Matrices inversibles, puissances de matrices, rang

Exercice 9.1 – Commutant d'une matrice

Soit $\mathrm{D} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ de coefficients diagonaux deux à deux distincts.

1. Montrer qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si, et seulement si, elle est diagonale.
2. Soit A une matrice semblable à D.
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{AB} = \mathrm{BA}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{n-1})$ est une base.

Exercice 9.2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3)^3$ est nulle, et en déduire les puissances successives de A.

Exercice 9.3 – (*)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = \mathrm{e}^{i2\pi/n}$, et la matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général

$$(\mathrm{A})_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)} \text{ pour tout } (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Calculer $\mathrm{A} \times \overline{\mathrm{A}}$, en déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 9.4

Étudier l'inversibilité des matrices suivantes, et en donner le cas échéant l'inverse :

$$\begin{pmatrix} 1+i & -1 & 2i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $(\mathrm{A})_{i,j} = \begin{cases} j - i + 1, & \text{si } i \leqslant j\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 9.5 – (*)

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geqslant p$, et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{I}_n$, alors $n = p$.
2. Montrer que si $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{J}_p$ (où J_p est la matrice canonique de rang p), alors $\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_p$.

 (mis à jour le 10 novembre 2023)

Exercice 9.6 – (*) Oral ESPCI

Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que $A + YX^\top$ est inversible si et seulement si $X^\top A^{-1} Y \neq -1$.

Exercice 9.7 – (**) Matrice à diagonale strictement dominante, et matrice stochastique stricte

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à **diagonale strictement dominante**, c'est-à-dire telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\left|a_{i,i}\right| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{i,j}\right|$.
   Montrer que A est inversible.
   (On pourra raisonner par l'absurde et s'intéresser à $\mathrm{Ker}(A)$*.)*
2. On considère une **matrice stochastique stricte** $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à coefficients strictement positifs telle que pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
   Montrer que $\mathrm{rg}(A - I_n) = n - 1$, et que $|\det(A)| < 1$.

Exercice 9.8 – Une chaîne de Markov

On note J la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ dont tous les termes valent 1, et $A = \frac{1}{5}(I_4 + J)$.

1. Calculer les puissances de la matrice J, puis de A.
2. Une particule oscille entre 4 états d'énergie notés A, B, C et D. Elle est au temps 0 dans l'état A, puis à chaque instant, elle reste dans l'état où elle est avec la probabilité $\frac{2}{5}$ ou passe dans l'un des trois autres états avec la probabilité $\frac{1}{5}$ pour chacun.
   Pour tout instant $t \in \mathbb{N}$, on note $A(t)$ (*resp.* $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$) l'événement « la particule est dans l'état A (*resp.* B, C et D) au temps t », et on considère la matrice colonne :
   $$U(t) = \begin{pmatrix} P(A(t)) & P(B(t)) & P(C(t)) & P(D(t)) \end{pmatrix}^\top.$$
   (a) Donner pour tout $t \in \mathbb{N}$, une relation entre $U(t+1)$ et $U(t)$.
   (b) En déduire en fonction de t les probabilités à l'instant t des différents états de la particule.

Exercice 9.9 – (**) - Oral X (Utilise les polynômes de Lagrange à la dernière question)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{L}_n = \left((\mathrm{X}^2-1)^n\right)^{(n)}$.

1. Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{L}_n(t)\mathrm{d}\,t = 0$.
2. Montrer que L_n est scindé, à racines simples dans $[-1\ ;\ 1]$, notées x_i avec $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$.
3. Montrer qu'il existe $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}]$,
$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}\,t = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{P}(x_k).$$

Déterminants

Exercice 9.10

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = u_n v_n$, et Δ_n le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général
$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ u_j & \text{si } i = j+1, \\ -v_i & \text{si } j = i+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer Δ_1 et Δ_2, et démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-2}$.
2. Prouver que $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \Delta_n \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$.
3. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge.
   (a) Prouver que la suite de terme général $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ converge.
   (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
4. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \geqslant 1$.
   (b) Étudier la nature de la série de terme général $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum a_n$. Qu'a-t-on établi ?

Exercice 9.11

Soit $A,B,C,D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $AC = CA$.

Démontrer que $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$.

Exercice 9.12 – (*) Oral Mines-Ponts

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $P(a_k) = 1 + a_k^n$.
2. Calculer le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $1 + a_i^j$.

Exercice 9.13 – Avec le déterminant de Vandermonde

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$, P un polynôme de degré 4,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} \text{ et } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a) \\ 1 & b & b^2 & P(b) \\ 1 & c & c^2 & P(c) \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix}.$$

1. Exprimer Δ en fonction de D (et de P).
2. En déduire l'expression de D en fonction de a,b,c,d.

Exercice 9.14 – (*)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$.

1. Justifier que la famille $(P,P',\ldots,P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. On prend $a_0,\ldots,a_n$ des nombres 2 à 2 distincts, montrer que les polynômes $P(X+a_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ forment une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{C}$, le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n+2$ de terme général $P(x+i+j)$, avec $0 \leqslant i,j \leqslant n+1$, est nul.

Exercice 9.15

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $(\mathrm{A})_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i = j, \\ b & \text{si } i > j, \\ c & \text{si } i < j. \end{cases}$

On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{A} + \mathrm{X}\,\mathrm{J})$ définit un polynôme de $\mathbb{C}_1[\mathrm{X}]$.
2. En déduire la valeur de $\det(\mathrm{A})$ en fonction de a,b,c dans le cas où $b \neq c$.
3. En déduire la valeur de $\det(\mathrm{A})$ dans le cas où $b = c$.

Généralités, matrices semblables

Exercice 9.16 – Oral CCP - sans préparation

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit f un endomorphisme non nul de E. On suppose que f^2 est l'endomorphisme nul de E.

1. Déterminer le rang de f et la dimension de son noyau.
2. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de f relativement à cette base soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.17

Soient $\mathrm{D} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux sont deux à deux distincts.
Montrer que l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{MD} - \mathrm{DM}$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dont le noyau est le sous-espace vectoriel des matrices diagonales, et l'image le sous-espace vectoriel des matrices de diagonale nulle.

Exercice 9.18

On considère les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à la matrice N, et préciser la matrice inversible P qui vérifie $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.
2. Calculer les puissances successives de N, et retrouver alors A^n en fonction de n.

Exercice 9.19

Soient A, B et N les matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer les matrices A et B à l'aide des matrices N et I_4.
2. Démontrer que A et B sont semblables si et seulement si N et $-N$ sont semblables.
3. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

Exercice 9.20 – (*) Oral CCP - sans préparation

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et Φ l'endomorphisme $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AX + XA$.
Exprimer la trace de Φ en fonction de celle de A.

Exercice 9.21 – (**)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $(p_1, \dots, p_r)$ une famille de r projecteurs de E. On suppose que $p_1 + \cdots + p_r = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer, en utilisant la trace, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(p_i) = n$.
2. Montrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Im}(p_i)$.
3. Montrer que si $i \neq j$, $p_i \circ p_j$ est l'endomorphisme nul.

Exercice 9.22

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_n\}$, et $f : X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto -X + (\mathrm{Tr}(X))\,A$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose que $\mathrm{Tr}(A) \neq 1$. Démontrer que f est bijective. Résoudre alors l'équation $f(X) = B$ où B est une matrice fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. On suppose maintenant que $\mathrm{Tr}(A) = 1$. Démontrer que $f \circ f = -f$, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Solutions

Une correction de l'exercice 9.1 — *énoncé*

1. Notons $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(d_1,\ldots,d_n)$ où les d_i sont deux à deux distincts. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   Alors pour tout $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}\times\mathrm{M})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{D})_{i,k}(\mathrm{M})_{k,j} = (\mathrm{D})_{i,i}(\mathrm{M})_{i,j} \quad \textit{(car } (\mathrm{D})_{i,k}=0 \textit{ pour } i\neq k\textit{)}\\ &= d_i(\mathrm{M})_{i,j}\end{aligned}$$

   et de même $(\mathrm{M}\times\mathrm{D})_{i,j} = d_j(\mathrm{M})_{i,j}$.
   Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{MD}=\mathrm{DM} &\iff \forall(i,j)\in[\![1 \,;\, n]\!]^2, (\mathrm{D}\times\mathrm{M})_{i,j} = (\mathrm{D}\times\mathrm{M})_{i,j}\\ &\iff \forall(i,j)\in[\![1 \,;\, n]\!]^2, d_i(\mathrm{M})_{i,j} = d_j(\mathrm{M})_{i,j}\\ &\iff \forall(i,j)\in[\![1 \,;\, n]\!]^2, (d_i-d_j)(\mathrm{M})_{i,j} = 0\\ &\iff \forall(i,j)\in[\![1 \,;\, n]\!]^2,\ \ i\neq j \Rightarrow (\mathrm{M})_{i,j}=0 \quad \textit{(car } d_i\neq d_j\textit{)}\\ &\iff \mathrm{M} \text{ est diagonale.}\end{aligned}$$

2. ➟ Soit A telle qu'il existe P inversible vérifiant $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.
   - La matrice nulle commute bien avec A, donc elle est dans $\mathscr{C}(\mathrm{A})$, qui ainsi est non vide.
   - Soient B et C dans $\mathscr{C}(\mathrm{A})$, et λ,μ dans $\mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned}(\lambda\mathrm{B}+\mu\mathrm{C})\mathrm{A} &= \lambda\mathrm{BA}+\mu\mathrm{CA}\\ &= \lambda\mathrm{AB}+\mu\mathrm{AC} \quad \textit{(car B et C commutent avec A)}\\ &= \mathrm{A}(\lambda\mathrm{B}+\mu\mathrm{C})\end{aligned}$$

     donc $\lambda\mathrm{B}+\mu\mathrm{C}\in\mathscr{C}(\mathrm{A})$, C.Q.F.D.

   ➟ Il est clair que les puissances de A commutent avec A, donc $\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^n$ sont bien dans $\mathscr{C}(\mathrm{A})$.

- Montrons que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. Prenons une famille de scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ qui vérifient $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k = 0_n$.

  Alors $P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k\right) P = 0_n$.

  Or

$$P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k\right) P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P^{-1} A^k P,$$

  et

$$\begin{aligned} P^{-1}A^kP &= P^{-1}A \times A \times \cdots \times A \times P \\ &= P^{-1}AP \times P^{-1}AP \times P^{-1} \times \cdots \times P^{-1}A \times P \\ &= \left(P^{-1}AP\right)^k = D^k \end{aligned}$$

  (pour bien faire faudrait le prouver par récurrence).
  Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = 0_n,$$

  mais on sait par les règles de calcul sur les matrices diagonales que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = \mathrm{Diag}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_n^k\right),$$

  donc $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_i^k = 0$ pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, autrement dit les d_i sont racines du polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$.

  Ce polynôme a donc n racines deux à deux distinctes, mais il est de degré au plus $n-1$, donc il est nul, ce qui prouve (enfin) que ses coefficients $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ sont nuls.
  On peut donc conclure que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.

- Enfin, , alors $A = PDP^{-1}$, et

$$\begin{aligned} B \in \mathscr{C}(A) \iff AB = BA \iff & \left(PDP^{-1}\right)B = B\left(PDP^{-1}\right) \\ \iff & D\left(P^{-1}BP\right) = \left(P^{-1}BP\right)D \quad \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1} \textit{ et à droite par } P\textit{)} \\ \iff & P^{-1}BP \text{ commute avec } D \end{aligned}$$

  Ainsi l'application $B \mapsto P^{-1}BP$ est :
  - une application de $\mathscr{C}(A)$ dans $\mathscr{C}(D)$,
  - linéaire, par la bilinéarité du produit matriciel (voir prop 9.3),
  - bijective car sa réciproque est tout simplement $M \mapsto PMP^{-1}$,

  donc $\mathscr{C}(A)$ et $\mathscr{C}(D)$ sont isomorphes.
  Or on a vu dans la première question que $\mathscr{C}(D) = \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, et $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n (une base en est $\left(E_{1,1}, \dots, E_{n,n}\right)$), donc on en déduit que $\mathscr{C}(A)$ est aussi de dimension n.
- Il est temps de conclure : la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre, de cardinal n, ses membres sont bien dans $\mathscr{C}(A)$, et $\mathscr{C}(A)$ est de dimension n, donc la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une base de $\mathscr{C}(A)$.

Une correction de l'exercice 9.2

énoncé

$(A + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$, et $(A + I_3)^2 = 0_3$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n &= \left((\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)-\mathrm{I}_3\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^k(-\mathrm{I}_3)^{n-k} \quad \textit{(on peut appliquer la formule du binôme car } \mathrm{A}+\mathrm{I}_3 \textit{ et } -\mathrm{I}_3 \textit{ commutent entre elles)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\underbrace{(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^k}_{=0_3} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^k \\
&= (-1)^n\mathrm{I}_3 + (-1)^{n-1}n(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3) + (-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^2 \\
&= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -na & -na \\ -n & 1+\frac{n(n-1)}{2}a & \frac{n(n-1)}{2}a \\ n & -\frac{n(n-1)}{2}a & 1-\frac{n(n-1)}{2}a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 9.3

énoncé

Remarquons que $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$, donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A} \times \overline{\mathrm{A}})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A})_{ik} \times (\overline{\mathrm{A}})_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)} \times \frac{1}{\omega^{(k-1)(j-1)}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)-(k-1)(j-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)(i-j)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\omega^{i-j}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{i-j}\right)^{k} \\
&= \begin{cases} n & \text{si } \omega^{i-j} = 1 \\ \frac{1-\omega^{n(i-j)}}{1-\omega^{i-j}} = 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

On sait que $\omega^p = 1$ si, et seulement si, p est un multiple de n. Or $i - j$ est un entier compris entre $-(n-1)$ et $n-1$, donc le seul multiple de n auquel $i-j$ peut être égal est 0.
Ainsi $\omega^{i-j} = 1$ si, et seulement si, $i = j$.
On en déduit que

$$(\mathrm{A} \times \overline{\mathrm{A}})_{ij} = \begin{cases} n & \text{si } i = j \\ \frac{1-\omega^{n(i-j)}}{1-\omega^{i-j}} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\mathrm{A} \times \overline{\mathrm{A}} = n\mathrm{I}_n$, ce qui prouve que A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{n}\overline{\mathrm{A}}$.

Une correction de l'exercice 9.4

énoncé

1. Notons $D = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 2i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$, les opérations

$$\begin{aligned} &L_1 \longleftrightarrow L_3, \\ &L_2 \leftarrow L_2 - iL_1, \\ &L_3 \leftarrow L_3 - (1+i)L_1, \\ &L_3 \leftarrow L_3 + iL_2, \\ &L_2 \leftarrow L_2 - (1-i)L_3, \\ &L_1 \leftarrow L_1 - iL_2 - L_3 \end{aligned}$$

transforment $(D|I_3)$ en

$$\left(I_3 \middle| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ 1+i & 1+i & 1-3i \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

donc

$$D^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ 1+i & 1+i & 1-3i \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Par la méthode de son choix, on détermine l'inverse qui est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On traite les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, à la vue desquels on conjecture, que l'inverse de A est la matrice B définie par

$$(B)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \text{ ou } i = j-2\,; \\ -2, & \text{si } i = j-1\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Prouvons cette conjecture avec la formule du produit matriciel :

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}\times\mathrm{B})_{ij} &= \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{A})_{ik}(\mathrm{B})_{kj}\\ &= \sum_{k=i}^{j}(k-i+1)(\mathrm{B})_{kj} \quad \textit{(car } (\mathrm{A})_{ik}=0 \textit{ pour } k<i \textit{ et } (\mathrm{B})_{kj}=0 \textit{ pour } j<k\textit{)}\end{aligned}$$

donc

- si $j<i$, $(\mathrm{A}\times\mathrm{B})_{ij}=0$;
- si $j=i$, $(\mathrm{A}\times\mathrm{B})_{ij}=1\times 1=1$;
- si $j=i+1$, $(\mathrm{A}\times\mathrm{B})_{ij}=1\times(\mathrm{B})_{j-1,j}+2\times(\mathrm{B})_{j,j}=1\times -2+2\times 1=0$;
- si $j>i+1$, $(\mathrm{A}\times\mathrm{B})_{ij}=(j-2-i+1)\times 1+(j-1-i+1)\times(-2)+(j-i+1)\times 1=0$ C.Q.F.D

Une correction de l'exercice 9.5 *énoncé*

1. Si $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{I}_n$, alors $\mathrm{rg}(\mathrm{A}\times\mathrm{B})=\mathrm{rg}(\mathrm{I}_n)=n$, et on sait que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}\times\mathrm{B})\leqslant\min(\mathrm{rg}(\mathrm{A}),\mathrm{rg}(\mathrm{B}))$.
   Or comme $n\geqslant p$, $\mathrm{rg}(\mathrm{A})\leqslant p$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{B})\leqslant p$, donc $\min(\mathrm{rg}(\mathrm{A}),\mathrm{rg}(\mathrm{B}))\leqslant p$.
   Ainsi $n\leqslant p$, comme $n\geqslant p$, on peut conclure que $n=p$.
2. Supposons que $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{J}_p$.
   Découpons les matrices A et B par blocs

   $$\mathrm{A}=\left(\begin{array}{c}\mathrm{A}_1\\ \hline \mathrm{A}_2\end{array}\right) \text{ et } \mathrm{B}=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2\end{array}\right)$$

   avec $\mathrm{A}_1\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{A}_2\in\mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{B}_1\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, et $\mathrm{B}_2\in\mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$.
   Alors, grâce à une multiplication par blocs,

   $$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 & \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2\\ \hline \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1 & \mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\end{array}\right)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \text{et } \mathrm{B}\times\mathrm{A}=\left(\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1+\mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\right)\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$$

   Ainsi, par identification des blocs, on déduit de $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{J}_p$ que $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1=\mathrm{I}_p$, et les trois autres produits sont nuls.

De $A_1B_1 = I_p$, on déduit que les deux matrices carrées A_1 et B_1 sont inversibles et inverses l'une de l'autre, et donc que $B_1A_1 = I_p$.
Ainsi, de $A_1B_2 = 0$, on déduit en multipliant à gauche par B_1, que $B_2 = 0$.
De même, on déduit de $A_2B_1 = 0$ que $A_2 = 0$.
On obtient alors

$$B \times A = \left(B_1A_1 + B_2A_2\right) = I_p, \text{ C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 9.6 *énoncé*

Un des problèmes que cet exercice a soulevé est l'absence de contrôle de la part de nombreux élèves sur la validité des produits matriciels effectués, et sur le format des résultats. Rappelons donc que, dans les conditions de l'énoncé :

$$\begin{aligned} &YX^\top \text{ est une matrice } n \times n,\\ &X^\top Y \text{ est une matrice } 1 \times 1, \text{ autrement dit un réel,}\\ &X^\top A \text{ est une matrice ligne } 1 \times n,\\ &AY \text{ est une matrice colonne } n \times 1. \end{aligned}$$

En particulier, il est absurde d'affirmer que par exemple « A et Y commutent entre elles ».

Première méthode

On définit, par blocs de tailles identiques, les trois matrices ci-dessous appartenant à $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline X^\top & 1 \end{array}\right), \quad C = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \quad D = \left(\begin{array}{c|c} I_n & Y \\ \hline -X^\top A^{-1} & 1 \end{array}\right).$$

Alors avec des produits par blocs

$$BCD = (BC)D = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X^\top A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & Y \\ -X^\top A^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & Y \\ 0 & X^\top A^{-1}Y + 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathrm{DB}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}+\mathrm{Y}\mathrm{X}^\top & \mathrm{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Sachant que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux, on déduit de la première égalité que

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{BCD}) &= \det(\mathrm{I}_n)\times\det\left(1+\mathrm{X}^\top\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}\right)\\ &= 1+\mathrm{X}^\top\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}. \quad \textit{(car } 1+\mathrm{X}^\top\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y} \textit{ est une matrice } 1\times 1\textit{).}\end{aligned}$$

D'autre part, le déterminant d'un produit de matrices est le produit de leurs déterminants, donc

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{BCD}) &= \det(\mathrm{B})\det(\mathrm{C})\det(\mathrm{D}) = \det(\mathrm{D})\det(\mathrm{B})\det(\mathrm{C}) \quad \textit{(par commutativité du produit des réels)}\\ &= \det(\mathrm{DB})\det(\mathrm{C}),\end{aligned}$$

et comme au dessus

$$\det(\mathrm{DB})=\det\left(\mathrm{A}+\mathrm{Y}\mathrm{X}^\top\right),\ \text{ et }\ \det(\mathrm{C})=\det\left(\mathrm{A}^{-1}\right)=\frac{1}{\det(\mathrm{A})}.$$

Ainsi

$$\det(\mathrm{BCD})=\frac{\det\left(\mathrm{A}+\mathrm{Y}\mathrm{X}^\top\right)}{\det(\mathrm{A})}$$

La comparaison des deux valeurs de det(BCD) donne alors

$$\det(\mathrm{A}+\mathrm{Y}\mathrm{X}^\top)=\det(\mathrm{A})\left(1+\mathrm{X}^\top\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}\right).$$

Comme $\det(\mathrm{A})\neq 0$, l'égalité ci-dessus prouve que $\mathrm{A}+\mathrm{Y}\mathrm{X}^\top$ est inversible si et seulement si $\mathrm{X}^\top\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}\neq -1$.

Une autre méthode

➟ Supposons $\mathrm{A}+\mathrm{Y}\mathrm{X}^\top$ non inversible, et montrons que $\mathrm{X}^\top\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}=-1$.

- Si $A+YX^\top$ n'est pas inversible, alors il existe un vecteur non nul dans son noyau, autrement dit, il existe un vecteur colonne C non nul tel que $(A+YX^\top)C=0$, ce qui revient à $AC=-YX^\top C$.
- On en déduit dans un premier temps que $X^\top C$ est non nul, car sinon on aurait $AC=0$ qui entraîne en multipliant à gauche par A^{-1} que $C=0$, ce qui contredit la propriété initiale de C. Remarquons aussi que $X^\top C$ est une matrice 1×1, autrement dit un réel.
- Ainsi en multipliant à gauche les deux membres de l'égalité $AC=-YX^\top C$ par $X^\top A^{-1}$, on obtient :

$$X^\top C=-X^\top A^{-1}YX^\top C,$$

donc grâce à la remarque précédente, on peut multiplier par le réel $\frac{1}{X^\top C}$, et obtenir

$$1=-X^\top A^{-1}Y,$$

autrement dit

$$X^\top A^{-1}Y=-1.$$

Donc par contraposée, $X^\top A^{-1}Y\neq -1$ entraîne que $A+YX^\top$ est inversible.

➟ Réciproquement : supposons que $A+YX^\top$ est inversible, et montrons que $X^\top A^{-1}Y\neq -1$.
On va encore procéder par contraposée, en supposant que $X^\top A^{-1}Y=-1$, et en montrant qu'alors que $A+YX^\top$ n'est pas inversible. Pour cela on va essayer de trouver une colonne non nulle telle que $\left(A+YX^\top\right)C=0$.

- Si Y est la colonne nulle, alors $A+YX^\top=A$ est de toutes façons inversible, tandis que $X^\top A^{-1}Y=0\neq -1$, donc l'équivalence demandée par l'énoncé est vraie.
- Plaçons-nous maintenant dans le cas où Y est non nulle.
  Alors, $A^{-1}Y$ est une colonne non nulle, puisque A^{-1} est une matrice inversible, et de plus

$$\begin{aligned}\left(A+YX^\top\right)\times\left(A^{-1}Y\right)&=Y+YX^\top A^{-1}Y=Y+Y\left(X^\top A^{-1}Y\right)\\&=Y+Y\times(-1)\ \textit{(par hypothèse)}\\&=0,\end{aligned}$$

donc $A+YX^{\top}$ n'est pas inversible, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 9.7 *énoncé*

1. Soit $X=(x_1,\ldots,x_n)\in\operatorname{Ker}(A)$, alors $AX=0$, donc

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0.$$

Notons p l'entier qui vérifie $\left|x_p\right|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$. Supposons que $X\neq 0$, alors $\left|x_p\right|>0$, puis :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_{pj}x_j=0 &\Longleftrightarrow a_{pp}x_p=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}a_{pj}x_j\\ &\Rightarrow \left|a_{pp}\right|\left|x_p\right|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\left|a_{pj}\right|\left|x_j\right|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\left|a_{pj}\right|\left|x_p\right|\\ &\Longleftrightarrow \left|a_{pp}\right|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\left|a_{pj}\right| \quad \textit{(en multiplant par } \tfrac{1}{|x_p|} \textit{ qui est strictement positif)}\end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse.

2. ➟ D'une part, on remarque que $A\times U=U$ où U est la colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. En effet pour tout $i\in[\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\begin{aligned}(A\times U)_i&=\sum_{j=1}^{n}(A)_{i,j}(U)_{j,1}=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\times 1\\ &=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1=(U)_{i,1},\end{aligned}$$

donc $(A-I_n)U=0$, autrement dit $U\in\operatorname{Ker}(A-I_n)$, et comme $\operatorname{Ker}(A-I_n)$ est stable par combinaison linéaire, on a l'inclusion $\boxed{\operatorname{Vect}(U)\subset\operatorname{Ker}(A-I_n)}$.

- Réciproquement, soit $X = (x_i) \in \mathbb{K}^n$, si X est dans $\mathrm{Ker}(A - I_n)$, alors $AX = X$, donc pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\begin{aligned}(A \times X)_i = x_i &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (A)_{i,j}(X)_{j,1} = x_i \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = x_i.\end{aligned}$$

  En particulier, si on note p l'entier qui vérifie $x_p = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i)$, on a pour $i = p$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}x_j = x_p &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{p,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{p,j}x_p \quad \textit{(car } \sum_{j=1}^{n} a_{p,j} = 1\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{p,j}(x_p - x_j) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall j \in [\![1\ ;\ n]\!],\ a_{p,j}(x_p - x_j) = 0 \quad \textit{(car tous les termes } a_{p,j}(x_p - x_j) \textit{ de la somme sont positifs)} \\ &\quad \forall j \in [\![1\ ;\ n]\!],\ x_p = x_j \quad \textit{(car tous les } a_{p,j} \textit{ sont non nuls).}\end{aligned}$$

  Ainsi les coefficients de X sont tous égaux, donc $X \in \mathrm{Vect}(U)$.
  On en déduit l'inclusion $\boxed{\mathrm{Ker}(A - I_n) \subset \mathrm{Vect}(U)}$.

- On en conclut l'égalité $\boxed{\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)}$.
  Ainsi par le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(A - I_n) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathrm{Ker}(A - I_n)) = n - 1.$$

Pour le déterminant, on va raisonner par récurrence sur le nombre n de lignes et colonnes des matrices.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$\mathscr{P}(n)$ | *si* $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifie les deux conditions*

$$(a)\, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\, a_{ij} \in [0,1[\,;$$
$$(b)\, \forall i \in [\![1,n]\!],\, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \leqslant 1,$$

alors $|\det(A)| < 1$.

(a) Je laisse au lecteur le soin de se convaincre de la véracité de $\mathscr{P}(1)$.

(b) Supposons que pour un entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et montrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Pour cela, prenons une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui vérifie les deux conditions

$$\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2,\, a_{ij} \in [0,1[\,;$$
$$\forall i \in [\![1,n+1]\!],\, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \leqslant 1.$$

Alors en développant suivant la première ligne,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{1,j} a_{1,j},$$

donc

$$\begin{aligned} |\det(A)| &= \left| \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{1,j} a_{1,j} \right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|\Delta_{1,j}\right| a_{1,j} \quad \textit{(par inégalité triangulaire, et positivité des } a_{1,j}\textit{).} \end{aligned}$$

Or pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\Delta_{1,j}$ est le déterminant d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie les conditions de l'hypothèse de récurrence *(si la somme des termes des lignes de* A *est inférieure à* 1*, alors elle le sera à plus forte raison si on en enlève un terme positif)*, hypothèse qui nous permet alors d'affirmer que $\left|\Delta_{i,j}\right| < 1$, donc $a_{1,j}$ étant positif, $\left|\Delta_{i,j}\right| a_{1,j} < a_{1,j}$, d'où en additionnant ces inégalités strictes pour j de 1 à n :

$$|\det(\mathrm{A})| < \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}$$

et comme par hypothèse $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} \geqslant 1$, on peut conclure le résultat voulu :

$$|\det(\mathrm{A})| < 1.$$

Une correction de l'exercice 9.8 *énoncé*

1. (a) Un simple calcul donne $\mathrm{J}^2 = 4\mathrm{J}$, puis par récurrence $\mathrm{J}^k = 4^{k-1}\mathrm{J}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   > *Il faut noter dès à présent que cette formule n'est pas valable pour $k = 0$, ce qui va avoir beaucoup d'importance dans la question suivante.*

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les matrices I_4 et J commutent entre elles, donc on peut utiliser la formule du binôme

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(\frac{1}{5}(I_4+J)\right)^n = \frac{1}{5^n}(I_4+J)^n \\
&= \frac{1}{5^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(I_4)^{n-k}J^k
\end{aligned}$$

> *l'erreur courante consiste à remplacer dans cette somme J^k par $4^{k-1}J$ dans se soucier du terme où $k=0$, qu'il faut isoler.*

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5^n}\left[\binom{n}{0}I_4^n J^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}I_4^{n-k}J^k\right] \\
&= \frac{1}{5^n}I_4 + \frac{1}{5^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^{k-1}J \\
&= \frac{1}{5^n}I_4 + \frac{1}{5^n}\times\left(\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k\right)J \\
&= \frac{1}{5^n}I_4 + \frac{1}{5^n}\times\frac{1}{4}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k - 1\right]J \\
&= \frac{1}{5^n}I_4 + \frac{1}{5^n}\times\frac{1}{4}\left[(4+1)^n-1\right]J \\
&= \frac{1}{5^n}I_4 + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)J
\end{aligned}$$

> *Comme on nous donne l'expression de A^n, on pouvait aussi faire cette question par récurrence.*

2. Donc d'après l'énoncé, on pose pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$U(t) = \begin{pmatrix} P(A(t)) \\ P(B(t)) \\ P(C(t)) \\ P(D(t)) \end{pmatrix},$$

pour alléger ces notations horribles, on décide de noter pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{U}(n) = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix}.$$

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, grâce à la formule des probabilités totales sur le système complet formé par les événements $\mathrm{A}(n)$, $\mathrm{B}(n)$, $\mathrm{C}(n)$ et $\mathrm{D}(n)$,

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{A}(n)) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{A}(n)) \\
&\qquad + \mathrm{P}(\mathrm{B}(n)) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{B}(n)) \\
&\qquad + \mathrm{P}(\mathrm{C}(n)) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{C}(n)) \\
&\qquad + \mathrm{P}(\mathrm{D}(n)) \times \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{D}(n)) \\
&= p_n \times \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{A}(n)) + q_n \times \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{B}(n)) \\
&\qquad + r_n \times \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{C}(n)) \\
&\qquad + s_n \times \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{D}(n)).
\end{aligned}$$

Mais d'après l'énoncé, $\mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{A}(n)) = \frac{2}{5}$, et

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{B}(n)) = \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{C}(n)) = \mathrm{P}(\mathrm{A}(n+1)|\mathrm{D}(n)) = \frac{1}{5},$$

d'où la relation

$$p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n + \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}s_n.$$

Le même raisonnement donne ensuite

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}q_n + \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}s_n \\
r_{n+1} &= \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n + \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}s_n \\
s_{n+1} &= \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n + \frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}s_n.
\end{aligned}$$

qui nous permet de conclure que

$$\mathrm{U}(n+1) = \mathrm{A} \times \mathrm{U}(n).$$

(b) Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{U}(n) = \mathrm{A}^n \mathrm{U}(0)$. Or d'après l'énoncé :

$$\mathrm{U}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{U}(n)$ est la première colonne de $\mathrm{A}^n = \frac{1}{5^n}\mathrm{I}_4 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\mathrm{J}$, ce qui donne

$$p_n = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{5^n}\right)$$

$$q_n = r_n = s_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right).$$

Une correction de l'exercice 9.9

énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Notons pour tout $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$, $\mathrm{D}_k = \left((\mathrm{X}^2 - 1)^n\right)^{(k)}$.
   On a donc $\mathrm{L}_n = \mathrm{D}_n = \mathrm{D}'_{n-1}$, et $\mathrm{D}_k = \mathrm{D}'_{k-1}$ pour $k \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$.
   Comme $(\mathrm{X}^2-1)^n = (\mathrm{X}+1)^n(\mathrm{X}-1)^n$, les réels -1 et 1 sont racines d'ordre n de $(\mathrm{X}^2-1)^n$, donc ils annulent aussi ses n premières dérivées (de la 0-ème à la $n-1$-ème) qui sont les D_k, pour $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$.
   Autrement dit, pour tout $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$, $\mathrm{D}_k(-1) = \mathrm{D}_k(1) = 0$.
   Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, les intégration par parties ci-dessous sont licites car on manipule des polynômes qui sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{L}_n(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[\mathrm{P}(t)\mathrm{D}_{n-1}(t)\Big] - \int_{-1}^{1} \mathrm{P}'(t)\mathrm{D}_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^{1} \mathrm{P}'(t)\mathrm{D}_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \ \ \textit{(car } D_{n-1}(-1) = \mathrm{D}_{n-1}(1) = 0\textit{)}\end{aligned}$$

puis de la même manière pour tout $k \in [\![1 ; n-1]\!]$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}^{(k)}(t)\mathrm{D}_{n-k}(t)\mathrm{d}\,t = -\int_{-1}^{1} \mathrm{P}^{(k+1)}(t)\mathrm{D}_{n-k-1}(t)\mathrm{d}\,t.$$

D'où par récurrence on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{L}_n(t)\mathrm{d}\,t &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \mathrm{P}^{(n)}(t)\mathrm{D}_0(t)\mathrm{d}\,t \\ &= 0 \quad \textit{(car } \deg(\mathrm{P}) \leqslant n-1, \textit{ donc } \mathrm{P}^{(n)} \textit{ est le polynôme nul).}\end{aligned}$$

2. Montrons que pour tout $p \in [\![0 ; n]\!]$, D_p possède p racines dans $]-1 ; 1[$.
Pour $p = 1$, on sait que $\mathrm{D}_0(-1) = \mathrm{D}_0(1) = 0$, et le théorème de Rolle donne l'existence d'une racine pour $\mathrm{D}_0' = \mathrm{D}_1$ dans $]-1,1[$.
Supposons le résultat vrai au rang $p \leqslant n-1$, et prouvons-le au rang $p+1$. On note $-1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p < 1$ les p racines de D_p dont l'existence est donnée dans $]-1,1[$ par l'hypothèse de récurrence.
Remarquons en outre que, puisque 1 et -1 sont racines d'ordre n de D_0, et que $p \leqslant n-1$, ces deux nombres sont encore racines de D_p. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Rolle $p+1$ fois : une fois entre -1 et α_1, $p-1$ fois entre α_i et α_{i+1} et une fois entre α_p et 1. Enfin, puisque P_n a au plus n racines, on vient de toutes les trouver.
3. ➟ Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}]$. La division euclidienne de P par L_n qui est de degré n donne l'existence et l'unicité des polynômes $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, le reste, et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q} \times \mathrm{L}_n + \mathrm{R}.$$

Et de plus, comme $\deg(\mathrm{P}) \leqslant 2n-1$ et $\deg(\mathrm{L}_n) = n$, on en déduit que $\deg(\mathrm{Q}) \leqslant n-1$.

➟ Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}\,t &= \int_{-1}^{1} \Big(\mathrm{Q}(t) \times \mathrm{L}_n(t) + \mathrm{R}(t)\Big)\mathrm{d}\,t \\ &= \int_{-1}^{1} \mathrm{Q}(t)\mathrm{L}_n(t)\mathrm{d}\,t + \int_{-1}^{1} \mathrm{R}(t)\mathrm{d}\,t.\end{aligned}$$

- Grâce à la question 1, on sait que $\int_{-1}^{1} \mathrm{Q}(t)\mathrm{L}_n(t)\mathrm{d}\,t = 0$, donc

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} \mathrm{R}(t)\mathrm{d}\,t.$$

- D'autre part les polynômes de Lagrange (vus en tédé d'informatique l'an passé) construits sur les racines x_i de L_n, c'est-à-dire les polynômes $\ell_i = \prod_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n} \frac{\mathrm{X}-x_j}{x_i-x_j}$, pour $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ avec en particulier

$$\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{R}(x_j)\ell_j(\mathrm{X}).$$

Donc ici

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} \mathrm{R}(t)\mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{R}(x_j)\ell_j(t)\mathrm{d}\,t$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{R}(x_j) \int_{-1}^{1} \ell_j(t)\mathrm{d}\,t,$$

soit

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}\,t = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathrm{R}(x_j),$$

en notant $\alpha_j = \int_{-1}^{1} \ell_j(t)\mathrm{d}\,t$.

- Enfin, les x_j sont racines de L_n, donc pour tout $j \in [\![1 \,;\, n]\!]$,

$$\mathrm{R}(x_j) = \mathrm{P}(x_j) - \mathrm{Q}(x_j) \times \mathrm{L}_n(x_j) = \mathrm{P}(x_j) - \mathrm{Q}(x_j) \times 0 = \mathrm{P}(x_j),$$

ce dont on déduit bien l'égalité demandée

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}\,t = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathrm{P}(x_j).$$

Une correction de l'exercice 9.10 *énoncé*

1. **Question préliminaire** : pour tous réels strictement positifs α et β, on déduit de $\alpha\beta > 0$ que

$$(1+\alpha)(1+\beta) = 1+\alpha+\beta+\alpha\beta \geqslant 1+\alpha+\beta.$$

2. D'abord $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1+u_1v_1$, puis en développant par rapport à la première colonne

$$\begin{aligned}\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} &= 1+u_2v_2 - u_1 \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1+u_2v_2-u_1(-v_1) = 1+u_2v_2+u_1v_1.\end{aligned}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Développons Δ_n par rapport à sa dernière ligne

$$\Delta_n = (-1)^{n+1+n}u_n \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \Delta_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & -v_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}.$$

Puis en développant par rapport à la dernière ligne, $\Delta_n = u_nv_n\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}$.

3. Dans un premier temps, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, on déduit par une récurrence sur deux termes de $\Delta_1 > 0$ et $\Delta_2 > 0$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n > 0$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 3, \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n\Delta_{n-2} > 0$, et comme pour $n=2$ on a également $\Delta_2 - \Delta_1 = u_2v_2 \geqslant 0$, on peut conclure que $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

4. On sait que $\Delta_1 = 1+a_1$, et $\Delta_2 = 1+u_2v_2+u_1v_1 \leqslant (1+a_1)(1+a_2)$ par la question préliminaire.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, supposons l'inégalité vérifiée aux rangs n et $n-1$. Alors, au rang suivant :

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= \Delta_n + a_{n+1}\Delta_{n-1} \\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) + a_{n+1}\prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k) \quad \text{\textit{(par hypothèses de récurrence)}} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k)\right) \times (1+a_n+a_{n+1}) \\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k)(1+a_n)(1+a_{n+1}) \quad \text{\textit{(par le résultat de la question préliminaire)}} \\
&= \prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k), \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est clairement strictement positif, et

$$\ln(P_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k) = S_n \quad \text{\textit{(par propriété fondamentale du logarithme).}}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(1+a_n)$, or cette série est une série convergente grâce au critère d'équivalence appliqué aux séries à termes positifs car

→ les a_n sont positifs,

→ $\ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$,

→ la série $\sum a_n$ converge.

Ainsi, $(S_n)_n$ converge, autrement dit $(\ln(P_n))_n$ converge.

Enfin, par continuité de l'exponentielle la suite de terme général $P_n = e^{\ln(P_n)}$ converge. On peut même préciser que sa limite est strictement positive.

(b) Étant convergente, la suite $(P_n)_n$ est majorée. L'inégalité du 4 nous montre ainsi que $(\Delta_n)_n$ est majorée. Or elle est croissante et majorée, donc elle converge.

6. (a) La suite de terme général Δ_n est croissante d'après la question 3, et $\Delta_1 = 1+u_1v_1 > 1$ car $u_1 > 0$ et $v_1 > 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \geqslant 1$.
   (b) Grâce à la relation suite-série, la suite $(\Delta_n)_n$ étant convergente, il en est de même pour la série des différences $\sum t_n = \sum(\Delta_n - \Delta_{n-1})$.
   (c) D'après la question 1, pour tout $n \geqslant 3$, $t_n = a_n\Delta_{n-2} \geqslant a_n \geqslant 0$. Ainsi, puisque la série $\sum t_n$ converge, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, on obtient la convergence de la série $\sum a_n$.

   On a établi l'équivalence entre la convergence de la suite $(\Delta_n)_n$ et la convergence de la série $\sum a_n$.

Une correction de l'exercice 9.11 *énoncé*

Grâce au produit matriciel par blocs :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1} & 0_n \\ -\mathrm{C} & \mathrm{A} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \\ 0_n & \mathrm{AD}-\mathrm{CB} \end{pmatrix},$$

donc par les propriétés du déterminant,

$$\underbrace{\left(\det(\mathrm{A}^{-1})\det(\mathrm{A})\right)}_{=1} \times \det\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \det(\mathrm{AD}-\mathrm{CB}).$$

Une correction de l'exercice 9.12 *énoncé*

1. Notons $(\mathrm{L}_1,\dots,\mathrm{L}_n)$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ construite sur les réels $a_1,\dots,a_n$, alors d'après le cours, le polynôme

$$\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{n}(1+a_k^n)\mathrm{L}_k,$$

vérifie bien la condition demandée.

2. Notons $\mathrm{P} = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \lambda_j \mathrm{X}^j$ le polynôme obtenu dans la première question, et M la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $1+a_i^j$.

Alors on remarque que la dernière colonne de M est

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}(a_1) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(a_n) \end{pmatrix},$$

et que d'autre part pour tout $i \in [\![1 \; ; n]\!]$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j(1+a_i^j) &= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \times 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j a_i^j \\ &= \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(a_i), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(1+a_i^j) &= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j(1+a_i^j) - \lambda_0(1+a_i^0) \\ &= \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(a_i) - 2\lambda_0 \\ &= \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(a_i) - 2\mathrm{P}(0). \end{aligned}$$

Ainsi l'opération élémentaire $\mathrm{C}_n \longleftarrow \mathrm{C}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \mathrm{C}_j$ transforme la dernière colonne en la colonne dont tous les termes valent $\mathrm{P}(1) - 2\mathrm{P}(0)$.
Autrement dit

$$\det \mathrm{M} = (2\mathrm{P}(0) - \mathrm{P}(1)) \begin{vmatrix} 1+a_1 & \cdots & 1+a_1^{n-1} & 1 \\ 1+a_2 & \cdots & 1+a_2^{n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+a_n & \cdots & 1+a_n^{n-1} & 1 \end{vmatrix},$$

puis en retranchant C_n à toutes les autres colonnes

$$\det \mathrm{M} = (2\mathrm{P}(0) - \mathrm{P}(1)) \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_1^{n-1} & 1 \\ a_2 & \cdots & a_2^{n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n^{n-1} & 1 \end{vmatrix},$$

et enfin, les $n-1$ échanges $C_i \leftrightarrow C_{i+1}$ pour i qui va de $n-1$ à 1, donnent

$$\det M = (2P(0) - P(1)) \times (-1)^{n-1} \times \begin{vmatrix} 1 & a_1 \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

on reconnaît un déterminant de Vandermonde, et on obtient

$$\begin{aligned} \det M &= (-1)^{n-1}(2P(0) - P(1))V_{n-1}(a_1, \cdots, a_n) \\ &= (-1)^{n-1}(2P(0) - P(1)) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

ce qui est vraiment super chouette.

Une correction de l'exercice 9.13 *énoncé*

1. Soit P le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3 + \lambda_4 X^4$. Notons

$$\Delta_P = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a) \\ 1 & b & b^2 & P(b) \\ 1 & c & c^2 & P(c) \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix} \text{ et } D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{P}} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \mathrm{P}(a) \\ 1 & b & b^2 & \mathrm{P}(b) \\ 1 & c & c^2 & \mathrm{P}(c) \\ 1 & d & d^2 & \mathrm{P}(d) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 \\ 1 & b & b^2 & \lambda_0 + \lambda_1 b + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 b^3 + \lambda_4 b^4 \\ 1 & c & c^2 & \lambda_0 + \lambda_1 c + \lambda_2 c^2 + \lambda_3 c^3 + \lambda_4 c^4 \\ 1 & d & d^2 & \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4 \end{vmatrix} \\
& \mathrm{C}_4 \leftarrow \mathrm{C}_4 - \lambda_0 \mathrm{C}_1 - \lambda_1 \mathrm{C}_2 - \lambda_2 \mathrm{C}_2 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 \\ 1 & b & b^2 & \lambda_3 b^3 + \lambda_4 b^4 \\ 1 & c & c^2 & \lambda_3 c^3 + \lambda_4 c^4 \\ 1 & d & d^2 & \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4 \end{vmatrix} \\
&= \lambda_3 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \lambda_4 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} \\
&= \lambda_3 \mathrm{V}_3(a,b,c,d) + \lambda_4 \mathrm{D} \\
&= \lambda_3 (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) + \lambda_4 \mathrm{D}
\end{aligned}$$

On prend $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)(\mathrm{X}-c)(\mathrm{X}-d)$, dont le développement donne

$$\mathrm{P} = \cdots - (a+b+c+d)\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^4,$$

qui nous donne $\Delta_{\mathrm{P}} = 0$ (car la 4$^{\text{me}}$ colonne est nulle, et $\lambda_3 = -(a+b+c+d)$, d'où

$$\mathrm{D} = (a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Une correction de l'exercice 9.14

énoncé

1. Comme $\deg(\mathrm{P}) = n$, alors pour tout $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$, $\deg\left(\mathrm{P}^{(k)}\right) = n-k$, donc $(\mathrm{P},\mathrm{P}',\ldots,\mathrm{P}^{(n)})$ est une famille de polynômes de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$, de degrés deux

à deux distincts, c'est donc une famille libre, et comme son cardinal est $n+1=\dim(\mathbb{C}_n[X])$, on peut conclure que c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Dans la jungle des méthodes qui s'offrent à nous, on choisit de montrer l'inversibilité de la matrice des coordonnées des $P(X+a_i)$ dans la base $(P,P',\dots,P^{(n)})$ de la question précédente.

On utilise la formule de Taylor pour les polynômes, qui nous dit que

$$\forall \alpha \in \mathbb{C},\quad P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

Donc en particulier,

$$\forall \alpha \in \mathbb{C},\quad \forall z \in \mathbb{C},\quad P(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k,$$

et encore pour tout $(x,a)\in\mathbb{C}^2$, en prenant $z\leftarrow x+a$ et $\alpha\leftarrow x$:

$$P(x+a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(x)}{k!}(a)^k,$$

ce dont on déduit pour tout $a\in\mathbb{C}$ l'égalité polynômiale

$$P(X+a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(X)}{k!}\times a^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}P^{(k)}(X).$$

On retrouve que pour tout $i\in[\![0\ ;\ n]\!]$, la liste des coordonnées de $P(X+a_i)$ dans la base $(P,P',\dots,P^{(n)})$ est $\left(1,a_i,\frac{a_i^2}{2},\dots,\frac{a_i^n}{n!}\right)$, donc la matrice des coordonnées de la famille $\Big(P(X+a_i)\Big)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est

$$\begin{pmatrix}
1 & a_0 & \frac{a_0^2}{2} & \cdots & \frac{a_0^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{a_0^n}{n!}\\
1 & a_1 & \frac{a_1^2}{2} & \cdots & \frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{a_1^n}{n!}\\
1 & a_2 & \frac{a_2^2}{2} & \cdots & \frac{a_2^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{a_2^n}{n!}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & a_n & \frac{a_n^2}{2} & \cdots & \frac{a_n^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{a_n^n}{n!}
\end{pmatrix}$$

par linéarité du déterminant selon chaque colonne (en factorisant chaque colonne par $\frac{1}{j!}$) cette matrice a pour déterminant

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n} k!}\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \dots . a_0^{n-1} & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 \dots . a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 \dots . a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 \dots . a_n^{n-1} & a_n^n \end{pmatrix} = \frac{V_{n+1}(a_0,\dots,a_n)}{\prod\limits_{k=0}^{n} k!}$$

qui est un multiple non nul d'un déterminant de Vandermonde non nul car les a_i sont deux à deux distincts.

On peut donc conclure que la famille $\big(P(X+a_i)\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

3. On en déduit qu'en particulier $(P(X),P(X+1),\dots,P(X+n))$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, donc comme $P(X+n+1)$ est dans $\mathbb{C}_n[X]$, qu'il existe $(a_0,\dots,a_n)$ tels que

$$P(X+n+1) = \sum_{j=0}^{n} a_j P(X+j),$$

donc en particulier pour tout $x \in \mathbb{C}$, et tout $i \in [\![0\ ;\ n]\!]$, en remplaçant X par $x+i$,

$$P(x+i+n+1) = \sum_{j=0}^{n} a_j P(x+i+j).$$

On vient de montrer que la dernière colonne du déterminant étudié est combinaison linéaire des colonnes précédentes, donc ce déterminant est nul.

Une correction de l'exercice 9.15 *énoncé*

1. En effectuant $C_i \leftarrow C_i - C_1$, pour $i \in [\![2,n]\!]$, sur $A + XJ$, on obtient

$$P(X) = \det(A+XJ) = \begin{vmatrix} a+X & c-a & c-a & \cdots & c-a \\ b+X & a-b & c-b & \cdots & c-b \\ b+X & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-b \\ b+X & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

donc par linéarité par rapport à la première colonne,

$$\det(A+XJ) = \begin{vmatrix} a & c-a & c-a & \cdots & c-a \\ b & a-b & c-b & \cdots & c-b \\ b & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ b & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} 1 & c-a & c-a & \cdots & c-a \\ 1 & a-b & c-b & \cdots & c-b \\ 1 & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

qui est bien de la forme $P(X) = \alpha + \beta X$ où α et β ne dépendent pas de X.

2. On cherche $\det(A)$ qui est $P(0)$ et donc α.
Les matrices $A - bJ$ et $A - cJ$ sont triangulaires, donc leur déterminant est le produit de leurs termes diagonaux, d'où

$$P(-b) = \det(A-bJ) = (a-b)^n$$
$$P(-c) = \det(A-cJ) = (a-c)^n.$$

Par conséquent, $\alpha - b\beta = (a-b)^n$ et $\alpha - c\beta = (a-c)^n$, d'où

$$c\alpha - b\alpha = c(a-b)^n - b(a-c)^n,$$

et comme $c \neq b$, on obtient

$$\alpha = \boxed{\frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b} = \det(A)}.$$

3. La formule ci-dessus est valable pour tout $c \neq b$, mais pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ fixé, l'application

$$\varphi : c \mapsto \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

est une fonction polynomiale de la variable c, donc c'est une fonction continue sur $\mathbb{C}$.

Donc en particulier, $\varphi(b) = \lim\limits_{c \xrightarrow{\neq} b} \varphi(c)$, mais pour $c \neq b$,

$$\varphi(c) = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b},$$

d'où

$$\varphi(b) = \lim_{c \xrightarrow{\neq} b} \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$$

Mais pour tout $c \neq b$, en posant $c = b + t$, et en supposant $a \neq b$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b} \\
&= \frac{(b+t)(a-b)^n - b(a-b-t)^n}{t} \\
&= \frac{t(a-b)^n + b\left[(a-b)^n - (a-b-t)^n\right]}{t} \\
&= (a-b)^n + b(a-b)^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{a-b}\right)^n}{t}
\end{aligned}$$

et quand $t \to 0$, $-\frac{t}{a-b} \to 0$, donc

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{t}{a-b}\right)^n &= 1 + n \times \left(-\frac{t}{a-b}\right) + o(t) \\
&= 1 - \frac{nt}{a-b} + o(t),
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1-\left(1-\frac{t}{a-b}\right)^n}{t}=\frac{n}{a-b}+o(1)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b} \xrightarrow[c\longrightarrow b]{} &(a-b)^n+b(a-b)^n\times\frac{n}{a-b}\\ &=(a-b)^{n-1}(a-b+nb)\\ &=(a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b\\ b & a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b\\ b & \cdots & b & a\end{vmatrix}=(a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).$$

Une correction de l'exercice 9.16 *énoncé*

1. ➟ l'espace vectoriel E est de dimension 3, donc $\mathrm{rg}(f)\in\{0,1,2,3\}$.
   ➟ L'endomorphisme f est non nul, donc $\mathrm{rg}(f)\neq 0$.
   ➟ Comme $f^2=0$, on sait que $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$ (je vous laisse retrouver ce résultat classique), donc que $\mathrm{rg}(f)\leqslant\dim(\mathrm{Ker}(f))$.
   Mais on sait aussi par le théorème du rang que

   $$\mathrm{rg}(f)+\dim(\mathrm{Ker}(f))=\dim(\mathrm{E})=3,$$

   donc $2\,\mathrm{rg}(f)\leqslant 3$, d'où $\mathrm{rg}(f)\leqslant 3/2$, et a fortiori $\mathrm{rg}(f)\leqslant 1$.

   On conclut que $\mathrm{rg}(f)=1$.
2. Prenons donc $w\in\mathrm{E}\setminus\{0_{\mathrm{E}}\}$ tel que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(w)$, et $u\in\mathrm{E}$ tel que $f(u)=w$.
   On sait aussi que $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$, donc $w\in\mathrm{Ker}(f)$.
   On déduit aussi de la question précédente grâce au théorème du rang que $\dim(\mathrm{Ker}(f))=2$, on peut donc compléter la base (w) de $\mathrm{Im}(f)$ en une base (v,w) de $\mathrm{Ker}(f)$.

Montrons enfin que (u,v,w) est une base de E. Pour cela il suffit de montrer que c'est une famille libre : soient a,b,c trois scalaires tels que $au+bv+cw=0$. Alors en composant par f, on obtient $aw=0$, donc $a=0$ car $w\neq 0$, il reste alors $bv+cw=0$ qui donne $b=c=0$ car (v,w) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Ainsi (u,v,w) est bien une base de E, et dans cette base f a pour matrice :

$$\begin{aligned}\underset{(u,v,w)}{\mathrm{Mat}}(f) &= \underset{(u,v,w)}{\mathrm{Mat}}(f(u),f(v),f(w)) = \underset{(u,v,w)}{\mathrm{Mat}}(w,0,0)\\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 9.17 *énoncé*

Notons Φ l'application $\mathrm{M}\mapsto \mathrm{MD}-\mathrm{DM}$.

- L'application Φ va bien de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et, sans détailler, la linéarité vient de :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda\mathrm{M}+\mu\mathrm{N}) &= (\lambda\mathrm{M}+\mu\mathrm{N})\mathrm{D}-\mathrm{D}(\lambda\mathrm{M}+\mu\mathrm{N})\\ &= \lambda(\mathrm{MD}-\mathrm{DM})+\mu(\mathrm{ND}-\mathrm{DN})\\ &= \lambda\Phi(\mathrm{M})+\mu\Phi(\mathrm{N}).\end{aligned}$$

- Notons $(d_1,\ldots,d_n)$ la diagonale de D, autrement dit

$$\forall (i,j)\in [\![1\ ;\ n]\!]^2,\ \ (\mathrm{D})_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq j\\ d_i & \text{si } i=j.\end{cases}$$

  Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{M}\in\mathrm{Ker}(\Phi)$ si, et seulement si, $\mathrm{MD}-\mathrm{DM}=0_n$, c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall (i,j)\in [\![1\ ;\ n]\!]^2,\ \ (\mathrm{MD}-\mathrm{DM})_{ij}=0,$$

Or

$$\begin{aligned}(\mathrm{MD})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{M})_{ik}(\mathrm{D})_{kj} = (\mathrm{M})_{ij} \times d_j \\ \text{et } (\mathrm{DM})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{D})_{ik}(\mathrm{M})_{kj} = d_i \times (\mathrm{M})_{ij} \\ \text{donc } (\mathrm{MD}-\mathrm{DM})_{ij} &= (\mathrm{M})_{ij}(d_j - d_i).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}(\Phi) \\ &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2,\ \ (\mathrm{M})_{ij}(d_j - d_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2,\ \ i \neq j,\ \ (\mathrm{M})_{ij} = 0 \ \ \textit{(car } d_i \neq d_j\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{M} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}).\end{aligned}$$

autrement dit $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Notons $\mathscr{F}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à diagonale nulle. On rappelle que $\left((\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, que $\left((\mathrm{E}_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$ est une base de $\mathscr{D}_n$ et on vérifie (sans difficulté j'espère) qu'une base de $\mathscr{F}$ est la base canonique privée des matrices $\mathrm{E}_{i,i}$, pour i de 1 à n.
  Il y a $n^2 - n$ matrices dans cette base, donc $\dim(\mathscr{F}) = n^2 - n$.
- Soit $\mathrm{N} \in \mathrm{Im}(\Phi)$, alors il existe $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{N} = \Phi(\mathrm{M}) = \mathrm{MD} - \mathrm{DM}$. Alors les termes diagonaux de N sont les

$$(\mathrm{N})_{ii} = (\mathrm{MD}-\mathrm{DM})_{ii} = (\mathrm{M})_{ii}(d_i - d_i) = 0,$$

  donc $\mathrm{N} \in \mathscr{F}$, et $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathscr{F}$.
- Mais par le théorème du rang

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) &= \mathrm{rg}(\Phi) \\ &= \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) - \dim(\mathrm{Ker}(\Phi)) \\ &= \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) - \dim(\mathscr{D}_n(\mathbb{K})) \\ &= n^2 - n = \dim(\mathscr{F}),\end{aligned}$$

  donc l'inclusion $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathscr{F}$ a lieu entre deux sous-espaces vectoriels de même dimension, d'où $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathscr{F}$.

Une correction de l'exercice 9.18 *énoncé*

1. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Pour montrer que N est semblable à A, il suffit de trouver une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice N.

   Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{N}$ équivaut à

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - 2e_2 - 2e_3 \\ f(e_2) = 2e_2 \\ f(e_3) = 2e_3. \end{cases}$$

➟ Pour e_2 et e_3 cherchons $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifie $f(u) = 2u$.

$$\begin{aligned} f(u) = 2u &\iff (f - 2\,\mathrm{id})(u) = 0 \\ &\iff (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff y = 2x \\ &\iff u = (x, 2x, z) = x(1,2,0) + z(0,0,1). \end{aligned}$$

On choisit donc $e_2 = (1,2,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

➟ Cherchons à présent $e_1 = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) = 2e_1 - 2e_2 - 2e_3 &\iff (f - 2\,\mathrm{id})(e_1) = -2e_2 - 2e_3 \\ &\iff (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\iff y = 2x - 2, \end{aligned}$$

donc on choisit $e_1 = (0, -2, 0)$.

➟ Enfin $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(e_1,e_2,e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, est de rang 3 (il suffit d'échanger C_1 et C_2), donc (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Cette matrice est la matrice P de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$, et, grâce à la formule de changement de bases, elle vérifie bien $N = P^{-1}AP$.

2. ➟ Un calcul basique donne $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $N^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Au rang $n = 0$, $N^0 = I_3$ et $2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 \\ -0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ donc la formule est vraie au rang $n = 0$;
- au rang $n = 1$, l'égalité est évidente ;
- soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que la formule est vraie au rang n, alors

$$\begin{aligned} N^{n+1} = N^n \times N &= 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2n-2 & 2 & 0 \\ -2n-2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(n+1) & 1 & 0 \\ -(n+1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{C.Q.F.D} \end{aligned}$$

➟ On montre d'abord par récurrence *(je vous le laisse)* que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PN^nP^{-1}}.$$

Donc en effectuant ce produit, on obtient

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} -n+1 & n/2 & 0 \\ -2n & n+1 & 0 \\ -n & n/2 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où l'on retrouve la formule obtenue à la question précédente.

Une correction de l'exercice 9.19

énoncé

$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 4$, *mais c'est une condition nécessaire de similitude entre* A *et* B, *et non suffisante.*

1. $A = I_4 + N$ et $B = I_4 - N$.
2. Soit P une matrice inversible, alors

$$\begin{aligned} P^{-1} \times A \times P = P^{-1} \times (I_4 + N) \times P &= P^{-1} \times I_4 \times P + P^{-1} \times N \times P \\ &= I_4 + P^{-1} \times N \times P, \end{aligned}$$

donc A et B sont semblables si, et seulement si,

$$\begin{aligned} B = P^{-1} \times A \times P &\Leftrightarrow I_4 - N = I_4 + P^{-1} \times N \times P \\ &\Leftrightarrow -N = P^{-1} \times N \times P \end{aligned}$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $-N$ et N sont semblables.

3. Soit (I,J,K,L) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{N\,I} &= 0 \\ \mathrm{N\,J} &= \mathrm{I} \\ \mathrm{N\,K} &= \mathrm{J} \\ \mathrm{N\,L} &= \mathrm{K} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathrm{N\,I} &= 0 \\ \mathrm{N\,(-J)} &= -\mathrm{I} \\ \mathrm{N\,K} &= -(-\mathrm{J}) \\ \mathrm{N\,(-L)} &= -\mathrm{K} \end{aligned}$$

ce qui montre que l'endomorphisme canoniquement associé à N a pour matrice $-\mathrm{N}$ dans la base $(\mathrm{I},-\mathrm{J},\mathrm{K},-\mathrm{L})$, donc que N et $-\mathrm{N}$ sont semblables. En particulier, $(-\mathrm{N}) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{NP}$, avec

$$\mathrm{P} = \underset{(\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K},\mathrm{L})}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{I},-\mathrm{J},\mathrm{K},-\mathrm{L}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit d'après la question 3 que A et B sont semblables.

Une correction de l'exercice 9.20 *énoncé*

La trace d'un endomorphisme est la trace de n'importe laquelle des matrices qui le représentent. Cherchons la trace de la matrice M de Φ dans la base canonique $\mathscr{C} = \left(\mathrm{E}_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (rappelons que cette matrice a un nombre de lignes et de colonnes égal à la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ c'est-à-dire n^2).
Les colonnes comme les lignes sont indexées sur les couples $(i,j) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2$. Chaque colonne $\mathrm{C}_{i,j}$ de cette matrice est formée des coordonnées de $\Phi(\mathrm{E}_{i,j})$ dans la base $\mathscr{C}$. En particulier, sur cette colonne, le terme situé sur la diagonale

est la coordonnée sur la même matrice $E_{i,j}$ de son image $\Phi(E_{i,j})$.
Or $\Phi(E_{i,j}) = AE_{i,j} + E_{i,j}A$.

- Toutes les colonnes de $E_{i,j}$ sont nulles sauf la j^e, donc toutes les colonnes de $AE_{i,j}$ sont aussi nulles.
- De plus, la j^e colonne de $AE_{i,j}$ est la combinaison linéaire des colonnes de A avec comme coefficients les termes de la j^e colonne de $E_{i,j}$, qui sont tous nuls sauf le i^e terme qui vaut 1. Donc cette j^e colonne de $AE_{i,j}$ est la ^{e} colonne de A.
- De la même manière, on calcule que $E_{i,j}A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la i^e qui est égale à la j^e ligne de A.
- On en déduit que $\Phi(E_{i,j})$, qui est la somme des deux précédentes, a pour coordonnée $(A)_{i,i} + (A)_{j,j}$ sur $E_{i,j}$, donc que sur la diagonale de M, se trouvent les $(A)_{i,i} + (A)_{j,j}$ pour i et j de 1 à n.

Par conséquent, la trace de Φ est

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathrm{Tr}(\Phi)} &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \big((A)_{i,i} + (A)_{j,j}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \big((A)_{i,i} + (A)_{j,j}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}(A)_{i,i}\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}(A)_{j,j}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} n(A)_{i,i} + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}(A) \\
&= n\sum_{i=1}^{n}(A)_{i,i} + n\mathrm{Tr}(A) \\
&= \boxed{2n\mathrm{Tr}(A)}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 9.21 *énoncé*

1. On compose l'égalité $\sum_{k=1}^{r} p_k = \mathrm{id}_E$ par la trace qui est une forme linéaire (application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$) sur $\mathscr{L}(E)$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{r} \mathrm{Tr}(p_k) = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_E),$$

or on sait que la trace d'un projecteur est son rang, donc

$$\sum_{k=1}^{r} \mathrm{rg}(p_k) = n.$$

2. ➟ On sait déjà que $\sum_{k=1}^{r} \mathrm{rg}(p_k) = n$, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{r} \dim(\mathrm{Im}(p_k)) = \dim(E)$.

   ➟ Il suffit alors de prouver que $E = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Im}(p_k)$.

   - L'inclusion $\sum_{k=1}^{r} \mathrm{Im}(p_k) \subset E$ est immédiate.
   - Réciproquement, soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x = \mathrm{id}_E(x) &= \left(\sum_{k=1}^{r} p_k\right)(x) \\ &= \sum_{k=1}^{r} p_k(x) \in \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Im}(p_k), \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

3. Tout d'abord

$$\begin{aligned} p_1 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \circ p_1 &= \left(\sum_{j=1}^{r} p_j\right) \circ p_1 \\ &= \sum_{j=1}^{r} p_j \circ p_1 \\ &= p_1 \circ p_1 + \sum_{j=2}^{r} p_j \circ p_1 \\ &= p_1 + \sum_{j=2}^{r} p_j \circ p_1, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{j=2}^{r} p_j \circ p_1 = 0.$$

Ainsi pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\sum_{j=2}^{r} p_j \circ p_1(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

$$\text{c'est-à-dire } \sum_{j=2}^{r} p_j(p_1(x)) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Or pour tout $j \in [\![2\ ;\ r]\!]$, $p_j(p_1(x)) \in \mathrm{Im}(p_j)$, et les $\mathrm{Im}(p_j)$ sont en somme directe, donc cette somme est nulle si, et seulement si,

$$\forall j \in [\![2\ ;\ r]\!], \quad p_j(p_1(x)) = 0_{\mathrm{E}}, \text{ c'est-à-dire } (p_j \circ p_1)(x) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Ainsi pour tout $j \in [\![2\ ;\ r]\!]$, $p_j \circ p_1$ est nul.
Pour tout $i \in [\![1\ ;\ r]\!]$, on peut échanger p_1 et p_i sans perte de généralité, et on en déduit par le même raisonnement que

$$\forall j \in [\![1\ ;\ r]\!], \quad j \neq i, \quad p_j \circ p_i = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 9.22 *énoncé*

1. Il est évident que les images par f sont encore dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme combinaisons linéaires de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et la linéarité de f provient de la linéarité de la trace, donc f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose que $\mathrm{Tr}(A) \neq 1$.
   Pour montrer que f est bijective, il suffit de prouver que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_n\}$ car f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
   Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
   $$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow -X + (\mathrm{Tr}(X))\, A = 0_n \\ &\Leftrightarrow X = \mathrm{Tr}(X)A \quad (E) \end{aligned}$$
   ce qui entraîne en composant par la trace
   $$\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Tr}(X)A\big) = \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(A) \quad \textit{(par linéarité de la trace)}$$
   $$\text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{Tr}(X)\,(1 - \mathrm{Tr}(A)) = 0$$
   $$\text{d'où} \quad \mathrm{Tr}(X) = 0 \quad \textit{(car } \mathrm{Tr}(A) \neq 0\textit{)}.$$
   Ainsi
   $$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} X = \mathrm{Tr}(X)A \\ \mathrm{Tr}(X) = 0 \end{cases} \quad \textit{(d'après le calcul précédent)} \\ &\Rightarrow X = 0 \times A = 0_n \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$
   On en déduit que pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation $f(X) = B$ admet une solution unique que l'on va trouver par tous les moyens :
   $$\begin{aligned} f(X) = B &\Leftrightarrow -X + (\mathrm{Tr}(X))\, A = B \\ &\Rightarrow -\mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) \quad \textit{(en composant par la trace)} \\ &\Rightarrow \mathrm{Tr}(X) = \frac{\mathrm{Tr}(B)}{\mathrm{Tr}(A) - 1} \quad \textit{(car } \mathrm{Tr}(A) \neq 1\textit{)} \end{aligned}$$
   Ainsi
   $$\begin{aligned} f(X) = B &\Leftrightarrow X = \mathrm{Tr}(X)A - B \\ &\Rightarrow \boxed{X = \frac{\mathrm{Tr}(B)}{\mathrm{Tr}(A) - 1} A - B} \end{aligned}$$

3. On suppose que $\mathrm{Tr}(A) = 1$.

➡ *L'égalité entre deux applications $f, g \in \mathscr{A}(E,F)$ est la généralité $\boxed{\forall x \in E,}\ f(x) = g(x)$.*

Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
(f \circ f)(X) = f\left(f(X)\right) &= f\left(-X + \mathrm{Tr}(X)A\right) \\
&= -\left(-X + \mathrm{Tr}(X)A\right) + \mathrm{Tr}\left(-X + \mathrm{Tr}(X)A\right) A \\
&\qquad \textit{(car } f(\square) = -\square + \mathrm{Tr}(\square)A\textit{)} \\
&= -\left(-X + \mathrm{Tr}(X)A\right) + \left[-\mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(A)\right] A \\
&\qquad \textit{(par linéarité de la trace)} \\
&= -\left(-X + \mathrm{Tr}(X)A\right) - \mathrm{Tr}(X)A + \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(A)\, A \\
&= -\left(-X + \mathrm{Tr}(X)A\right) \ \ \textit{(car } \mathrm{Tr}(A) = 1\textit{)} \\
&= -f(X) \ \ \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

On en déduit que $(-f) \circ (-f) = (-f)$ donc que $(-f)$ est un projecteur, mais je ne sais pas quoi faire d'intéressant avec cette remarque.

➡ On remarque que $f(A) = 0_n$, donc que $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}(f)$, et réciproquement, si $f(X) = 0_n$ alors $X = \mathrm{Tr}(X)A$, donc $X \in \mathrm{Vect}(A)$. Donc par double-inclusion, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$.

➡
- Si B est dans $\mathrm{Im}(f)$ alors il existe $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(X) = B$, c'est-à-dire $-X + \mathrm{Tr}(X)A = B$. En composant encore par la trace, on obtient alors $-\mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$, donc comme $\mathrm{Tr}(A) = 1$, alors $\mathrm{Tr}(B) = 0$, d'où $B \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
  Ainsi $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
- Mais on sait que la trace est une forme linéaire, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) \leqslant 1$, et comme ce n'est pas l'application nulle, $\mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) = 1$.
  Ainsi grâce au théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr})) = n^2 - 1$.
- Mais on sait aussi que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, donc encore avec le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n^2 - 1$.
- Ainsi $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ sont de même dimension et inclus l'un dans l'autre, d'où $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})}$.