Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 16.1

Résoudre les équations différentielles :

$$y' + y = t^2, \ \ 2x\,y' + y = \tfrac{1}{x}, \quad \text{et} \quad t\,x' - x = t\ln(t).$$

Exercice 16.2

Résoudre le problème de Cauchy : $(1-x^2)y' + (x-2)y = 0$, et $y(0) = \mathrm{e}$.

Exercice 16.3

L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$ est bien définie sur $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont F est solution sur $]0\,;+\infty[$.
3. Calculer $\mathrm{F}(0)$ et la limite de F en $+\infty$, puis en déduire la valeur de I.

Exercice 16.4

Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{(-t^2+ixt)}\mathrm{d}t$, en justifiant que la fonction g est solution d'une équation différentielle.

Exercice 16.5

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$.

1. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$, et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Soit S la somme de cette série.
   (a) Montrer que S est solution sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$ de l'équation différentielle
   $$(1-x)y' - (1+2x)y = 0.$$
   (b) En déduire l'expression de S à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 16.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}\, t$.

1. Démontrer que la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que f est solution de $y' + 2xy = 1$.
3. Déterminer le développement en série entière de la fonction f.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 16.7

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' + y = t^2 + \mathrm{e}^t, \qquad y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-t}.$$

Exercice 16.8

On note I l'un des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$, et y une solution sur I de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0.$$

Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on pose $t = \frac{1}{x}$ et $z(t) = y\left(\frac{1}{t}\right)$.

1. Trouver une équation différentielle à coefficients constants vérifiée par z.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I.
3. Y a-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$? Si oui, lesquelles ?

Exercice 16.9

En posant $t = \mathrm{e}^x$, résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle :

$$t^2 y'' + 4t y' + 2y = 1.$$

Exercice 16.10

En posant $t = x^2$, résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle :

$$4t y'' + 2y' - y = 0.$$

Exercice 16.11 – Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On pose $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$, et déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f sur $]0\,;+\infty[$.
2. Montrer que g est définie sur $[0\,;+\infty[$.
3. Pour tout $x>0$, transformer $g(x)$ à l'aide du changement de variable $t=u-x$. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$, et solution sur $]0\,;+\infty[$ de la même équation différentielle que f.
4. Montrer que pour tout $x\geqslant 0$, $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t$, en déduire que g est continue sur $[0\,;+\infty[$.
5. Déterminer les limites de f et g en $+\infty$, et conclure que $f=g$ sur $[0\,;+\infty[$.
6. En déduire en particulier la valeur de l'intégrale de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 16.12 – (**)

Soient $\ell\in\mathbb{R}$ et $f\in\mathscr{C}^1([0\,;+\infty[,\mathbb{R})$ tell que $f'(x)+f(x)\to\ell$ quand $x\to+\infty$. Montrer que $f'(x)\to 0$ quand $x\to+\infty$.

Exercice 16.13 – (**)

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$ et $f,g\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On suppose $f>0$.
On considère l'équation différentielle (E): $y''-fy=g$.

1. Montrer que l'équation homogène associée à (E) possède deux solutions u et v caractérisées par $u(a)=0$, $u'(a)=1$ et $v(b)=0$, $v'(b)=1$.
2. Montrer que (E) possède au plus une solution s'annulant en a et en b.
   On pourra considérer y_1 et y_2 deux telles solutions et $h=y_2-y_1$, et remarquer que h^2 est convexe.
3. Montrer que (E) possède une solution s'annulant en a et b et en donner une expression en fonction de u, v, f et g.

Solutions

Une correction de l'exercice 16.1 — *énoncé*

1. ➟ L'équation homogène est (H) : $y' = -y$, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est solution de H, donc l'ensemble des solutions de H est

$$\mathrm{Vect}(\varphi) = \left\{t \mapsto C e^{-t} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

➟ Le second membre $t \mapsto t^2$ nous suggère de chercher une solution particulière de la forme d'un polynôme du second degré $P : a \mapsto at^2 + bt + c$.

$$\begin{aligned} P'(t) + P(t) = t^2 &\iff 2a\,t + b + a\,t^2 + b\,t + c = t^2 \\ &\iff a\,t^2 + (2a+b)t + (b+c) = t^2 \end{aligned}$$

ceci est vrai dès que

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc $P(t) = t^2 - 2\,t + 2$.

➟ On conclut que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + y = t^2$ est

$$\left\{t \mapsto \left(t^2 - 2\,t + 2\right) + Ce^{-t} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Ici le second membre $x \mapsto \frac{1}{x}$ est défini sur $\mathbb{R}^\star$, donc on résout l'équation sur les intervalles $]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$.
Sur ces intervalles, sa forme normalisée est

$$(E) \quad : \quad y' = -\frac{1}{2x}y + \frac{1}{2x^2}.$$

Sur le brouillon, on résout l'équation homogène sans précaution :

$$\begin{aligned} y' = -\frac{1}{2x}y \iff \frac{y'}{y} &= -\frac{1}{2x} \\ \iff \ln(y) &= -\frac{1}{2}\ln(x) \\ \iff y &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est solution sur $]0\,;+\infty[$, et on fait gaffe de mettre une valeur absolue pour la solution $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ sur $]-\infty\,;0[$. Puis on rédige la solution comme ci-dessous :

- La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, car elle est la composée de $\square \mapsto \sqrt{\square}$, qui est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $]0\,;+\infty[$, par $\square \mapsto \frac{1}{\square}$ qui est aussi dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
  De plus, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &\left(= \left(x^{-1/2}\right)'\right) \quad \textit{(cette notation est incorrecte, mais c'est pour détailler...)} \\ &= -\frac{1}{2}x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{2x} \times \varphi(x), \end{aligned}$$

  donc φ est solution de $(\mathrm{H}) : y' = -\frac{1}{2x}y$ sur $]0\,;+\infty[$.
- Et comme le coefficient $x \mapsto -\frac{1}{2x}$ est une fonction continue sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit grâce au théorème de Cauchy que l'ensemble des solutions de (H) sur $]0\,;+\infty[$ est

$$\left\{ x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x}} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si on était observateur on pourrait remarquer que $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est une solution particulière de (E), mais on ne l'est pas, donc on fait la variation de la constante.

Soit λ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $y : x \mapsto \lambda(x)\times\frac{1}{\sqrt{x}}$ est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, et est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned} & y'(x) = -\frac{1}{2x}y(x) + \frac{1}{2x^2} \\ \iff & \lambda'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \quad \textit{(on a l'a vu plus haut !)} \end{aligned}$$

donc il suffit de prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, ce qui donne la solution particulière $y(x) = -\frac{1}{x}$.

- On conclut que l'ensemble des solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$ est

$$\left\{x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

- De la même manière, on trouve que l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty\,;0[$ est

$$\left\{x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{|x|}} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. L'équation différentielle $t\,x' - x = t\ln(t)$ est définie sur $]0\,;+\infty[$, et sa forme normalisée est

$$(E) : x' = \frac{1}{t}x + \ln(t).$$

- L'équation homogène est (H) : $x' = \frac{1}{t}x$, dont le coefficient $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$. Donc l'ensemble des solutions sur $]0\,;+\infty[$ de (H) est une droite vectorielle.

  Or la fonction $\varphi : t \mapsto t$ est solution de (H), donc l'ensemble des solutions de (H) est

$$\text{Vect}(\varphi) = \{t \mapsto C\,t \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

- On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme $x : t \mapsto \lambda(t)t$, où λ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

Cette fonction x est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} & x'(t) = \frac{1}{t}x(t) + \ln(t) \\ \iff & \lambda'(t) = \frac{\ln(t)}{t} = \ln'(t) \times \ln(t) = \left(\frac{1}{2}\ln^2(t)\right)' \end{aligned}$$

donc on peut prendre $\lambda(t) = \frac{1}{2}\ln^2(t)$, qui nous donne la solution $x : t \mapsto \frac{1}{2}t\ln^2(t)$.

➟ On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{t \mapsto \frac{1}{2}t\ln^2(t) + \mathrm{C}t \mid \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Une correction de l'exercice 16.2

énoncé

➟ Sur $]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;1[$, $]1\,;+\infty[$, l'équation (E) : $(1-x^2)y' + (x-2)y = 0$ équivaut à

$$(\mathrm{EE}) : y' = -\frac{x-2}{1-x^2}y.$$

Comme $x \mapsto -\frac{x-2}{1-x^2}$ est continue sur $]-1\,;1[$, le théorème de Cauchy nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution y sur cet intervalle $]-1\,;1[$ qui vérifie $y(0) = \mathrm{e}$.

Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$-\frac{x-2}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x},$$

en multipliant par $1-x$ des deux côtés et en remplaçant x par 1, on obtient $a = \frac{1}{2}$, et de même avec $1+x$ et -1 on a $b = \frac{3}{2}$, d'où

$$-\frac{x-2}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{3}{2}}{1+x},$$

donc une primitive en est

$$x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{3}{2}\ln(1+x) = \ln\left(\frac{(1+x)^{3/2}}{(1-x)^{1/2}}\right) = \ln\left(\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

et par conséquent, les solutions de (EE) sur $]-1\ ;\ 1[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Parmi ces solutions, la seule qui vaut e en 0 est

$$x \mapsto \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- On remarque que l'équation différentielle (E) de départ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on se demande donc si on peut prolonger cette solution $y : x \mapsto \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1\ ;\ 1[$ en une solution sur un intervalle plus grand.
  - En 1 à gauche,

$$y(x) = \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x \overset{<}{\to} 1]{} +\infty$$

    donc la fonction y ne peut pas être prolongée au dessus de 1.
  - En -1 à droite,

$$y(x) = \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \mathrm{e}\frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{(1-x)}} \xrightarrow[x \overset{>}{\to} -1]{} 0,$$

    donc y est continue à droite en -1, et on peut s'intéresser au prolongement de y en deçà de -1.
  - On remarque d'ores et déjà que

$$y'(x) = -\frac{x-2}{1-x^2} \times y(x) = -\frac{x-2}{(1-x)(1+x)} \times \mathrm{e}\frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{(1-x)}}$$
$$= \mathrm{e}\frac{(2-x)\sqrt{(1+x)}}{(1-x)\sqrt{(1-x)}} \xrightarrow[x \overset{>}{\to} -1]{} 0$$

    donc grâce au théorème de la limite de la dérivée, on peut en déduire que y est de classe $\mathscr{C}^1$ à droite en -1, avec $y_d'(0) = 0$.

➔ La résolution de cette même équation différentielle $y' = -\frac{x-2}{1-x^2}y$, mais cette fois sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$ donne de la même manière les solutions : $x \mapsto C\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}} = C\frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}}$.

Ces solutions vérifient aussi, pour tout réel C, $y(x) \xrightarrow[x \overset{<}{\longrightarrow} -1]{} 0$, et $y'(x) \xrightarrow[x \overset{<}{\longrightarrow} -1]{}$ 0.

Donc pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} e\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1\,;\,1[\\ 0 & \text{si } x = -1 \\ C\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x \in]-\infty\,;\,-1[\end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;\,1[$, et est solution du problème de Cauchy initial sur cet intervalle.

Une correction de l'exercice 16.3

énoncé

1. La fonction

$$f : (x,t) \mapsto f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

est définie sur $\mathbb{R} \times]0\,;\,+\infty[$.

Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction

$$f(x,\bullet) = t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

est

- continue sur $]0\,;\,+\infty[$,
- équivalente quand $t \to 0$ à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui définit une fonction intégrable sur $]0\,;\,1]$, donc $f(x,\bullet)$ est intégrable elle-même sur $]0\,;\,1]$,
- dominée quand $t \to +\infty$ par $\frac{1}{t^{3/2}}$ qui définit une fonction intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$, donc $f(x,\bullet)$ est intégrable elle-même sur $[1\,;\,+\infty[$.

Ainsi pour tout $x \geqslant 0$, la fonction

$$t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

est intégrable sur $]0\ ;+\infty[$, ce qui prouve que F est bien définie sur $[0\ ;+\infty[$.

2. ➟ Pour tout $t>0$, la fonction

$$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $]0\ ;+\infty[$, de dérivée :

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} = -\frac{\sqrt{t}\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\ ;$$

➟ on a vu précédemment que pour tout $x \geqslant 0$, la fonction

$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

est intégrable sur $]0\ ;+\infty[$;

➟ pour tout $x>0$, la fonction

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{\sqrt{t}\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}$$

est continue par morceaux sur $[0\ ;+\infty[$;

➟ enfin, pour tout segment $[a\ ;b] \subset\ ]0\ ;+\infty[$,

$$\forall x \in [a\ ;b],\ \ \forall t \in]0\ ;+\infty[,\ \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{\sqrt{t}\mathrm{e}^{-at}}{1+t},$$

et :

- la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\sqrt{t}\mathrm{e}^{-at}}{1+t}$ est continue sur $[0\ ;+\infty[$,
- par croissances comparées, grâce à e^{-at},

$$\frac{\sqrt{t}\mathrm{e}^{-at}}{1+t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc φ est intégrable sur $]0\ ;+\infty[$.

On peut donc conclure grâce à la règle de Leibniz que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\ ;+\infty[$, et que

$$\mathrm{F}' : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-x\,t}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Ainsi pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

Comme $x > 0$, la fonction $t \mapsto xt$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, et bijective de $]0\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$, donc le changement de variables $u = x\,t$ est licite, et donne

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{x}}.$$

Autrement dit F est solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$y' = y - \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{x}}.$$

3. ➟ Grâce au changement de variables $t = u^2$, à la fonction arctan,

$$\mathrm{F}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \mathrm{d}t \underset{t=u^2}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \mathrm{d}u = \pi.$$

➟ Et d'autre part, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{I},$$

donc par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x) = 0$.

4. La résolution, avec la méthode de variation de la constante pour la solution particulière, du problème de Cauchy formé par l'équation différentielle $y' = y - \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{x}}$ et la condition initiale $y(0) = \pi$, donne, par unicité de la solution d'un problème de Cauchy dont les coefficients sont des fonctions continues,

$$\forall x \geqslant 0,\ \ \mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x \left(\pi - \mathrm{I} \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \right).$$

ainsi, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x) = 0$, on en déduit que $\pi - \mathrm{I}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ est obligé de tendre vers 0 quand $x \to +\infty$, autrement dit que

$$\pi - \mathrm{I} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = 0$$

c'est-à-dire $\mathrm{I}^2 = \pi$, d'où finalement :

$$\mathrm{I} = \sqrt{\pi}.$$

Une correction de l'exercice 16.4 *énoncé*

⊗ Solution ; - Existence et continuité :
Posons $f(x,t) = \mathrm{e}^{(-t^2+ixt)}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.f est évidemment continue sur $\mathbb{R}^2$.
De plus : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, |f(x,t)| = \mathrm{e}^{-t^2}$; $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}, l'$ hypothèse de domination du théorème 1 est vérifiée, et g est continue sur $\mathbb{R}$.

➟ Dérivée et calcul : Pour tout $x \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = it\mathrm{e}^{-t^2+ixt}$, qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = t\mathrm{e}^{-t^2}$; $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}, l'$ hypothèse de domination du théorème 2 est vérifiée, et g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{e}^{-t^2+ixt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{i}{2}\mathrm{e}^{(-t^2+ixt)}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2+ixt}\,\mathrm{d}t$ en ayant intégré par parties (en posant $u = i\mathrm{e}^{ixt}$ et $v' = t\mathrm{e}^{-t^2}$).
Or $\lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{(-t^2+ixt)} = 0$ puisque $\left|\mathrm{e}^{(-t^2+ixt)}\right| = \mathrm{e}^{-t^2}$.

Ainsi, $g'(x) = -\frac{x}{2}g(x)$, d' où $g(x) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$, où $\mathrm{C} = \text{cste}$.

Puisque $g(0) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss), on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$.

Une correction de l'exercice 16.5 *énoncé*

1. ➟ Par récurrence sur deux termes, avec d'une part $a_1 = 1$ et $a_2 = a_1 + a_0 = 2$, puis pour tout entier $n \geqslant 2$ *(pour que* $n-1 \in \mathbb{N}^*$*)*, on suppose que $1 \leqslant a_{n-1} \leqslant (n-1)^2$ et $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$, et ainsi

$$\frac{2}{n+1} \leqslant \frac{2}{n+1}a_{n-1} \leqslant \frac{2(n-1)^2}{n+1}.$$

On en déduit d'une part que

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \geqslant 1 + \frac{2}{n+1} \times 1 \geqslant 1,$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \leqslant\ & n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\
&= ((n+1)-1)^2 + \frac{2}{n+1}((n+1)-2)^2 \\
&\textit{(on veut des } n+1\textit{, donc on fait apparaître des} \\
&n+1 \textit{ avec l'aide du belge !)} \\
&= (n+1)^2 - 2(n+1) + 1 \\
&\qquad + \frac{2}{n+1}((n+1)^2 - 4(n+1) + 4)^2 \\
&= (\cdots) = (n+1)^2 - \left(7 - \frac{8}{n+1}\right) \\
&\leqslant (n+1)^2, \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

➟ On en déduit que le rayon de convergence R_a de $\sum a_n z^n$ est compris entre celui de $\sum n^2 z^n$, qui est égal à 1 *(par d'Alembert ; ou bien car* $n^2 1^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *mais* $n^2 x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par croissances comparées pour* $0 < x < 1$*)*, et celui de $\sum x^n$, qui est aussi égal à 1.

Donc $R_a = 1$.

2. (a) Remarquons qu'alors la somme S de la série entière est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\ ;\ 1[$, et de plus pour tout $x \in\ ]-1\ ;\ 1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

donc

$$\begin{aligned}
&(1-x)S'(x)-(1+2x)S(x)\\
&\quad=(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}-(1+2x)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&\quad=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}2a_nx^{n+1}\\
&\quad=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n-\sum_{n=1}^{+\infty}2a_{n-1}x^n\\
&\quad=a_1-a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big((n+1)a_{n+1}-na_n-a_n-2a_{n-1}\Big)x^n\\
&\quad=0+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\Big(a_{n+1}-a_n-\frac{2}{n+1}a_{n-1}\Big)x^n\\
&\quad=0\ \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

(b) Sur $]-1\ ;\ 1[$, l'équation différentielle $(1-x)y'-(1+2x)y=0$ équivaut à $y'=\frac{1+2x}{1-x}y=\frac{3-2(1-x)}{1-x}y=\left(\frac{3}{1-x}-2\right)y$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients continus sur $]-1\ ;\ 1[$, donc elle a pour ensemble des solutions une droite vectorielle.

Mais comme $x\mapsto -3\ln(1-x)-2x$ est une primitive sur $]-1\ ;\ 1[$ de $x\mapsto\frac{3}{1-x}-2$, la fonction $x\mapsto\exp(-3\ln(1-x)-2x)=\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ est solution de cette équation. Par conséquent, toutes les solutions sur $]-1\ ;\ 1[$ de $(1-x)y'-(1+2x)y=0$ sont de la forme

$$x\mapsto\frac{Ce^{-2x}}{(1-x)^3},\ C\in\mathbb{R}.$$

On sait que l'une d'entre elles est la somme S, et comme cette somme vérifie aussi $S(0)=a_0=1$, on peut conclure en prenant $C=1$ que

$$\forall x\in\,]-1\ ;\ 1[,\quad S(x)=\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}.$$

Une correction de l'exercice 16.6
énoncé

1. Pour tout réel t,

$$e^{t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(t^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^{2n}.$$

   L'expression ci-dessus est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, on peut l'intégrer terme à terme sur tout segment de $\mathbb{R}$.
   Ainsi pour tout réel x,

$$\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} t^{2n+1}.$$

   Mais d'autre part,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n},$$

   donc grâce au produit de Cauchy, la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

2. Du résultat précédent, la somme d'une série entière étant $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, on déduit que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec de plus pour tout réel x,

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t + e^{-x^2} \times e^{x^2} = -2xf(x) + 1, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

   Plus précisément, comme $f(0) = 0$, comme l'application $x \mapsto -2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy linéaire nous permet d'affirmer que f est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} y' &= -2x\,y + 1, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

3. Cherchons une solution développable en série entière de ce problème de Cauchy.

➟ **Analyse :** prenons une série entière $\sum a_n z^n$ dont on suppose le rayon de convergence strictement positif.

Notons S sa fonction somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, qui est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence.

Supposons que S est solution de l'équation différentielle sur un intervalle $]-\alpha\,;\,\alpha[$ avec $\alpha > 0$.

Alors pour tout $x \in]-\alpha\,;\,\alpha[$,

$$\begin{aligned}
S'(x) + 2xS(x) = 1 &\iff -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1} = 0 \\
&\iff -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1} = 0 \\
&\iff -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1} x^n = 0 \\
&\iff (-1 + a_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1}\right] x^n = 0 \\
&\iff \begin{cases} & -1 + a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0 \end{cases} \quad \text{\textit{(par unicité du développement en série entière)}} \\
&\iff \begin{cases} & a_1 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}, & a_{p+2} = -\frac{2}{p+2} a_p \end{cases}
\end{aligned}$$

et $S(0) = 0$ si, et seulement si, $a_0 = 0$.

On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$, et

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \left(-\frac{2}{2n+1}\right) \times \left(-\frac{2}{2n-1}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{(-2)^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} \\ &= \frac{(-2)^n (2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots 3 \times 2} \\ &= \frac{(-2)^n 2^n n!}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

➟ **Synthèse :** considérons la série entière associée à la suite de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Cette série entière a pour rayon de convergence $+\infty$, car grâce au critère de d'Alembert, en posant $u_n = a_{2n+1}x^{2n+1}$ pour $x > 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}}\right| \times x^2 = \frac{2}{2n+3}x \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Donc la somme S de cette série entière est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et d'après le calcul de la partie analyse précédente, elle est solution sur $\mathbb{R}$ de notre équation différentielle.

Comme de plus $S(0) = 0$, on en déduit que la fonction

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ du même problème de Cauchy que f, par conséquent on peut en déduire grâce au théorème de Cauchy que ces deux fonctions sont égales, autrement dit que S est le développement en série entière de f.

Une correction de l'exercice 16.7 *énoncé*

1. Avec Python et sympy

?? PythonTeX ??

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 2t + \frac{1}{\sqrt{e^t}}\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) + \frac{e^t}{3} \\ &= \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}t} + t^2 - 2t + \frac{1}{3}e^t \end{aligned}$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Encore avec sympy :

$$f(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Une correction de l'exercice 16.8

énoncé

1. Soit y une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur I (c'est une bijection de I sur I), donc $z : t \mapsto y\left(\frac{1}{t}\right)$ est aussi $\mathscr{C}^2$ sur I.

> *On va ici calculer les dérivées de $z = t \mapsto y(\varphi(t))$ en fonction de celles de y, mais on aurait pu faire l'inverse en inversant la relation en remarquant que $y = x \mapsto z\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ (dans cet exercice $y(x) = z\left(\frac{1}{x}\right)$). Selon les exercices, choisir l'une ou l'autre de ces stratégies peut simplifier les calculs.*

Pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} z'(t) &= -\frac{1}{t^2}y'\left(\frac{1}{t}\right) = -\left(\frac{1}{t}\right)^2 y'\left(\frac{1}{t}\right) \\ z''(t) &= \frac{2}{t^3}y'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^4}y''\left(\frac{1}{t}\right) = 2\left(\frac{1}{t}\right)^3 y'\left(\frac{1}{t}\right) + \left(\frac{1}{t}\right)^4 y''\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

donc y est solution sur $]0 ; +\infty[$ de (E) si, et seulement si,

$$\begin{aligned} & \forall x \in]0 ; +\infty[, \quad x^4 y''(x) + 2x^3 y'(x) - y(x) = 0 \\ \iff & \forall t \in]0 ; +\infty[, \quad \left(\frac{1}{t}\right)^4 y''\left(\frac{1}{t}\right) + 2\left(\frac{1}{t}\right)^3 y'\left(\frac{1}{t}\right) - y\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \\ \iff & \forall t \in]0 ; +\infty[, \quad z''(t) - z(t) = 0 \end{aligned}$$

donc y est solution sur $]0\ ;+\infty[$ de (E) si, et seulement si, z est solution sur $]0\ ;+\infty[$ de l'équation différentielle à coefficients constants $(\mathrm{E})'$: $z''-z=0$.

2. On sait résoudre cette équation, donc on en déduit que y est solution sur $]0\ ;+\infty[$ de (E) si, et seulement si,

$$\begin{aligned} &\exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2,\ \ \forall t\in\,]0\ ;+\infty[,\ \ z(t)=\mathrm{A}\mathrm{e}^{t}+\mathrm{B}\mathrm{e}^{-t}\\ \Longleftrightarrow &\exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2,\ \ \forall x\in\,]0\ ;+\infty[,\ \ y(x)=z\left(\frac{1}{x}\right)=\mathrm{A}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{B}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

qui boucle la résolution de (E) sur $]0\ ;+\infty[$.

3. ➟ *Analyse :* supposons que l'application y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors
   - y est en particulier solution de (E) sur $]0\ ;+\infty[$, ainsi

   $$\exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2,\ \ \forall x\in\,]0\ ;+\infty[,\ \ y(x)=\mathrm{A}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{B}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

   - Mais y est aussi solution de (E) sur $]-\infty\ ;0[$, ainsi, avec la même méthode que sur $]0\ ;+\infty[$, on obtient

   $$\exists(\mathrm{A}',\mathrm{B}')\in\mathbb{R}^2,\ \ \forall x\in\,]-\infty\ ;0[,\ \ y(x)=\mathrm{A}'\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{B}'\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

   - Et dans l'équation (E) pour $x=0$, on obtient $-y(0)=0$, donc $y(0)=0$.
   - De plus y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier continue en 0, mais

   $$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\xrightarrow{>}0]{}+\infty \text{ et } \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\xrightarrow{<}0]{}+\infty$$

   donc il faut que $\mathrm{A}=\mathrm{B}'=0$ pour que la fonction y ait pour limite 0 en 0. Ainsi y est forcément de la forme :

   $$y(x)=\begin{cases}\mathrm{B}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0,\\ \mathrm{A}'\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0.\end{cases}$$

   ➟ *Synthèse :* on considère la fonction ci-dessus, on sait déjà qu'elle est solution sur $]-\infty\ ;0[$, en 0, et sur $]0\ ;+\infty[$, puis on montre que les limites à gauche et à droite de y, y' et y'' donnent 0, ce qui grâce au théorème de limite de la dérivée, permet de conclure que y est $\mathscr{C}^2$ en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

On peut donc conclure que y est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(x) = \begin{cases} a e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ b e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Une correction de l'exercice 16.9 *énoncé*

Pour tout $t \in]0 ; +\infty[$, on pose $y(t) = z(\ln(t))$, ce qui revient à poser $z(x) = y(\mathrm{e}^x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{1}{t} z'(\ln(t)) \\ y''(t) &= -\frac{1}{t^2} z'(\ln(t)) + \frac{1}{t^2} z''(\ln(t)) \end{aligned}$$

donc y est solution sur $]0 ; +\infty[$ de (E) si, et seulement si,

$$\begin{aligned} & \forall t \in]0 ; +\infty[, \quad t^2 y''(t) + 4t y'(t) + 2y(t) = 1 \\ \Longleftrightarrow & \forall t \in]0 ; +\infty[, \quad z''(\ln(t)) + 3z'(\ln(t)) + 2z(\ln(t)) = 1 \\ \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x) + 3z'(x) + 2z(x) = 1 \\ \Longleftrightarrow & \exists (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{A}e^{-x} + \mathrm{B}e^{-2x} \end{aligned}$$

(solution particulière constante $z = \frac{1}{2}$ et équation homogène d'équation caractéristique $r^2 + 3r + 2 = 0$)

$$\Longleftrightarrow \exists (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in]0 ; +\infty[, \quad y(t) = \frac{1}{2} + \mathrm{A} \times \frac{1}{t} + \mathrm{B} \frac{1}{t^2}$$

Une correction de l'exercice 16.10 *énoncé*

Pour tout $t \in]0 ; +\infty[$, on pose $y(t) = z(\sqrt{t}) = z\left(t^{1/2}\right)$, ce qui revient à poser

$z(x) = y(x^2)$ pour tout $x \in]0\ ;+\infty[$.

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{1}{2}t^{1/2-1}z'\left(t^{1/2}\right) = \frac{1}{2}t^{-1/2}z'\left(t^{1/2}\right) \\ y''(t) &= -\frac{1}{4}t^{-1/2-1}z'\left(t^{1/2}\right) + \frac{1}{2}t^{-1/2} \times \frac{1}{2}t^{-1/2}z''\left(t^{1/2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}t^{-3/2}z'\left(t^{1/2}\right) + \frac{1}{4}t^{-1}z''\left(t^{1/2}\right) \end{aligned}$$

donc y est solution sur $]0\ ;+\infty[$ de (E) si, et seulement si,

$$\begin{aligned} &\forall t \in]0\ ;+\infty[,\ 4ty''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\forall t \in]0\ ;+\infty[,\ z''\left(\sqrt{t}\right) - z\left(\sqrt{t}\right) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in]0\ ;+\infty[,\ z''(x) - z(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]0\ ;+\infty[,\ z(x) = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-x} \\ &\quad \textit{(l'équation caractéristique est } r^2 - 1 = 0\textit{)} \\ \Longleftrightarrow &\exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in]0\ ;+\infty[,\ y(t) = \mathrm{A}e^{\sqrt{t}} + \mathrm{B}e^{-\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 16.11

énoncé

1. La continuité de f sur $[0\ ;+\infty[$, qui est une intégrale à paramètre, s'établit grâce entre autres à l'inégalité de domination

$$\forall x \in [0\ ;+\infty[,\ \forall t \in [0\ ;+\infty[,\ |\varphi(x,t)| = \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Le caractère $\mathscr{C}^2$ de f sur $]0\ ;+\infty[$, sous le signe $\int$, s'établit grâce (entre autres) aux inégalités de domination, sur tout segment $\mathrm{K} = [a\ ;b] \subset]0\ ;+\infty[$,

$$\begin{aligned} \forall x \in [a\ ;b],\ \forall t \in [0\ ;+\infty[,\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| &= \left|\frac{-te^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{te^{-at}}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-at}\right) \cdot \\ \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| &= \left|\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-at}. \end{aligned}$$

La règle de Leibniz généralisée aux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ donne alors pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$
$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

et on en déduit que pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$,

$$f(x)+f''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\cdot$$

2. Soit $x \in [0\,;+\infty[$.
On pose $u'(t) = \sin(t)$, $v(t) = \frac{1}{x+t}$, et on choisit $u(t) = 1-\cos(t)$. Ainsi :
   - les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$;
   - $u(t)v(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{x+t} \begin{cases} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}t^2}{x+t} \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} 0 \\ \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} 0 \text{ par encadrement, car } \left|\frac{1-\cos(t)}{x+t}\right| \leqslant \frac{2}{t} \end{cases}$

   donc par une intégration par parties, on peut conclure la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$, donc la définition de g sur $[0\,;+\infty[$, avec en plus l'égalité

$$g(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{-(x+t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$$

   car la deuxième intégrale converge ; en effet :
   - $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ si $x>0$, ou prolongeable par continuité sur $[0\,;+\infty[$ si $x=0$ (car $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}t^2$;
   - pour tout $t>0$, $\left|\frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\right| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

3. Soit $x>0$.
L'application $t \mapsto t+x$ est bien une bijection de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, de $]0\,;+\infty[$ sur $]x\,;+\infty[$, donc en posant $u = t+x$, ou $t = u-x$, on obtient

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)\cos(x)-\cos(u)\sin(x)}{u}\mathrm{d}u$$

comme dans la question précédente, on peut montrer par une intégration par parties que les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u$ sont convergentes, on peut donc appliquer la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u \\ &= \cos(x) \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u - \int_1^{x} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u \right) \\ &\qquad - \sin(x) \left(\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u - \int_1^{x} \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u \right). \end{aligned}$$

Les fonctions sin et cos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et par le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u$ et $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u$ sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$, de dérivées respectives $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$. Mais ces dérivées sont elles-mêmes $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$ comme rapport de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc les fonctions $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u$ et $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

Par conséquent, la fonction g est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$, avec pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin(x) \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u - \int_1^{x} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u \right) + \cos(x) \times \left(-\frac{\sin(x)}{x} \right) \\ &\qquad - \cos(x) \left(\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u - \int_1^{x} \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u \right) - \sin(x) \times \left(-\frac{\cos(x)}{x} \right) \\ &= -\sin(x) \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u - \int_1^{x} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u \right) \\ &\qquad - \cos(x) \left(\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u - \int_1^{x} \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u \right) \end{aligned}$$

puis en dérivant derechef, par des calculs identiques,

$$\begin{aligned} g''(x) = &-\cos(x)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u - \int_1^{x}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u\right) - \sin(x)\times\left(-\frac{\sin(x)}{x}\right) \\ &+\sin(x)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u - \int_1^{x}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u\right) - \cos(x)\times\left(-\frac{\cos(x)}{x}\right) \\ &= -g(x) + \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{x} = -g(x) + \frac{1}{x}\cdot \end{aligned}$$

donc g est aussi solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}\cdot$$

4. Cette égalité a été établie dans la question 2.
La continuité de g sur $[0\,;+\infty[$ est de nouveau établie par le théorème de continuité sous le signe $\int$, grâce entre autres à l'inégalité de domination

$$\forall x \in [0\,;+\infty[\,,\ \forall t \in]0\,;+\infty[\,,\ \left|\frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

et la fonction $t \longmapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$, car (en bref)

- elle est continue sur cet intervalle,
- $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-\left(1-\frac{1}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{O}}\left(t^3\right)\right)}{t^2} \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} \dfrac{1}{2}$,
- $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

5. - En majorant $\left|\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right|$ par e^{-xt}, on obtient par l'inégalité de la moyenne et la croissance de l'intégrale que

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x},$$

d'où par encadrement $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 0$;

- de même

$$|g(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2}{(t+x)^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{x},$$

d'où $g(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 0$;

- enfin, f et g sont solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle $y''+y=\frac{1}{x}$, donc on vérifie facilement que $f-g$ est solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle $y''+y=0$, équation harmonique classique dont les solutions sont les fonctions

$$x \mapsto \mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x),\ (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2.$$

Donc il existe $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x)-g(x) = \mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x).$$

Mais on a déjà établi que $(f-g)(x) = f(x)-g(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 0$, or ni cos ni sin n'ont de limite en $+\infty$, donc la seule possibilité est que $\mathrm{A}=\mathrm{B}=0$ *(on peut aussi remarquer que* $\mathrm{A} = (f-g)(n2\pi) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ *et* $\mathrm{B} = (f-g)(\pi/2+n2\pi) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$*)*, donc que $f=g$.

Mais cette égalité a été établie sur $]0\ ;\ +\infty[$, et pas en 0, cependant on a aussi prouvé que f et g sont continues sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc en 0, d'où

$$f(0) = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} g(x) = g(0).$$

On conclut avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = g(0) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \text{ (avec arctan)}$$

qui nous donne la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

Une correction de l'exercice 16.12

énoncé

Soit $g = f' + f$. La résolution de cette égalité considérée comme une équation différentielle d'inconnue f donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \left(f(0) + \int_0^x g(t)e^t \mathrm{d}t\right) e^{-x}.$$

Il s'agit de montrer que $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$, c'est-à-dire que $e^{-x}\int_0^x g(t)e^t \mathrm{d}t \to \ell$ quand $x \to +\infty$. Comme

$$e^{-x}\int_0^x g(t)e^t \mathrm{d}t = e^{-x}\int_0^x [(g(t)-\ell)+\ell]e^t \mathrm{d}t = e^{-x}\int_0^x (g(t)-\ell)e^t \mathrm{d}t + \ell(1-e^{-x}),$$

cela revient encore à démontrer que $e^{-x}\int_0^x h(t)e^t \mathrm{d}t \to 0$ quand $x \to +\infty$, sous l'hypothèse où la fonction continue h est de limite nulle en $+\infty$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \geqslant x_0$, $|h(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, si $x \geqslant x_0$, on a

$$\begin{aligned}\left|e^{-x}\int_0^x h(t)e^t \mathrm{d}t\right| &\leqslant e^{-x}\int_0^{x_0} |h(t)|e^t \mathrm{d}t + e^{-x}\int_{x_0}^x |h(t)|e^t \mathrm{d}t \leqslant e^{-x}\|h\|_\infty^{[0,x_0]}(e^{x_0}-1) + \frac{\varepsilon}{2}e\\ &\leqslant \mathrm{M}_0 e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

où l'on a posé $\mathrm{M}_0 = \|h\|_\infty^{[0,x_0]}(e^{x_0}-1)$. Comme $\lim(\mathrm{M}_0 e^{-x}) = 0$ quand $x \to +\infty$, il existe $x_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant x_1$, $\mathrm{M}_0 e^{-x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $x_2 = \max(x_0, x_1)$. Alors

$$\forall x \geqslant x_2, \quad \left|e^{-x}\int_0^x h(t)e^t \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$

Une correction de l'exercice 16.13 *énoncé*

1. Résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz, qui assure l'existence et l'unicité de telles solutions.

2. On suit l'indication. La fonction h est une solution de l'équation homogène (E_0) : $h'' - fh = 0$ associée à (E).
   Montrons que h^2 est convexe, i.e. que $(h^2)'' \geqslant 0$. On a $(h^2)'' = 2(h''h + h'^2) = 2(fh^2 + h'^2)$. On a donc bien $(h^2)'' \geqslant 0$ par hypothèse sur f. On en déduit que h^2 est la fonction nulle :

   ➟ avec les propriétés des fonctions convexes, h^2 est positive et son graphe est sous sa corde entre les points d'abscisses a et b, autrement dit sous l'axe des abscisses par hypothèse sur y_1 et y_2 en a et b.

- sans ces propriétés : la fonction $(h^2)'$ est croissante, elle ne peut pas être de signe strict constant puisque $h^2(a) = h^2(b) = 0$, et ne peut pas passer de strictement négative à strictement positive puisque $h^2(a) = h^2(b) = 0$ et que h^2 est positive. La seule solution est $(h^2)' = 0$ sur $[a, b]$, et donc h^2 constante égale à $h^2(a) = 0$.

La fonction h est donc la fonction nulle, i.e. $y_1 = y_2$. On a montré que (E) possède au plus une solution s'annulant en a et en b.

3. - Montrons que les fonctions u et v définies en (a) forment un système fondamental de solutions de (E_0). Si l'on avait $u(b) = 0$, alors la solution u de l'équation (E_0) s'annulerait en a et en b, donc serait la fonction nulle par (b) appliqué à (E_0), contredisant $u'(a) = 1$. Donc $u(b) \neq 0$, ce qui montre que les fonctions u et v ne sont pas proportionnelles. Cela fournit le résultat voulu.

   On montre de même que $v(a) \neq 0$.

   - Soit y_0 une solution particulière de (E), de sorte que les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $y_{\lambda,\mu} = y_0 + \lambda u + \mu v$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$y_{\lambda,\mu}(a) = y_{\lambda,\mu}(b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu v(a) = -y_0(a) \\ \lambda u(b) = -y_0(b) \end{cases}$$

   et ce système a une solution puisque $v(a) \neq 0$ et $u(b) \neq 0$ par le point précédent.

   Pour exprimer la solution à l'aide des fonctions u, v, f et g uniquement (sans y_0), il faudrait expliciter y_0 en fonction de f et g, ce qui est possible par la méthode de variation des constantes, désormais hors programme en PSI.