Le candidat devra partout utiliser
Les mêmes notations que celles de l'énoncé.
La clarté des copies, leur lisibilité,
La rigueur du discours, l'orthographe usitée
Seront des correcteurs grandement appréciées.
Des calculs les résultats seront encadrés.
La durée de l'épreuve à quatre heures est fixée.

Exercice 1

1. On considère $\mathrm{M} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}^n = \frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$.

2. Un pion se déplace dans un plan sur trois points distincts nommés A, B et C.
   À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

   - le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n, plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
   - pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (*resp.* B_n, C_n) l'événement « le pion se trouve en A (*resp.* B, C) à l'étape n », ainsi que $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$, $q_n = \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$, et $r_n = \mathbb{P}(\mathrm{C}_n)$, et

   $$\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{V}_n$.

   (c) En déduire une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Exercice 2

Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}$ le commutant de la matrice A.

1. Montrer que, pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathscr{C}(\mathrm{A})$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

   Donner une matrice inversible P telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.
3. Déterminer le commutant $\mathscr{C}(\mathrm{T})$ de la matrice T. Déterminer sa dimension.
4. Démontrer que l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est un automorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   Que peut-on en déduire pour la dimension de $\mathscr{C}(\mathrm{A})$?
5. (a) Démontrer alors que $\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left\{\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2\right\}$.

   (b) En déduire que $\mathscr{C}(\mathrm{A})$ est l'ensemble des polynômes en A.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in [\![0\,;n]\!]$, on note A_p la matrice de $\mathscr{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n-p+1]\!]^2$ le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$. On note d_p le déterminant de A_p.

1. Vérifier que $a_{1,1} = \binom{p}{p}$, et expliciter de même les coefficients $a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$ sous forme de coefficients du binôme.
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ calculer les déterminants d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.
3. Soit $p \in [\![0\,;\,n]\!]$.

   On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes, et on note L_i la ligne d'indice i.

   (a) Dans le calcul de d_p, on effectue l'opération $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_{i-1}$ i variant en décroissant de $n-p+1$ à 2.

   Déterminer le coefficient d'indice (i,j) de la nouvelle ligne L_i.

   (b) En déduire une relation entre d_p et d_{p+1}, puis en déduire l'expression d_p.

Problème – Les classiques fonctions d'Euler

La fonction Gamma d'Euler

1. Démontrer que la fonction
$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$
est définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$.
3. Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)=(n-1)!$.

Une expression de $\Gamma(x)$

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

4. Pour tout réel u tel que $0\leqslant u<1$, montrer que $\ln(1-u)\leqslant -u$. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0,n]$, l'inégalité
$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$
5. Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0,\sqrt{n}[$ qui, à tout réel t de $[0,\sqrt{n}[$ associe :
$$\varphi(t)=\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)-t-n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right).$$
Établir, pour tout réel t de $[0,\sqrt{n}]$, l'inégalité
$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t}\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$
6. Justifier, pour tout réel t de $[0,n]$, les inégalités
$$\mathrm{e}^{-t}-\frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant\mathrm{e}^{-t}.$$
En déduire que, pour tout réel x strictement positif
$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t.$$

Lien avec la fonction Beta, définition de la fonction Gamma par produits infinis

7. Pour tous réels x et y strictement positifs, montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,\mathrm{d}u$$

est convergente.
On pose alors pour tout $(x,y)\in\,]0\,;+\infty[^2$

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,\mathrm{d}u.$$

8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\ \ \mathrm{B}(x,n)=\frac{(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, la formule

$$\mathrm{B}(x,n)=\frac{\Gamma(x)\times\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}.$$

9. Montrer que, pour tout réel x strictement positif

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\Gamma(x+n)\sim n^x(n-1)!.$$

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\lambda_n=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

Montrer que $\lambda_n\sim\sqrt{\dfrac{2}{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

1. **Première méthode : par récurrence.**

D'une part $M^0 = I_3$, et d'autre part

$$M^0 = \frac{1}{3\cdot 4^0}\begin{pmatrix} 4^0+2 & 4^0-1 & 4^0-1 \\ 4^0-1 & 4^0+2 & 4^0-1 \\ 4^0-1 & 4^0-1 & 4^0+2 \end{pmatrix} = I_3,$$

donc l'égalité à prouver est vraie au rang $n=0$.

Supposons qu'elle est vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$, alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = \frac{1}{3\times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= (\cdots) = \frac{1}{3\cdot 4^{n+1}}\begin{pmatrix} 4^{n+1}+2 & 4^{n+1}-1 & 4^{n+1}-1 \\ 4^{n+1}-1 & 4^{n+1}+2 & 4^{n+1}-1 \\ 4^{n+1}-1 & 4^{n+1}-1 & 4^{n+1}+2 \end{pmatrix}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Deuxième méthode : avec la formule du binôme. Notons J la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, alors on montre par récurrence

(a) ➟ Comme pour $n=0$, le pion se trouve sur le point A, on a $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.

➟ À l'étape 1, sachant que juste avant il était en A, il a une chance sur deux de rester en A, ou bien il se déplace vers C ou D équiprobablement, c'est-à-dire avec la probabilité $\frac{1}{4}$ pour chacun des deux points. Ainsi

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad q_1 = r_1 = \frac{1}{4}.$$

(b) D'après l'énoncé, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}, \text{ et } P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4},$$

ainsi, avec la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n),

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$
$$= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n.$$

Et de même,

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n,$$
$$\text{et } r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n.$$

Ainsi

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2p_n + q_n + r_n \\ p_n + 2q_n + r_n \\ p_n + q_n + 2r_n \end{pmatrix} = M \times V_n, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

(c) On en déduit alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = M^n V_0 = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n + 2 \\ 4^n - 1 \\ 4^n - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \begin{cases} p_n = \frac{1}{3\times 4^n}(4^n + 2), \\ \\ q_n = r_n = \frac{1}{3\times 4^n}(4^n - 1). \end{cases}$$

(d) On en déduit que

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3}$$
$$\text{et } q_n = r_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3}.$$

On peut interpréter ce résultat comme le fait qu'après un grand nombre d'étapes, les trois emplacements sont presque équiprobables.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

1. ➟ $\mathscr{C}(A)$ n'est pas vide car il contient la matrice nulle qui commute avec A comme avec toute autre matrice.
   ➟ Montrons que $\mathscr{C}(A)$ est stable par combinaisons linéaires.

> *Montrer qu'un ensemble* E *est stable par une opération « □ » consiste à prendre deux éléments x et y* $\boxed{\text{de E}}$, *et à montrer que le résultat de l'opération $x \,\square\, y$ est encore un élément de* E.

Prenons M et N deux matrices $\boxed{\text{dans } \mathscr{C}(\mathrm{A})}$, et λ, μ deux réels, et montrons que $\lambda \mathrm{M} + \mu \mathrm{N}$ est encore dans $\mathscr{C}(\mathrm{A})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\lambda \mathrm{M} + \mu \mathrm{N}) &= \lambda \mathrm{AM} + \mu \mathrm{AN} = \lambda \mathrm{MA} + \mu \mathrm{NA} \ \ \textit{(car } \mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathscr{C}(\mathrm{A})\textit{)} \\ &= (\lambda \mathrm{M} + \mu \mathrm{N})\mathrm{A}, \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

2. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A, cherchons une base $\mathscr{B} = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle T représente aussi u.

   ➟ Si on dispose d'une telle base (a, b, c) alors par définition de la matrice d'un endomorphisme $\mathscr{B}$ dans une base, on a

$$u(a) = 3a, \quad u(b) = 2b, \quad u(c) = b + 2c.$$

Or, en notant $a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *(on confond comme d'habitude $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)*

$$\begin{aligned} u(a) = 3a &\iff (u - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(a) = 0 \iff (\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_n)a = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} a = 0 \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_3}{\iff} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} a = 0 \\ &\underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1}{\iff} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} a = 0 \iff x = y = z \iff a = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On choisit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même, la résolution de $u(b) = 2b$, permet de prendre $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *(que l'on a préféré à $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour se faciliter les calculs ultérieurs).*

Enfin, en notant $c = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
u(c) = b + 2c &\iff (u - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(c) = b \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 | L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = z - 1 \\ 4y & = 3z + 3. \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Comme on est extrêmement habile, on choisit $z = 3$, et donc $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Prenons les trois vecteurs a, b, c trouvés ci-dessus, alors la matrice P de leurs coordonnées dans la base canonique est inversible car

$$
\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,
$$

donc (a, b, c) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
Et comme on les a choisis de manière à ce que

$$
u(a) = 3a, \;\; u(b) = 2b, \;\; u(c) = b + 2c,
$$

on peut conclure que les matrices A et T représentent le même endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, donc elles sont semblables.
De plus, la matrice P donnée au-dessus est la matrice de passage $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B})$ entre la base canonique $\mathscr{C}$ et la nouvelle base $\mathscr{B}$: elle vérifie

$$
A = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(C) = PTP^{-1}.
$$

Une copie propose une solution en résolvant directement l'équation $A \times P = P \times T$ d'inconnue $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et en montrant qu'on peut trouver une solution P inversible.
Je la trouve audacieuse en termes de calculs, mais cette méthode est correcte.

3. Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

$$TM = MT \iff \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3a & 2b & b+2c \\ 3d & 2e & e+2f \\ 3g & 2h & h+2i \end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{c} b=c=f=d=g=h=0 \\ e=i \end{array} \right. \iff M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Ainsi

- d'une part

$$M \in \mathscr{C}(T) \iff \exists (a,e,f) \in \mathbb{R}^3,\ M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$
$$\iff \exists (a,e,f) \in \mathbb{R}^3,\ M = aE_{1,1} + e\left(E_{2,2}+E_{3,3}\right) + fE_{2,3}$$

(en notant $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$)

$$\iff M \in= \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}+E_{3,3}, E_{2,3}),$$

donc $\mathscr{C}(T) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}+E_{3,3}, E_{2,3})$, autrement dit $\left(E_{1,1}, E_{2,2}+E_{3,3}, E_{2,3}\right)$ est une famille génératrice de $\mathscr{C}(T)$;

- or

$$aE_{1,1} + e\left(E_{2,2}+E_{3,3}\right) + fE_{2,3} = 0_3 \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = 0_3 \iff a = b = f = 0,$$

donc $\left(E_{1,1}, E_{2,2}+E_{3,3}, E_{2,3}\right)$ est une famille libre.

Donc $\mathscr{C}(T)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 3.

4. - On sait que le produit matriciel $(A,B) \mapsto A \times B$ est bilinéaire sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})^2$, donc l'application $\Phi : M \mapsto P^{-1}MP$ est bien linéaire, et définit un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Mais de plus pour toute matrice M :

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = 0_3 \Longrightarrow \mathrm{P}\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}\right)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}0_3\mathrm{P}^{-1} \Longleftrightarrow \mathrm{M} = 0_3,$$

donc Φ est injectif, et comme c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, c'est un automorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

➟ On remarque que

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{A}) &\Longleftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{MA} \Longleftrightarrow \mathrm{PTP}^{-1}\mathrm{M} = \mathrm{MPTP}^{-1} \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\left(\mathrm{PTP}^{-1}\mathrm{M}\right)\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\left(\mathrm{MPTP}^{-1}\right)\mathrm{P} \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{TP}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MPT} \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} \in \mathscr{C}(\mathrm{T}),
\end{aligned}$$

donc $\Phi(\mathscr{C}(\mathrm{A})) = \mathscr{C}(\mathrm{T})$, et comme Φ est un automorphisme, il conserve les dimensions, par conséquent :

$$\dim(\mathscr{C}(\mathrm{A})) = \dim(\mathscr{C}(\mathrm{T})) = 3.$$

5. (a) Les matrices I_3, A et A^2 commutent avec A, donc elles sont dans $\mathscr{C}(\mathrm{A})$.
De plus, sachant que $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 20 & -14 \\ 3 & 24 & -18 \\ -1 & 20 & -10 \end{pmatrix}$, je vous laisse prouver que ces trois matrices forment une famille libre.
Ainsi comme $\dim(\mathscr{C}(\mathrm{A}))$, on peut conclure que $(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est une base de $\mathscr{C}(\mathrm{A})$, donc que

$$\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2\right).$$

(b) ➟ Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
On sait que pour tous polynômes Q et R, les matrices Q(A) et R(A) commutent entre elles, donc en particulier P(A) commute avec A, donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \in \mathscr{C}(\mathrm{A})$.
Ainsi l'ensemble

$$\mathbb{R}[\mathrm{A}] = \{\mathrm{P}(\mathrm{A}) \mid \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\},$$

des polynômes en A est inclus dans $\mathscr{C}(\mathrm{A})$.

➟ Réciproquement

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(A) &= \operatorname{Vect}\left(I_3, A, A^2\right) = \left\{ a_0 I_3 + a_1 A + a_2 A^2 \mid (a_0, \dots, a_2) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \{ P(A) \mid P \in \mathbb{R}_2[X] \} \subset \mathbb{R}[A].\end{aligned}$$

On a donc prouvé que $\mathscr{C}(A) = \mathbb{R}[A]$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

1. Je vous laisse retrouver comme des grand·e·s que

$$a_{1,1} = \binom{p}{p},\ a_{1,n-p+1} = \binom{n}{p},\ a_{n-p+1,1} = \binom{n}{n},\ a_{1,n-p+1} = \binom{2n-p}{n}.$$

2. La matrice A_1 est la matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ qui a pour unique coefficient le terme $a_{1,1} = \binom{n+1+1-2}{n+1-1} = \binom{n}{n} = 1$, par conséquent $d_1 = 1$.
De même

$$d_{n-1} = \begin{vmatrix} \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{vmatrix} = 1 \times (n+1) - 1 \times n = 1.$$

$$\text{et } d_{n-2} = \begin{vmatrix} \binom{n-2}{n-2} & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} \\ \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} & \binom{n+2}{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)n}{2} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 1 & n \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & n-1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = 1.$$

3. La formule du triangle de Pascal nous donne pour tous entiers naturels α et β, l'égalité $\binom{\beta}{\alpha} + \binom{\beta}{\alpha+1} = \binom{\beta+1}{\alpha+1}$, que l'on va utiliser sous la forme

$$\binom{\beta+1}{\alpha+1} - \binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta}{\alpha+1}$$

En notant $A'_p = (a'_{i,j})$ la nouvelle matrice, la formule précédente donne (on doit distinguer le cas de la première colonne)

$$\forall i \geqslant 2,\ a'_{i,1} = 0 \ \text{ et } \ a'_{i,j} = \binom{p+i+j-3}{p+i-1}$$

4. Les opérations effectuées laissant le déterminant invariant, on a $\det(A_p) = \det(A'_p)$. En effectuant un développement par rapport à la première colonne (ou bien en remarquant que c'est un matrice triangulaire supérieure par blocs, on obtient

$$d_p = \det(A'_p) = 1 \times \det\left(\left(\binom{p+i+j-3}{p+i-1}\right)_{2\leqslant i,j\leqslant n-p+1}\right)$$

En opérant un changement d'indice ($i' = i-1$ et $j' = j-1$) ceci s'écrit

$$d_p = \det\left(\left(\binom{p+1+i'+j'-2}{p+1+i'-1}\right)_{1\leqslant i',j'\leqslant n-(p+1)+1}\right) = d_{p+1}$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall p \in [\![0\ ;\ n]\!],\ \ d_p = d_n = 1$$

Une correction du problème

énoncé

(Adapté d'une épreuve de HEC 2005, voie scientifique.)

La fonction Gamma d'Euler

1. Soit x un réel strictement positif.

- La fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\ ;+\infty[$;
- en $+\infty$, par croissances comparées $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$,

  En général, quand l'intégrande étudiée contient une exponentielle qui tend vers 0 en $+\infty$, elle est négligeable en $+\infty$ par croissances comparées devant $\frac{1}{t^2}$.

  or la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1\ ;+\infty[$, donc par domination, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est aussi intégrable sur $[1\ ;+\infty[$;
- en 0, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$; or, comme $1-x<1$ car $x>0$, la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0\ ;1]$, donc par équivalence $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est aussi intégrable sur $]0\ ;1]$;
- on en déduit que la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0\ ;+\infty[$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale définissant $\Gamma(x)$.

En conclusion, la fonction Γ est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Soit $x>0$. On effectue dans l'intégrale $\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$ une intégration par parties dans laquelle on pose $u(t)=t^x$ et $v(t)=-\mathrm{e}^{-t}$.
   Ces fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, et de plus

$$u(t)\times v(t)=-t^x\mathrm{e}^{-t}\begin{cases}\xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} 0 & \text{car } x>0,\\ \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} 0 & \text{par croissances comparées.}\end{cases}$$

   donc cette intégration par parties est licite. Comme l'intégrale de départ est convergente, on obtient alors l'égalité

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t=\left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t\\ &=x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t=x\Gamma(x)\ \text{C.Q.F.D}\end{aligned}$$

3. Pour $n=1$,

$$\begin{aligned}\Gamma(1)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t=\lim_{A\to+\infty}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{A}\\ &=\lim_{A\to+\infty}\left[1-\mathrm{e}^{-A}\right]=1=(1-1)!\end{aligned}$$

   Puis, si pour un entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)=(n-1)!$, alors au rang suivant, grâce à la question précédente,

$$\Gamma(n+1)=n\times\Gamma(n)=n\times(n-1)!=n!\ \text{C.Q.F.D}$$

Une expression de $\Gamma(x)$

4. La fonction $\varphi : u\mapsto \ln(1-u)+u$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$, sa dérivée est $u\mapsto -\frac{1}{1-u}+1=-\frac{u}{1-u}$, elle est négative sur $[0\ ;\ 1[$. Ainsi, φ est décroissante sur $[0\ ;\ 1[$, et comme $\varphi(0)=0$, on peut conclure que φ est négative sur $[0\ ;\ 1[$, ce qui donne le résultat voulu, c'est-à-dire

$$\forall u\in[0\ ;\ 1[,\ \ \ln(1-u)\leqslant -u.$$

Soit $t \in [0\,;\,n[$, alors $\frac{t}{n} \in [0\,;\,1[$, d'où par la question précédente

$$\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}$$

puis en multipliant par n qui est positif

$$n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -t$$

et enfin en composant par l'exponentielle qui est croissante,

$$\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

c'est-à-dire

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

Si $t=n$, $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = 0 \leqslant \mathrm{e}^{-n}$, et on a bouclé la réponse à cette question.

5. Les fonctions $t \mapsto 1-\frac{t^2}{n}$ et $t \mapsto 1-\frac{t}{n}$ sont dérivables sur $\left[0\,;\,\sqrt{n}\right[$ à valeurs dans $]0\,;\,+\infty[$, où la fonction ln est aussi dérivable, donc par composition, la fonction φ est dérivable sur $\left[0\,;\,\sqrt{n}\right[$.
De plus pour tout $t \in \left[0\,;\,\sqrt{n}\right[$,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{-2t/n}{1-\frac{t^2}{n}} - 1 - n \times \frac{-1/n}{1-\frac{t}{n}} = (\cdots)\\ &= \frac{-t(t^2-2t+n)}{(n-t^2)(n-t)} = \frac{-t\left((t-1)^2+(n-1)\right)}{(n-t^2)(n-t)}.\end{aligned}$$

Je vous laisse vérifier que t étant dans $\left[0\,;\,\sqrt{n}\right[$, alors $\varphi'(t) \leqslant 0$, donc φ est décroissante sur $\left[0\,;\,\sqrt{n}\right[$.
Comme $\varphi(0)=0$, il s'en suit que φ est négative sur $\left[0\,;\,\sqrt{n}\right[$.
On en déduit que, pour tout $t \in \left[0\,;\,\sqrt{n}\right[$,

$$\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) - t \leqslant n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)$$

puis en composant par l'exponentielle, avec les propriétés d'icelle, on obtient l'inégalité demandée.

6. ➟ Grâce aux deux questions précédentes, il ne nous reste plus qu'à prouver, pour $t \in \left[\sqrt{n}\ ;\ n\right]$, l'inégalité

$$\mathrm{e}^{-t} - \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Or pour $t \in \left[\sqrt{n}\ ;\ n\right]$, $t^2 \geqslant n$, mais $t \leqslant n$. Ainsi $1 - \frac{t^2}{n} \leqslant 0$, donc $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant 0$, et $1 - \frac{t}{n} \geqslant 0$, et par conséquent $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geqslant 0$, d'où l'inégalité voulue.

➟ Soit $x > 0$. Multiplions les membres de l'inégalité établie ci-dessus par le réel positif t^{x-1},

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{n}t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

Ces trois fonctions sont continues sur $]0\ ;\ n]$, de plus on a vu plus haut que $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}$ sont intégrables sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc sur $]0\ ;\ n]$, donc par domination la fonction $t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ est aussi intégrable sur $]0\ ;\ n]$. On peut donc intégrer ces trois fonctions, et **les inégalités sont conservées par croissance de l'intégrale** :

$$\begin{aligned}\int_0^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t - \frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \\ \leqslant \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t \\ \leqslant \int_0^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t.\end{aligned}$$

Par définition de la convergence des intégrales définissant $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+2)$, on sait que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \Gamma(x)$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \Gamma(x+2)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\,t = 0\times\Gamma(x+2) = 0.$$

Ainsi par **le principe d'encadrement**, on peut conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}\,t = \Gamma(x).$$

Lien avec la fonction Beta, définition de la fonction Gamma par produits infinis

7. Soient x et y strictement positifs.
   - La fonction $u \longmapsto u^{x-1}(1-u)^{y-1}$ est continue sur $]0\,;1[$;
   - en 0, $u^{x-1}(1-u)^{y-1} \underset{u\to 0}{\sim} u^{x-1} = \frac{1}{u^{1-x}}$, qui est une fonction de Riemann intégrable sur $]0\,;1/2]$ puisque $1-x<1$, donc par équivalence $u\longmapsto u^{x-1}(1-u)^{y-1}$ est aussi intégrable sur $]0\,;1/2]$;
   - en 1, $u^{x-1}(1-u)^{y-1} \underset{u\to 1}{\sim} (1-u)^{y-1}$ qui est intégrable sur $[1/2\,;1[$ *(elle fait partie des fonctions de référence, par décalage des fonctions de Riemann)*, donc par équivalence $u\longmapsto u^{x-1}(1-u)^{y-1}$ est aussi intégrable sur $[1/2\,;1[$.

   On en déduit que $u\longmapsto u^{x-1}(1-u)^{y-1}$ est intégrable sur $]0\,;1[$, d'où l'existence de $\mathrm{B}(x,y)$.
8. Pour tous $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f(u)=(1-u)^n$ et $g(u)=\frac{1}{x}u^x$. Ces fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;1]$, puis

$$f(u)\times g(u) \xrightarrow[u\longrightarrow 0]{} 0 \text{ car } x>0,$$

   On peut donc effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(x,n+1) &= \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\mathrm{d}\,y = \int_0^1 g'(u)f(u)\mathrm{d}u\\
&= \left[\frac{1}{x}u^x(1-u)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}(-n)u^x(1-u)^{n-1}\mathrm{d}\,u\\
&= \frac{n}{x}\int_0^1 \frac{1}{x}u^x(1-u)^{n-1}\mathrm{d}\,u\\
&= \frac{n}{x}\mathrm{B}(x+1,n).
\end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit alors que

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x,n+1) &= \frac{n}{x}\times\frac{n-1}{x+1}\times\cdots\frac{1}{x+n-1}\times \mathrm{B}(x+n,1)\\ &= \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\times \mathrm{B}(x+n,1).\end{aligned}$$

Or

$$\mathrm{B}(x+n,1)=\int_0^1 u^{x+n-1}\mathrm{d}u=\left[\frac{u^{x+n}}{x+n}\right]_{u=0}^{u=1}=\frac{1}{x+n},$$

donc on obtient bien

$$\boxed{\mathrm{B}(x,n+1)=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}}.$$

De plus on sait que $\boxed{n!=\Gamma(n+1)}$, et de $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, on déduit par récurrence que

$$\Gamma(x+n+1)=(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\,\Gamma(x)$$

d'où

$$\boxed{\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+n+1)}=\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}},$$

et le résultat demandé

$$\boxed{\mathrm{B}(x,n+1)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}}.$$

9. Soit $x>0$.

➠ On sait grâce à la question 6. que

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

➟ La fonction $t \mapsto \frac{t}{n}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $]0\,;n[$ sur $]0\,;1[$, on peut donc appliquer le changement de variables $u = \frac{t}{n}$, ou $t = nu$, à l'intégrale convergente

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}\, t$$

et obtenir l'égalité

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}\, t &= \int_0^1 \left(1-u\right)^n (nu)^{x-1} n \mathrm{d}\, u \\ &= n^x \int_0^1 \left(1-u\right)^n u^{x-1} \mathrm{d}\, u \\ &= n^x \,\mathrm{B}(x, n+1),\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} n^x \,\mathrm{B}(x, n+1).$$

➟ Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait grâce à la question 8. que

$$\begin{aligned} n^x \,\mathrm{B}(x, n+1) &= n^x \frac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)} \\ &= n^x \times \Gamma(n+1) \times \frac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)} \\ &= n^x \times n! \times \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} \\ &= \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},\end{aligned}$$

ce qui nous donne la limite voulue.

➟ Cette limite $\frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \Gamma(x)$ entraîne que

$$x(x+1)\cdots(x+n)\Gamma(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} n^x n!$$

Or on a déjà vu plus haut que

$$\begin{aligned} x(x+1)\cdots(x+n)\Gamma(x) &= (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x) \\ &= \Gamma(x+n+1)\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma(x+n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^x n!.$$

En remplaçant n par $n-1$ on a *(par composition des limites)* finalement

$$\Gamma(x+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)^x(n-1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^x(n-1)! \text{ C.Q.F.D.}$$

10. On applique le résultat précédent successivement à λ_{2n} et λ_{2n+1} :

$$\lambda_{2n} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^0(n-1)!}{n^{1/2}(n-1)!} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{2n}}$$

$$\lambda_{2n+1} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma(1+n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1/2}(n-1)!}{n^1(n-1)!} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{2n}}{\sqrt{\frac{2}{2n}}} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{2n+1}}{\sqrt{\frac{2}{2n+1}}} = 1,$$

par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{\sqrt{\frac{2}{n}}} = 1,$$

D'où l'équivalent demandé

$$\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}.$$