Généralités sur les normes

Exercice 17.1 – Une norme sur $\mathbb{R}^2$ (école de l'air) (*)

Démontrer que $(x, y) \mapsto \mathrm{N}(x, y) = \max(|x|, |y|, |x-y|)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$, et représenter sa boule unité ouverte associée.

Exercice 17.2

Montrer qu'il n'existe pas de norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{N}(\mathrm{AB}) = \mathrm{N}(\mathrm{BA})$ pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Exercice 17.3 – Étude du caractère borné de parties

Les parties de $\mathbb{R}^2$ définies ci-dessous sont-elles bornées ?

$$\mathrm{A} = \Big\{(x\cos(x), \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\Big\}, \quad \mathrm{B} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = 1\Big\},$$
$$\text{et } \mathrm{C} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\Big\}$$

Exercice 17.4 – Barycentre et partie convexe (*)

Montrer qu'une partie A d'un espace vectoriel E est convexe si, et seulement si,

$$\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{A}^n, \\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0\,;+\infty[^n, \end{array} \qquad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \mathrm{A}.$$

Exercice 17.5 – Normes sur $\mathbb{K}[X]$

Pour $\mathrm{P} = a_0 + a_1 \mathrm{X} + \ldots + a_n \mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on pose :

$$\|\mathrm{P}\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|, \qquad \|\mathrm{P}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n |a_k|^2}, \qquad \|\mathrm{P}\|_\infty = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi trois normes sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
2. Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\|\mathrm{P}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{P}\|_2 \leqslant \|\mathrm{P}\|_1$.
3. Montrer, en considérant par exemple $\mathrm{P}_n = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + \ldots + \mathrm{X}^n$, que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 17.6

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, et pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\mathrm{N}(f) = \left\|f''\right\|_\infty + |f(0)| + |f'(0)|$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que : $\forall f \in \mathrm{E}$, $\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{N}(f)$. *(On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.)*
3. À l'aide de $f_n : t \mapsto t^n$, établir que N et la norme infinie ne sont pas équivalentes.

Exercice 17.7

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in \mathrm{E}$, on pose $\mathrm{N}(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Est-elle équivalente à $\| \ \|_\infty$?

Exercice 17.8

Soient $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et E_+ l'ensemble des fonctions de E positives et ne s'annulant qu'un nombre fini de fois. Si $f \in \mathrm{E}$ et $\varphi \in \mathrm{E}_+$, on pose $\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f| \times \varphi$.

1. Soit $\varphi \in \mathrm{E}_+$. Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_\varphi$ définit une norme sur E.
2. Soient φ_1 et φ_2 dans E_+ dont on suppose qu'elles ne s'annulent pas. Montrer que $\| \ \|_{\varphi_1}$ et $\| \ \|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.
3. Les normes $\| \ \|_{x\mapsto x}$ et $\| \ \|_{x\mapsto x^2}$ sont-elles équivalentes ?

Suites dans un espace vectoriel normé

Exercice 17.9

Soit f une application $k-$lipschitzienne d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|.\|)$ dans lui-même, et α un point fixe de E, c'est-à-dire un vecteur de E qui vérifie $f(\alpha) = \alpha$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n - \alpha\| \leqslant k^n \|u_0 - \alpha\|$.
2. Que peut-on en déduire dans le cas où $|k| < 1$?

Exercice 17.10 – La méthode de Jacobi

1. (a) Montrer que $N : A \mapsto \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \left|(A)_{ij}\right|$ définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Vérifier que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|_\infty \leqslant N(A)\,\|X\|_\infty$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante, autrement dit
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \ |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|.$$
   Soit D la matrice diagonale de même diagonale que A, et $G = D - A$.

   (a) Justifier l'existence de $J = D^{-1}G$, et montrer que $N(J) < 1$.

   (b) Justifier que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(J - I_n)$, et montrer que A est inversible.

   (c) Soit $B \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs définie par $X_0 \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = JX_k + D^{-1}B$, converge vers l'unique solution du système $AX = B$.

   On a ainsi donné une méthode itérative de résolution numérique approchée d'un système linéaire, appelée Méthode de Jacobi.

Exercice 17.11 – (*)

Soit u une isométrie d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = (\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E))^\perp$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$. Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.

Limites et continuité

Exercice 17.12

Étudier l'existence d'une limite en (0,0) des fonctions suivantes :

$$(1)\ \ (x, y) \mapsto \left(\tfrac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y), \tfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right),\qquad (2)\ \ (x, y) \mapsto \frac{xy}{|x|+|y|},$$

$$(3)\ \ (x, y) \mapsto \frac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2},\qquad (4)\ \ (x, y) \mapsto \left(\frac{xy^6}{x^6+y^8}, x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

Exercice 17.13 – (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, et $a \in]0\ ;+\infty[$.

1. Montrer que $\mathrm{K} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k = a \right\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} x_k$.

   (a) Comparer $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ et $f(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \dots, x_n)$.

   (b) En déduire que f atteint un maximum sur K atteint en un vecteur dont toutes les composantes sont égales.

3. En déduire l'inégalité ci-dessous entre moyennes géométrique et arithmétique

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_i.$$

Exercice 17.14 – (**)

Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \}$.

On définit f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ par $f(x, y) = \dfrac{h(y) - h(x)}{y - x}$.

Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Un peu de topologie

Exercice 17.15 – Utilisation de l'image réciproque

Montrer que $\mathrm{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$ et $\mathrm{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant x\}$, sont respectivement un ouvert et un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17.16

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 est une partie fermée non bornée de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Linéarité, bilinéarité et continuité

Exercice 17.17 – (*)

Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F.

1. Montrer que si f est continue en 0_E, alors f est continue sur E.
2. Montrer que si pour toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée, alors f est continue sur E.

Exercice 17.18 – (*)

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $k \in]0\,;+\infty[$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad |P(z)| \leqslant k \times \sup_{x\in[-1\,;1]} |P(x)|.$$

Solutions

Une correction de l'exercice 17.1 *énoncé*

(i) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(\lambda(x,y)) &= \mathrm{N}(\lambda x,\lambda y) = \max(|\lambda x|,|\lambda y|,|\lambda x-\lambda y|)\\
&= \max(|\lambda|\times|x|,|\lambda|\times|y|,|\lambda|\times|x-y|)\\
&= |\lambda|\times\max(|x|,|y|,|x-y|) \quad \text{(grâce au } 4^e \text{ point de la remarque 17.4)}\\
&= |\lambda|\,\mathrm{N}(x,y),
\end{aligned}$$

d'où l'homogénéité de N.

(ii) Soient (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}((x,y)+(x',y')) &= \mathrm{N}(x+x',y+y')\\
&= \max\left(\left|x+x'\right|,\left|y+y'\right|,\left|x+x'-y-y'\right|\right).
\end{aligned}$$

Or, par l'inégalité triangulaire de la valeur absolue,

$$\begin{aligned}
\left|x+x'\right| &\leqslant |x|+\left|x'\right| \leqslant \mathrm{N}(x,y)+\mathrm{N}(x',y')\\
\left|y+y'\right| &\leqslant |y|+\left|y'\right| \leqslant \mathrm{N}(x,y)+\mathrm{N}(x',y')\\
\left|x+x'-y-y'\right| &\leqslant |x-y|+\left|x'-y'\right| \leqslant \mathrm{N}(x,y)+\mathrm{N}(x',y'),
\end{aligned}$$

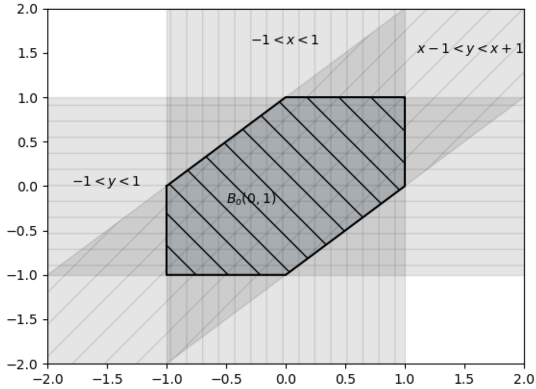
d'où l'inégalité triangulaire :

$$\mathrm{N}((x,y)+(x',y')) \leqslant \mathrm{N}(x,y)+\mathrm{N}(x',y').$$

(iii) Enfin soit (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, si $\mathrm{N}(x,y)=0$, alors en particulier $|x|=|y|=0$, donc $(x,y)=(0,0)$, d'où la propriété de séparation de N.

(iv) La boule unité ouverte associée est

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_o(0,1) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \mathrm{N}(x,y)<1\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|<1\right\}\\
&\qquad\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x-y|<1\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1<x<1\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1<y<1\right\}\\
&\qquad\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-1<y<x+1\right\}
\end{aligned}$$



Une correction de l'exercice 17.2 *énoncé*

Rappelons que les matrices élémentaires vérifient $E_{i,j} \times E_{k\ell} = \delta_{jk} E_{i\ell}$, donc par exemple

$$E_{1,1} \times E_{1,2} = E_{1,2} \text{ et } E_{1,2} \times E_{1,1} = 0_n$$

ainsi la norme d'un vecteur étant nulle si, et seulement si, le vecteur est nul (propriété de séparation), on ne peut avoir

$$N(E_{1,1} \times E_{1,2}) = N(E_{1,2} \times E_{1,1}).$$

Une correction de l'exercice 17.3 *énoncé*

- La suite de terme général $u_n = (2n\pi(\cos(2n\pi), \sin(2n\pi)) = (2n\pi, 0)$ est une suite de termes de A, et $\|u_n\|_1 = 2n\pi \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$, donc A n'est pas bornée.
- Soit $(x, y) \in B$, alors $x^2 + xy + y^2 = 1$, or $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$, donc $(x + \frac{1}{2}y)^2 \leqslant 1$, et $\frac{3}{4}y^2 \leqslant 1$, d'où $|y| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$, et par conséquent

  $$|x| \leqslant \left|x + \frac{1}{2}y\right| + \left|-\frac{1}{2}y\right| \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

  ce qui donne $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \leqslant 1 + \frac{3}{\sqrt{3}}$.

➟ La suite des points $U_n = \left(\sqrt{1+n^2}, n\right)$ est une suite de points de C, et

$$\|U_n\|_\infty = \max\left(n, \sqrt{1+n^2}\right) = \sqrt{1+n^2} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$$

donc C n'est pas une partie bornée.

Une correction de l'exercice 17.4 *énoncé*

➟ Si pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A.$$

Alors il suffit de prendre $n = 2$, et pour tous $(x, y) \in A^2$, et tout $t \in [0\,;\,1]$, t et $1-t$ sont des réels positifs dont la somme vaut 1, donc $tx + (1-t)y \in A$, ce qui définit le fait que A est une partie convexe de E.

➟ Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$\left.\begin{array}{r}\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0\,;\,+\infty[^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\\ \forall(x_1, \dots, x_n) \in A^n,\end{array}\right| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A.$$

(i) Au rang $n = 1$, c'est une évidence dont je vous laisse vous convaincre de la trivialité.

(ii) Le rang $n = 2$ est facultatif, mais on remarque que c'est la définition même d'une partie convexe.

(iii) Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Soient

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in [0\,;\,+\infty[^{n+1} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,$$

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in A^{n+1},$$

montrons que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in \mathrm{A}.$$

On sait que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et que les λ_i sont positifs, donc les λ_i sont dans $[0\ ;\ 1]$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$ alors les autres λ_i sont nuls et

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x_{n+1} \in \mathrm{A}.$$

Si $\lambda_{n+1} \in [0\ ;\ 1[$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = t \times \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i + (1-t) x_{n+1}$$

en posant $t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ qui vérifie $0 < t \leqslant 1$ car $\lambda_{n+1} < 1$.

Mais par hypothèse de récurrence, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i \in \mathrm{A}$ car pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\frac{\lambda_i}{t} > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1}{t} \times t = 1$, et les x_i sont A.

Par conséquent, par convexité de A,

$$t \times \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i + (1-t) x_{n+1} \in \mathrm{A},$$

autrement dit

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in \mathrm{A}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 17.5 *énoncé*

1. *Ici on va faire paresseux mais efficace (ce qui est le top des mathématiques !) en se ramenant aux normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$.*

Notons N_1, N_2 et N_∞ les normes usuelles dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On note $n \in \mathbb{N}^*$ qui majore leurs deux degrés, alors $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, notons $X = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(P) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $Y = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(Q) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Alors pour tout $i \in \{1,2,3\}$:

→ $\|\lambda P\|_i = N_i(\lambda X) = \lambda N_i(X) = \lambda \|P\|_i$. *(par homogénéité de N_i).*

→ $\|P+Q\|_i = N_i(X+Y) \leqslant N_i(X) + N_i(Y) = \|P\|_i + \|Q\|_i$,

(par l'inégalité triangulaire de N_i)

→ $\|P\|_i = 0 \Longleftrightarrow N_i(X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0_{\mathbb{K}^n} \Longleftrightarrow P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ *(par séparation de N_i).*

Donc ce sont bien trois normes dans $\mathbb{K}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Reprenons $n \in \mathbb{N}^*$ et P comme dans l'énoncé.

→ Soit $p \in [\![0\,;\,n]\!]$ tel que $\|P\|_\infty = |a_p|$, alors

$$\|P\|_\infty = |a_p| = \sqrt{|a_p|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2} \quad \textit{(par croissance de } \sqrt{\square}\textit{)}$$
$$= \|P\|_2 .$$

→ On sait *(ou on le prouve en passant par les carrés)* que pour tout réels a, b strictement positifs, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$, donc par récurrence

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in [0\,;\,+\infty[^n, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}.$$

On en déduit que

$$\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sqrt{|a_k|^2} = \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \|P\|_1 .$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n le polynôme $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}^k$.

   Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathrm{P}_n\|_\infty = 1, \qquad \|\mathrm{P}_n\|_1 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1, \qquad \text{et} \ \ \|\mathrm{P}_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2} = \sqrt{n+1}.$$

   donc

$$\frac{\|\mathrm{P}_n\|_1}{\|\mathrm{P}_n\|_2} = \sqrt{n+1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty,$$
$$\frac{\|\mathrm{P}_n\|_1}{\|\mathrm{P}_n\|_\infty} = n+1 \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty,$$
$$\frac{\|\mathrm{P}_n\|_2}{\|\mathrm{P}_n\|_\infty} = \sqrt{n+1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty,$$

   donc il n'y a pas d'équivalence entre les normes.

Une correction de l'exercice 17.6

énoncé

1. Remarquons que si f est $\mathscr{C}^2$ sur $[0\,;\,1]$, alors f'' est continue sur ce segment, donc par le théorème des bornes atteintes, $\left\|f''\right\|_\infty$ existe.
   Je vous laisse retrouver l'homogénéité et l'inégalité triangulaire directement à partir des mêmes propriétés de $\|.\|_\infty$ et de la valeur absolue.
   Pour la séparation, prenons $f \in \mathscr{C}^2([0\,;\,1], \mathbb{R})$, supposons que $\mathrm{N}(f) = 0$, et

montrons que f est la fonction nulle :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(f)=0 &\Longleftrightarrow \left\|f''\right\|_\infty + |f(0)| + |f'(0)| = 0\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \left\|f''\right\|_\infty = 0, \\ |f(0)| = 0, \\ |f'(0)| = 0 \end{cases} \quad \textit{(car une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul)}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} f'' \text{est la fonction nulle}, \\ f(0)=f'(0)=0 \end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ est une fonction polynomiale de degré au plus 1}, \\ f(0)=f'(0)=0 \end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in [0\,;\,1],\quad f(x) = f(0)+f'(0)x, & \textit{(par la formule de Taylor pour les polynômes)} \\ f(0)=f'(0)=0 \end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in [0\,;\,1],\quad f(x)=0, \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

2. *L'inégalité des accroissements finis que l'énoncé nous conseille d'utiliser dit que si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, de dérivée bornée sur I, alors*

$$\forall (x,y)\in \mathrm{I}^2,\quad |f(y)-f(x)| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty^{\mathrm{I}} \times |y-x|\,.$$

En particulier, si $\mathrm{I}=[0\,;\,1]$, en prenant $y=0$:

$$\forall x \in [0\,;\,1],\quad |f(x)-f(0)| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty^{[0;1]} |x| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty^{[0;1]}.$$

La fonction f est $\mathscr{C}^2$ sur $[0\,;\,1]$, donc elle vérifie l'inégalité de la remarque ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0\,;\,1],\quad |f(x)| &= |f(x)-f(0)+f(0)|\\
&\leqslant |f(x)-f(0)| + |f(0)| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty + |f(0)|,
\end{aligned}$$

donc

$$\|f\|_\infty \leqslant \left\|f'\right\|_\infty + |f(0)|\,.$$

Mais f' est $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$, donc on peut aussi appliquer le même raisonnement à f', ce qui donne

$$\left\|f'\right\|_\infty \leqslant \left\|f''\right\|_\infty + \left|f'(0)\right|.$$

Il n'y a plus qu'à rassembler les deux morceaux pour obtenir l'inégalité voulue :

$$\|f\|_\infty \leqslant \left\|f''\right\|_\infty + \left|f'(0)\right| + |f(0)| = \mathrm{N}(f).$$

3. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \longmapsto t^n$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, f_n est bien $\mathscr{C}^2$ sur $[0\,;\,1]$, avec $\|f_n\|_\infty = 1$, puis, comme $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) = 0$, et $f_n''(t) = n(n-1)t^{n-2}$, on a $\left\|f_n''\right\|_\infty = n(n-1)$, donc $\mathrm{N}(f_n) = n(n-1)$.
   Ainsi

$$\frac{\mathrm{N}(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = n(n-1) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty,$$

   ce qui prouve que N et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Une correction de l'exercice 17.7

énoncé

Notons $\|\square\|_1$ la norme usuelle sur $\mathscr{C}^0([0\,;\,1])$:

$$f \longmapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f|.$$

Alors comme l'exponentielle est positive, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([0\,;\,1])$, $\mathrm{N}(f) = \|f \times \exp\|_1$.

1. (a) Je vous laisse vérifier comment N hérite de l'homogénéité et de l'inégalité triangulaire de $\|\square\|_1$.
   (b) Si $f \in \mathrm{E}$ est telle que $\mathrm{N}(f) = 0$, alors par stricte positivité de l'intégrale des fonctions continues (ici $|f| \times \exp$ est continue), on en déduit que pour tout $t \in [0\,;\,1]$, $|f(t)|\mathrm{e}^t = 0$, donc f est nulle sur $[0\,;\,1]$, C.Q.F.D.
2. La norme infini est $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0\,;\,1]} |f(x)|$.
   Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \longmapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$, qui est bien une fonction de E.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto t^{n-1}(n-t)\mathrm{e}^{-t}$ positive sur $[0\ ;\ 1]$; donc f_n est croissante sur $[0\ ;\ 1]$, et

$$\|f_n\|_\infty = f_n(1) = \mathrm{e}^{-1}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{N}(f_n) = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-t} \times \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

- Ainsi $\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\mathrm{N}(f_n)} = \frac{n+1}{\mathrm{e}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, ce qui prouve que N et $\|\square\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Une correction de l'exercice 17.8 *énoncé*

1. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se vérifient immédiatement.

   Quant à l'axiome de séparation, si on suppose que $|f|_\varphi = 0$ alors $\int_0^1 |f|\varphi = 0$ et $|f|\varphi = 0$, puisque la fonction intégrée est positive et continue.

   Comme φ ne s'annule qu'en un nombre fini de points, notons $a_1, \dots, a_p$ ces points. Alors la fonction f est nulle sur $[0\ ;\ 1] \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ qui est une partie dense dans $[0\ ;\ 1]$, or on sait que f est continue sur $[0\ ;\ 1]$, donc elle est nulle sur cet intervalle.

2. Sur le segment (intervalle fermé borné) $[0, 1]$ les fonctions continues φ_1 et φ_2 sont bornées et atteignent leurs bornes. Il existe x_1, x_2, y_1 et y_2, tels que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$

$$0 < \varphi_1(x_1) \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_1(y_1) \quad \text{et} \quad \varphi_2(x_2) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \varphi_2(y_2).$$

   Il s'ensuit que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $\frac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_2(y_2)}\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \frac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_1(x_1)}\varphi_1(x)$, et en multipliant par $|f(x)| \geqslant 0$, puis en intégrant on obtient :

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}\|f\|_{\varphi_1} \leqslant \|f\|_{\varphi_2} \leqslant \frac{\beta_2}{\alpha_1}\|f\|_{\varphi_1}.$$

3. Notons $\|\cdot\|_1$ la première norme et $\|\cdot\|_2$ la seconde. On a évidemment $\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1$ mais, pour la fonction continue f_n définie par $f_n(x) = 1 - nx$ si $x \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$ et 0

si $x \in]\frac{1}{n}, 1]$, on a

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{1/n} x(1-nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{6n^2} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = \int_0^{1/n} x^2(1-nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{12n^3},$$

ce qui prouve qu'il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in \mathrm{E}$, $\alpha\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2$ ($\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = 2n \to +\infty$), C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 17.9

énoncé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\|u_{n+1} - \alpha\right\| &= \|f(u_n) - f(\alpha)\| \quad \textit{(par définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ et de } \alpha\textit{)} \\ &\leqslant k\,\|u_n - \alpha\| \quad \textit{(car } f \textit{ est k-lipschitzienne).} \end{aligned}$$

   Or
   - → Pour $n = 0$, $\|u_0 - \alpha\| \leqslant k^0\,\|u_0 - \alpha\|$,
   - → si pour un $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$\|u_n - \alpha\| \leqslant k^n\,\|u_0 - \alpha\|,$$

   alors

   $$\begin{aligned} \left\|u_{n+1} - \alpha\right\| &\leqslant k\,\|u_n - \alpha\| \quad \textit{(par le calcul ci-dessus)} \\ &\leqslant k \times k^n\,\|u_0 - \alpha\| = k^{n+1}\,\|u_0 - \alpha\|. \end{aligned}$$

   On a donc prouvé par récurrence les inégalités demandées.
2. Si $|k| < 1$, alors $k^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, donc par encadrement $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \alpha$.

Une correction de l'exercice 17.10

énoncé

1. (a) Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

> *Le mathématicien tire toujours une grande joie à résoudre les problèmes en se fatigant le moins possible. Un peu comme l'automobiliste qui connaît un raccourci lorsque ses congénères restent bloqués dans un embouteillage. Pour ce faire, il essaie souvent de ramener un problème à un autre problème déjà traité.*
> *Avec les normes, il est fréquent de se ramener aux normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$ pour pouvoir en utiliser les propriétés. Ici on va écrire $\mathrm{N}(\mathrm{A})$ comme une* meusclagne *(mélange en gascon) de normes 1 et ∞.*

notons pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, LA_i la i^e ligne de A, alors $\sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| = \|\mathrm{LA}_i\|_1$, et du coup

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\mathrm{LA}_i\|_1 = \left\|\left(\|\mathrm{LA}_1\|_1, \ldots, \|\mathrm{LA}_n\|_1\right)\right\|_\infty.$$

(i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les lignes de $\lambda\mathrm{A}$ sont les lignes de A multipliées par λ, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(\lambda\mathrm{A}) &= \left\|\left(\|\lambda\mathrm{LA}_1\|_1, \ldots, \|\lambda\mathrm{LA}_n\|_1\right)\right\|_\infty \\
&= \left\|\left(|\lambda|\,\|\mathrm{LA}_1\|_1, \ldots, |\lambda|\,\|\mathrm{LA}_n\|_1\right)\right\|_\infty \quad \textit{(par homogénéité de } \|-\|_1\textit{)} \\
&= \left\||\lambda|\left(\|\mathrm{LA}_1\|_1, \ldots, \|\mathrm{LA}_n\|_1\right)\right\|_\infty \\
&= |\lambda|\left\|\left(\|\mathrm{LA}_1\|_1, \ldots, \|\mathrm{LA}_n\|_1\right)\right\|_\infty \quad \textit{(par homogénéité de } \|-\|_\infty\textit{)} \\
&= |\lambda|\,\mathrm{N}(\mathrm{A}) \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

(ii) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors les lignes de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ sont les sommes des lignes correspondantes de A et B, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) &= \left\|\left(\|\mathrm{LA}_1+\mathrm{LB}_1\|_1, \ldots, \|\mathrm{LA}_n+\mathrm{LB}_n\|_1\right)\right\|_\infty \\
&= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\mathrm{LA}_i+\mathrm{LB}_i\|_1
\end{aligned}$$

or par inégalité triangulaire de $\|-\|_1$, pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\|\mathrm{LA}_i+\mathrm{LB}_i\|_1 \leqslant \|\mathrm{LA}_i\|_1 + \|\mathrm{LB}_i\|_1 \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})+\mathrm{N}(\mathrm{B}),$$

car

$$\|LA_i\|_1 \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|LA_i\|_1 = N(A),$$
$$\|LB_i\|_1 \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|LB_i\|_1 = N(B).$$

Ainsi $N(A+B) \leqslant N(A)+N(B)$.

(iii) Si $N(A) = 0$, alors par séparation de $\|-\|_\infty$, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $\|LA_i\|_1 = 0$, mais alors par séparation de $\|-\|_1$, $LA_i = 0$. Donc toutes les lignes de A sont nulles, et par conséquent A est la matrice nulle.

(b) Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $X = \left(x_i\right) \in \mathbb{R}^n$, alors AX est la colonne dont le terme général est

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j,$$

d'où

$$\|AX\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |(AX)_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right|,$$

or pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \times \left|x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \times \|X\|_\infty = \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|$$
$$\leqslant \|X\|_\infty N(A) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2. (a) La matrice D est diagonale et ses termes diagonaux sont les $a_{i,i}$; or on sait que $\left|a_{i,i}\right|$ est non nul car **strictement** supérieurs à une somme de réels positifs ; donc $a_{i,i} \neq 0$.

Donc le déterminant de D qui est le produit des termes diagonaux est non nul, ce qui prouve que D est inversible.

On en déduit que D^{-1} existe, ainsi que $J = D^{-1}G$.

D'ailleurs $J = D^{-1}(D-A) = I_n - D^{-1}A$, donc pour tout $(i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2$,

$$(J)_{i,j} = \delta_{i,j} - \sum_{k=1}^{n} (D^{-1})_{i,k}(A)_{k,j} = \delta_{i,j} - (D^{-1})_{i,i}(A)_{i,j} = \delta_{i,j} - \frac{1}{a_{i,i}} a_{i,j}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n}\left|(\mathrm{J})_{i,j}\right| = \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n}\left|\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}\right| = \frac{1}{\left|a_{i,i}\right|}\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n}\left|a_{i,j}\right| < 1 \quad \textit{(car A est à diagonale dominante)}$$

donc $\mathrm{N}(\mathrm{J}) < 1$.

(c) Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}\in \operatorname{Ker}(\mathrm{J}-\mathrm{I}_2) &\iff \mathrm{JY}=\mathrm{Y}\\
&\iff \mathrm{Y}=(\mathrm{I}_n-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{Y}\\
&\iff \mathrm{Y}=\mathrm{Y}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{AY}\\
&\iff \mathrm{D}^{-1}\mathrm{AY}=0\\
&\iff \mathrm{AY}=0\ \ \textit{(en multipliant à gauche par D)},\\
&\iff \mathrm{Y}\in\operatorname{Ker}(\mathrm{A}).
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(\mathrm{A}) = \operatorname{Ker}(\mathrm{J}-\mathrm{I}_2)$.

Ensuite, supposons que $\mathrm{AY}=0$, alors $\mathrm{JY}=\mathrm{Y}$, donc en prenant la norme

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Y}\|_\infty = \|\mathrm{JY}\|_\infty \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{J})\,\|\mathrm{Y}\|_\infty \iff 0 &\leqslant \underbrace{(1-\mathrm{N}(\mathrm{J}))}_{>0}\|\mathrm{Y}\|_\infty \leqslant 0\\
&\text{d'où } (1-\mathrm{N}(\mathrm{J}))\,\|\mathrm{Y}\|_\infty = 0\\
&\text{donc } \ \|\mathrm{Y}\|_\infty = 0\ \ \textit{(car } \mathrm{N}(\mathrm{J})\neq 1\textit{)}\\
&\text{et par conséquent } \mathrm{Y}=0.
\end{aligned}$$

On a donc établi l'implication $\mathrm{AY}=0 \Rightarrow \mathrm{Y}=0$, qui prouve que $\operatorname{Ker}(\mathrm{A}) = \{0\}$, donc que A est inversible.

(d) La matrice A est inversible, donc l'unique solution Λ de $\mathrm{AX}=\mathrm{B}$ est $\Lambda = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$, elle vérifie donc $\mathrm{A}\Lambda = \mathrm{B}$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_{k+1}-\Lambda &= \mathrm{JX}_k+\mathrm{D}^{-1}\mathrm{B}-\Lambda = \mathrm{JX}_k+\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A}\Lambda-\Lambda = \mathrm{JX}_k+(\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)\Lambda\\
&= \mathrm{JX}_k-\mathrm{J}\Lambda = \mathrm{J}(\mathrm{X}_k-\Lambda).
\end{aligned}$$

On en déduit en prenant la norme que :

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{X}_{k+1}-\Lambda\right\|_\infty &= \|\mathrm{J}(\mathrm{X}_k-\Lambda)\|_\infty\\
&\leqslant \mathrm{N}(\mathrm{J})\,\|\mathrm{X}_k-\Lambda\|_\infty
\end{aligned}$$

puis par récurrence

$$\|X_k - \Lambda\|_\infty \leqslant N(J)^k \|X_0 - \Lambda\|_\infty$$

or $0 \leqslant N(J) < 1$, donc $N(J)^k \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} 0$, d'où par encadrement

$$\|X_k - \Lambda\|_\infty \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

ce qui prouve que $X_k \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} \Lambda$.

Une correction de l'exercice 17.11

énoncé

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$, et $y \in \mathrm{Im}(v)$, alors $v(x) = 0_E$, c'est-à-dire $u(x) = x$, et il existe $t \in E$ tel que $y = v(t) = u(t) - t$, donc

$$\begin{aligned}
(x \mid y) &= (x \mid u(t) - t) = (x \mid u(t)) - (x \mid t) \\
&= (u(x) \mid u(t)) - (x \mid t) \quad \textit{(car } x = u(x)\textit{)} \\
&= (x \mid t) - (x \mid t) \quad \textit{(car } u \textit{ est une isométrie, donc conserve le produit scalaire)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ainsi $\mathrm{Ker}(v) \perp \mathrm{Im}(v)$.

Mais de plus, grâce au théorème du rang, ces deux sous-espaces vectoriels ont des dimensions complémentaires, donc on peut conclure qu'ils sont supplémentaires, et orthogonaux.

2. Notons p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(v)$. Soit $x \in E$, pour montrer que $u_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} p(x)$, on va d'abord évaluer $\|u_n(x) - p(x)\|$, et si on peut le majorer par une quantité qui tend vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|u_n(x)-p(x)\| &= \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u^k(x)-p(x)\right\| = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u^k(x)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p(x)\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u^k(x)-p(x)\right)\right\| \\ &= \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\left(u^k(x)-p(x)\right)\right\|.\end{aligned}$$

Or $p(x) \in \mathrm{Ker}(v)$, donc $v(p(x)) = 0_{\mathrm{E}}$, d'où $u(p(x)) = p(x)$. Mais alors, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(p(x)) = p(x)$, donc

$$\begin{aligned}u^k(x)-p(x) &= u^k(x)-u^k(p(x)) \\ &= u^k(x-p(x)) \ \textit{(par linéarité de } u \textit{ donc de } u^k\textit{)}\end{aligned}$$

Mais $x-p(x)$ est dans $\mathrm{Im}(v)$, ainsi il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que

$$x-p(x) = v(t) = (u-\mathrm{id}_{\mathrm{E}})(t) = u(t)-t.$$

D'où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x-p(x)) = u^k(u(t)-t) = u^{k+1}(t)-u^k(t)$, et par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u^k(x)-p(x)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}u^{k+1}(t)-u^k(t) \\ &= u^n(t)-u^0(t) \ \textit{(par somme télescopique)} \\ &= u^n(t)-t\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|u_n(x)-p(x)\| &= \frac{1}{n}\|u^n(t)-t\| \\ &\leqslant \frac{1}{n}(\|u^n(t)\|+\|t\|) \ \textit{(par inégalité triangulaire)}\end{aligned}$$

Enfin, comme u est une isométrie, $\|u(t)\| = \|t\|$, et par récurrence $\|u^n(t)\| = \|t\|$, donc derechef avec l'inégalité triangulaire :

$$\|u_n(x)-p(x)\| = \frac{1}{n}\|u^n(t)-t\| \leqslant \frac{1}{n}2\|t\|,$$

et on peut conclure par encadrement le résultat voulu.

Une correction de l'exercice 17.12

énoncé

(1) ➟ De $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} 1$, on déduit que

$$(1+x^2+y^2)\frac{\sin(y)}{y} \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} (1+0+0)\times 1 = 1\,;$$

➟ En posant $r=\sqrt{x^2+y^2}$, et $(x,y)=(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, on a

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2}\right| \leqslant r = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0,$$

donc par encadrement, $\frac{x^2y}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0$.

On en déduit que $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} (1,0)$.

(2) On rappelle que pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, $|ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2\right)$, donc pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$|xy| = \left(\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{|x|}^2+\sqrt{|y|}^2\right)\right)^2 = \frac{1}{4}(|x|+|y|)^2,$$

et enfin

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{4}(|x|+|y|),$$

or $|x|+|y| \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0$, donc par encadrement, $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0$.

(3) On connaît le développement limité de sin en 0, on en déduit que

$$\begin{aligned} x\sin(y) - y\sin(x) &\underset{(x,y)\to(0,0)}{=} x\left(y-\frac{1}{6}y^3+o(y^4)\right) - y\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right) \\ &= -\frac{1}{6}xy\left(y^2-x^2+o(x^3)+o(y^3)\right) \end{aligned}$$

et on sait que $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, donc

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{12}\left(y^2-x^2+o(x^3)+o(y^3)\right)$$

donc par encadrement $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0$.

(4) Posons $g(x,y)=\frac{xy^6}{x^6+y^8}$

➟ $g(t^2,t)=\frac{1}{1+t^4}\xrightarrow[t\longrightarrow 0]{}1$,

➟ $g(-t^2,t)=-\frac{1}{1+t^4}\xrightarrow[t\longrightarrow 0]{}-1$,

or $\lim\limits_{t\to 0}(t^2,t)=(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}(-t^2,t)$, donc g n'a pas de limite en $(0,0)$, et par conséquent, f non plus.

Une correction de l'exercice 17.13 *énoncé*

1. ➟ Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in \mathrm{K}$,

$$\begin{aligned}\|x\|_1&=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\sum_{i=1}^{n}x_i \ \textit{(car les } x_i \textit{ sont dans } \mathbb{R}_+\textit{)}\\&=a\ \textit{(car } x\in \mathrm{K}\textit{)}.\end{aligned}$$

Donc K est une partie bornée pour la norme 1, et pour toutes les normes car on est dans un espace vectoriel de dimension finie.

➟ Pour montrer que K est une partie fermée, prenons une suite $\left(\mathrm{M}_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de K, que l'on note $\mathrm{M}_p=(x_{1,p},\dots,x_{n,p})$, qui converge vers $\mathrm{M}=(x_1,\dots,x_n)$, et montrons que $x\in\mathrm{K}$.
Comme $\lim\limits_{p\to+\infty}\mathrm{M}_p=\mathrm{M}$, on sait que les coordonnées de M_p tendent vers les coordonnées de M :

$$\forall i\in[\![1\ ;\ n]\!],\quad \lim_{p\to+\infty}x_{i,p}=x_i.$$

Or pour tout $i\in[\![1\ ;\ n]\!]$, $x_{i,p}\geqslant 0$ car $\mathrm{M}_p\in\mathrm{K}$, donc par prolongement des inégalités larges à la limite, $x_i\geqslant 0$.
De plus

- pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i,p}=a$ car $\mathrm{M}_p\in\mathrm{K}$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i,p}\right)=a$;
- et par la linéarité de la limite $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i,p}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\lim\limits_{p\to+\infty}x_{i,p}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$;
- donc par unicité de la limite $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a}$.

Donc $\mathrm{M} \in \mathrm{K}$, et K bien une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

- **Autre méthode :** les applications $g_i : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, et $s : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$. De plus $[0 ; +\infty[$ et $\{a\}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}$, donc les parties $g_1^{-1}([0 ; +\infty[)$, …, $g_n^{-1}([0 ; +\infty[)$, et $s^{-1}(\{a\})$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^n$.
De plus, je vous laisse vérifier que
$$\mathrm{K} = g_1^{-1}([0 ; +\infty[) \cap \cdots \cap g_n^{-1}([0 ; +\infty[) \cap s^{-1}(\{a\}),$$
donc K est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ comme intersection de fermés.

2. (a) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors
$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n\right) \\ &= \left(x_1 x_2 - \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right) \times x_3 \cdots x_n \\ &= -\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 \times x_3 \cdots x_n \end{aligned}$$
donc
$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \leqslant f(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n)$$
dès que $x_3 \cdots x_n \geqslant 0$, et en particulier,
$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) < f(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n)$$
dès que $(x_1, \ldots, x_n) \in]0 ; +\infty[^n$.

(b) La fonction f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^n$, et K est un compact de $\mathbb{R}^n$, donc f est bornée sur K. De plus, comme f est à valeurs réelles, f atteint ses bornes, autrement dit il existe $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{K}$ tel que
$$f(y) = \max_{x \in \mathrm{K}} f(x).$$
On remarque que le vecteur $u = \left(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}\right)$ est dans K et que $f(u) = \left(\frac{a}{n}\right)^n > 0$. Or $f(y) > f(u)$, donc $f(y) > 0$, c'est-à-dire $y_1 \cdots y_n > 0$, ce pourquoi il est nécessaire que les y_i soient strictement positifs.

Montrons que $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$, et par l'absurde, supposons que deux de ses coordonnées sont $y_i \neq y_j$. Comme $f(y) = y_1 \cdots y_n$ ne dépend pas de l'ordre des composantes de y, on peut supposer que $y_1 \neq y_2$. Mais alors, d'après la question précédente, $f(y) < f\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, y_3, \ldots, y_n\right)$.
Or on vérifie que ce vecteur $\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, y_3, \ldots, y_n\right)$ est dans K, puisque la somme de ses composantes est encore $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, donc ceci contredit que $f(y)$ est le maximum de f sur K.
On conclut que $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$, donc comme leur somme est égale à a, on obtient que $y = \left(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}\right)$, donc que $f(y) = \left(\frac{a}{n}\right)^n$ est le maximum de f sur K.

3. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une liste de réels positifs. Notons $a = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Si $a = 0$, alors tous les x_i sont nuls, et l'inégalité demandée revient à $0 \leqslant 0$, ce qui est plutôt vrai. Si $a > 0$, alors d'après la question précédente,

$$x_1 \times \cdots \times x_n \leqslant \left(\frac{a}{n}\right)^n,$$

d'où l'on déduit bien que

$$(x_1 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{a}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 17.14 *énoncé*

- La fonction $(x, y) \mapsto y - x$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$; h est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier $(x, y) \mapsto h(y) - h(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ comme fraction de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, fixé, alors $f(x, y) = \frac{h(y)-h(x)}{y-x} \xrightarrow[y \longrightarrow x]{} h'(x)$, donc on va poser $f(x, x) = h'(x)$.
- Montrons que f est continue en tout point de Δ, autrement dit que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \longrightarrow (x_0,x_0)]{} f(x_0, x_0) = h'(x_0).$$

Pour cela, prenons $x_0 \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$, et cherchons un $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ \|(x,y)-(x_0,x_0)\| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x,y)-f(x_0,x_0)| \leqslant \varepsilon,$$

où $\|.\|$ est la norme de notre choix *(on s'en fiche elles sont toutes équivalentes dans $\mathbb{R}^2$).*

➔ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, avec l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(x_0,x_0)| &\leqslant |f(x,y)-f(x,x)| + |f(x,x)-f(x_0,x_0)| \\ &= \left|f(x,y)-h'(x)\right| + \left|h'(x)-h'(x_0)\right| \end{aligned}$$

or

→ on sait que $f(x,y) = \frac{h(y)-h(x)}{y-x} \xrightarrow[y \longrightarrow x]{} h'(x)$, donc il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|y-x| \leqslant \delta_0$ entraîne $\left|f(x,y)-h'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$;

→ on sait aussi que h' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en x_0, donc il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|x-x_0| \leqslant \delta_1$ entraîne $\left|h'(x)-h'(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$.

Prenons donc $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_0,\delta_1)$, et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)-(x_0,x_0)\|_\infty \leqslant \delta$, autrement dit $\max(|x-x_0|,|y-x_0|) \leqslant \delta$, alors

→ a fortiori $|x-x_0| \leqslant \delta_1$, donc $\left|h'(x)-h'(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$,

→ d'autre part

$$|y-x| \leqslant |y-x_0| + |x_0-y| \leqslant 2\delta \leqslant \delta_0,$$

donc $\left|f(x,y)-h'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$,

ainsi on a bien

$$|f(x,y)-f(x_0,x_0)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 17.15 *énoncé*

La fonction $f : (x,y) \mapsto y-x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynomiale (ou car elle est linéaire), et

$$\mathrm{U} = f^{-1}(]0\ ;\ +\infty[)$$

donc U est l'image réciproque par une fonction continue d'un intervalle ouvert, et

on peut en déduire que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
De même

$$V = f^{-1}(]-\infty\ ;\ 0])$$

donc V est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Une correction de l'exercice 17.16 *énoncé*

- L'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 peut s'écrire

$$E = \overset{-1}{\det}(\{1\}).$$

Or le singleton $\{1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$, et le déterminant est une application continue sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc E est encore une partie fermée de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ comme image réciproque d'une fermé par une application continue.

- Les matrices $M_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathscr{E}$, ont pour norme infinie $\|M_n\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|(M_n)_{i,j}\right| = n+1$ qui tend vers $+\infty$, donc $\mathscr{E}$ n'est pas une partie bornée.

Une correction de l'exercice 17.17 *énoncé*

1. Supposons que f est continue en 0_E, prenons $a \in E$, alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x-a) \ \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ &\xrightarrow[x\longrightarrow a]{} f(0_E) \ \textit{(par continuité de } f \textit{ en } 0_E\textit{)} \\ &= 0_F \ \textit{(car } f \textit{ est linéaire).} \end{aligned}$$

   donc $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow a]{} f(a)$, ce qui prouve que f est continue en a.
   Comme ceci est vrai pour tout $a \in E$, on peut conclure que f est continue sur E.

2. Supposons que pour toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée, et montrons que f est continue sur E.
   Pour cela, d'après la question précédente, il suffit de montrer que f est continue en 0_E, autrement dit que $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0_E]{} f(0_E) = 0_E$.

On va pour ce faire utiliser la caractérisation séquentielle de la limite : prenons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui converge vers 0_{E}, et montrons que $f(x_n)$ tend vers 0_{E}.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{\|x_n\|} x_n & \text{si } x_n \neq 0_{\mathrm{E}} \\ 0_{\mathrm{E}} & \text{si } x_n = 0_{\mathrm{E}}, \end{cases}$$

est bornée, car ses termes sont de norme 1 ou 0, ainsi par hypothèse, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(u_n) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\|x_n\|} f(x_n)\right) = \frac{1}{\|x_n\|} f(x_n) & \text{si } x_n \neq 0_{\mathrm{E}} \\ f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}} & \text{si } x_n = 0_{\mathrm{E}}, \end{cases}$$

donc on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_n) = \|x_n\| f(u_n),$$

donc

$$\|f(x_n)\| = \|x_n\| \, \|f(u_n)\| .$$

Or on sait que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe un réel M tel que

$$\|f(x_n)\| = \mathrm{M} \, \|x_n\| ,$$

et comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_{E}, on peut conclure par encadrement que $f(x_n)$ converge aussi vers 0_{E}, ce qu'il fallait démontrer.

Une correction de l'exercice 17.18

énoncé

- On vérifie comme d'habitude que $\mathrm{P} \mapsto \sup\limits_{x\in[-1\,;1]} |\mathrm{P}(x)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, et $\mathbb{C}$ muni du module est aussi un espace vectoriel normé.
- De plus pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application $u : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(z)$ est linéaire.
  Ainsi u est une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie, donc on sait qu'elle est lipschitzienne, ce qui permet de conclure.