $n > 0$ si et seulement si $n \neq 0$.
- Si $\Delta < 0$: les solutions sont de la forme $y(x) = e^{ax}.(\alpha.\cos(b.x) + \beta.\sin(b.x))$ avec $a = -\frac{n}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ pour tous réels α et β si et seulement si ($a < 0$) si et seulement si $n \neq 0$.

On revient à la situation de l'énoncé, et note E l'évènement dont on demande la probabilité. On introduit la variable aléatoire $\Delta = (A-1)^2 - 4B$. L'étude précédente donne que : $E = [A \neq 1] \cup [\Delta > 0] = [A \neq 1] \cup [(A-1)^2 > 4B]$ et donc

$$\overline{E} = [A = 1] \cap [(A-1)^2 \leqslant 4B] = [A=1] \cap [0 \leqslant 4B].$$

Or B suit une loi géométrique donc $\mathbb{P}(0 \leqslant 4B) = 1$ et $\mathbb{P}(0 > 4B) = 0$ donc, d'après la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}(A=1) - \mathbb{P}\big([A = 1] \cap [0 > 4B]\big) = \mathbb{P}(A=1)$ et $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(A=1)$. Finalement, si $A \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$,

$$\mathbb{P}(E) = 1 - p.$$

Une correction de l'exercice 13 *énoncé*

1. Comme X_λ possède une variance, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|X_\lambda - \mathbb{E}(X_\lambda)| \geqslant c\lambda) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_\lambda)}{(c\lambda)^2}$. Comme $\mathbb{E}(X_\lambda) = \mathbb{V}(X_\lambda) = \lambda$, on obtient
$$\mathbb{P}(|X_\lambda - \lambda| \geqslant c\lambda) \leqslant \frac{1}{c^2\lambda} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. On pose $\Delta_\lambda = B_\lambda^2 - 4A_\lambda C_\lambda$, et on étudie comment varie la probabilité de l'événement $(\Delta_\lambda \geqslant 0)$ quand $\lambda \to +\infty$. Pour avoir une idée, on commence par calculer l'espérance de Δ_λ. On sait que $\mathbb{V}(B_\lambda) = \lambda$, et la formule de König-Huyghens dit que $\mathbb{V}(B_\lambda) = \mathbb{E}(B_\lambda^2) - [\mathbb{E}(B_\lambda)]^2$, donc $\mathbb{E}(B_\lambda^2) = \lambda + \lambda^2$. Il en résulte que (en utilisant aussi l'indépendance de A_λ et C_λ) :
$$\mathbb{E}(\Delta_\lambda) = \mathbb{E}(B_\lambda^2) - 4\mathbb{E}(A_\lambda C_\lambda) = \mathbb{E}(B_\lambda^2) - 4\mathbb{E}(A_\lambda)\mathbb{E}(C_\lambda) = \lambda + \lambda^2 - 4\lambda^2 = \lambda - 3\lambda^2.$$
Cette espérance tend vers $-\infty$ quand $\lambda \to +\infty$, ce qui laisse penser que le polynôme étudié va avoir une probabilité petite d'avoir ses racines réelles quand $\lambda \to +\infty$. On va quantifier précisément ce phénomène en posant, pour $c \in \,]0, 1]$ indépendant de λ :
$$E_\lambda(c) := \big((|A_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|B_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|C_\lambda - \lambda| < c\lambda)\big).$$
D'après la question précédente, et par indépendance,
$$\mathbb{P}(E_\lambda(c)) = P\big(|A_\lambda - \lambda| < c\lambda\big)P\big(|B_\lambda - \lambda| < c\lambda\big)P\big(|C_\lambda - \lambda| < c\lambda\big) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Montrons maintenant que si c est assez petit, on a l'inclusion
$$E_\lambda(c) \subset (\Delta_\lambda < 0)$$
de sorte que $\mathbb{P}(\Delta_\lambda < 0) \to 1$ quand $\lambda \to +\infty$. Comme $c \leqslant 1$, on a $(|Y - \lambda| < c\lambda) = ((1-c)\lambda < Y < (1+c)\lambda)$ avec $(1-c)\lambda > 0$, où Y désigne indifféremment A_λ, B_λ ou C_λ. Sur l'événement $E_\lambda(c)$, on a, par produit de nombres positifs :
$$\Delta_\lambda < \left((1+c)^2 - 4(1-c)^2\right)\lambda^2 = (1+c+2(1-c))(1+c-2(1-c))\lambda^2 = (3-c)$$
On en déduit que $E_\lambda(\frac{1}{3}) \subset (\Delta_\lambda < 0)$, donc la probabilité que $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles tend vers zéro quand λ tend vers l'infini.