Révisions de PCSI

Exercice 18.1 – (avec la définition de la dérivabilité)

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dérivables en 0 pour lesquelles il existe $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ vérifiant : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(kx)=kf(x)$.

Exercice 18.2

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $x\mapsto\frac{2}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}$.
Préciser l'allure de sa courbe au voisinage du point d'abscisse 0.

Exercice 18.3

En raisonnant par l'absurde et en utilisant le théorème de Rolle, montrer que le polynôme $P=X^n+aX+b$ (a et b sont deux réels, et $n\geqslant 2$) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 18.4 – Généralisations du théorème de Rolle

1. **Sur** $[a,+\infty[$ **:** soit a un réel et g une fonction continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a,+\infty[$ et qui vérifie $g(a)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.
   (a) On considère la fonction G définie sur $[0,1]$ par $G(x)=g(\frac{1}{x}+a-1)$ si $x\in\,]0\,;1]$, et $G(0)=0$. Montrer que G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.
   (b) Montrer que G' s'annule en un point de $]0,1[$.
   (c) En déduire qu'il existe $c\in\,]a,+\infty[$, tel que $g'(c)=0$.
2. **Sur** $\mathbb{R}$ **:** soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui admet la même limite finie en $-\infty$ et $+\infty$. En étudiant la fonction $f\circ\tan$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$, montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 18.5 – (*)

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant la propriété

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ f(x+y)=f(x)+f(y)-f(x)f(y).$$

Exercice 18.6 – Dérivée nulle pour une fonction non constante

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$.

1. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire la valeur de $\arctan(x) + \arctan(1/x)$ pour tout réel x non-nul.

Exercice 18.7 – (*)

Soit $f :]0\,;1[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = 0$ et

$$\forall x \in]0,1[, \quad f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geqslant 0.$$

Démontrer que f est négative sur $[0,1]$. *(On pourra s'intéresser à $f \times \exp$.)*

Exercice 18.8 – Dérivées successives

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée n-ème de la fonction g_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g_n(x) = x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}$.

Exercice 18.9

Montrer que la fonction ci-dessous est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$, et donner l'expression de sa dérivée :

$$x \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 2\cos(\theta)x + 1\right) + i\arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1 - x\cos(\theta)}\right).$$

Exercice 18.10 – (*)

1. Résoudre selon les valeurs du réel λ l'équation $AX = B$, où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(y) - f(x) = (y - x)f'(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

Programme de PC

Exercice 18.11 – Dérivées successives : polynômes d'Hermite

1. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$, montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f^{(n)}(x) = e^{-x^2} H_n(x).$$
2. Trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 entre les termes de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(On pourra utiliser la formule de dérivation de Leibniz.)*
3. Montrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, et que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
(On pourra montrer que $\deg(H_n) = n$, *puis que pour tout polynôme* P *et tout* $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \mid H_n\rangle = \left\langle P^{(n)} \mid H_0 \right\rangle$*.)*

Exercice 18.12

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a_1 et a_2 appartenant à I, et $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que la famille $(f(a_1), f(a_2))$ est libre. Démontrer qu'il existe $c \in I$ pour lequel $f'(c) \in \mathrm{Vect}(f(a_1), f(a_2))$.

Exercice 18.13

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$, et $f : [a\,;\,b] \to \mathbb{R}^n$ une application continue sur $[a\,;\,b]$ et dérivable sur $]a\,;\,b[$.

À l'aide de l'application $t \mapsto \langle f(b) - f(a) \mid f(t)\rangle$, où $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ désigne un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $c \in\ ]a\,;\,b[$ vérifiant
$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant (b - a)\left\|f'(c)\right\|.$$

Exercice 18.14

Calculer pour tout réel x, par dérivation, le déterminant
$$D_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ 1 & \cos(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix}.$$

Exercice 18.15

Soient u, v, w dans $\mathscr{C}^2([a\ ;\ b], \mathbb{R})$ vérifiant $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a\ ;\ b[$ qui vérifie $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$

Systèmes différentiels linéaires

Exercice 18.16

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x + 2y + z \\ y' = y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases}$

Exercice 18.17

Résoudre $X' = AX + B(t)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 4t - 6t^2 \\ -2t - 12t^2 \\ 1 + 6t^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 18.18

On considère le système différentiel (E) : $\begin{cases} x' = 2t\,x - y + t\cos(t) \\ y' = x + 2t\,y + t\sin(t) \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble des solutions du système homogène associé (H) en posant $u(t) = x(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = y(t)e^{-t^2}$.
2. Rechercher une solution de (E) sous la forme $X = a_1X_1 + a_2X_2$, où a_1 et a_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et X_1, X_2 sont solutions de (H).
3. Donner toutes les solutions de (E).

Problème 18.19 – (D'après E3A PSI)

Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.
   (a) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction : $g = f + f' + f''$.
   (b) Résoudre l'équation (E_2).
   (c) En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1).
2. On considère le système différentiel (S) à coefficients constants :
$$(\mathrm{S}) : \mathrm{X}' = \mathrm{AX}, \text{ où } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \text{ et } \mathrm{X} : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).$$
   (a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Résoudre le système (S).
   (c) Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question 1.(c).
3. On considère la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

   On note alors, lorsque cela existe, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
   (b) Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer les développements en série entière de φ', φ'', $\varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer que le système $\left\{\begin{array}{llll} a & +b & +c & = 1 \\ a & +\mathrm{j}\, b & +\mathrm{j}^2\, c & = 0 \\ a & +\mathrm{j}^2\, b & +\mathrm{j}\, c & = 0 \end{array}\right.$ d'inconnue (a, b, c)admet une unique solution que l'on précisera.

   En déduire une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

Une correction de l'exercice 18.1

énoncé

(i) Tout d'abord, on remarque que $f(0) = f(k \times 0) = k \times f(0)$, donc $(1-k)f(0) = 0$, et comme $k \neq 1$, $f(0) = 0$.

(ii) Pour tout réel x, et tout entier naturel n, on montre par récurrence que

$$f(x) = \frac{1}{k^n} f(k^n x) = k^n f\left(\frac{1}{k^n} x\right).$$

(iii) Comme f est dérivable en 0, alors

$$\lim_{\square \to 0} \frac{f(\square) - f(0)}{\square - 0} = \lim_{\square \to 0} \frac{f(\square)}{\square} = f'(0),$$

donc :

- si $|k| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$, d'où par composition des limites, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{k^n} f(k^n x) = x \times \frac{f(k^n x)}{k^n x} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} x \times f'(0),$$

- si $|k| > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{k^n} = 0$, d'où par composition des limites, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = k^n f\left(\frac{1}{k^n} x\right) = x \times \frac{f\left(\frac{1}{k^n} x\right)}{\frac{1}{k^n} x} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} x \times f'(0).$$

(iv) Ainsi **pour tout réel x non nul, $f(x) = f'(0)x$ (et ceci est aussi vrai pour $x = 0$).**

On conclut en affirmant que les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables en 0 pour lesquelles il existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(kx) = kf(x)$ sont les applications linéaires $x \mapsto ax$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Une correction de l'exercice 18.2

énoncé

> ➟ *L'expression proposée de la fonction (notons-là f) ne permet pas de calculer $f(0)$, donc f n'est pas définie en 0. L'exercice revient donc à étudier la possibilité de prolonger f par continuité en 0, puis d'étudier la dérivabilité de ce prolongement.*
>
> ➟ *Pour préciser l'allure de sa courbe au voisinage du point d'abscisse 0, il va nous falloir un terme de plus au delà de la partie de degré 1 du développement limité.*

➟ Pour tout réel x non-nul,

$$\frac{2}{e^{2x}-1} - \frac{1}{x} = \frac{2x - e^{2x} + 1}{x(e^{2x}-1)}$$

> *Pour répondre à la question, il nous faut un développement limité final d'ordre au moins 2, mais on constate que le dénominateur $x(e^{2x}-1)$ est équivalent à $x \times 2x = 2x^2$, donc une des étapes du calcul devra consister à simplifier le développement limité du numérateur par x^2, ce qui fera chuter son ordre de 2. En conséquence de tout cela, je vous annonce solennellement qu'il nous faut développer numérateur et dénominateur à l'ordre au moins 4.*
>
> *Prévoir tout cela demande de la pratique, l'élève imprévoyant se contentera de recommencer plusieurs fois ses calculs jusqu'à ce qu'ils lui fournissent un résultat suffisant. En effet, faisant moi-même ce calcul, plein d'auto-suffisance comme à l'accoutumée, je me suis rendu compte en touchant au but que même l'ordre 4 ne suffit pas car les termes de degré 2 péniblement collectés ont la désastreuse idée de s'éliminer (« La barbe ! »* m'écriai-je, comme nos amis les débonnaires talibans, que je salue s'ils me lisent). *J'ai du revenir sur mes pas et rajouter un terme d'ordre 5 au départ des calculs.*

➟ Tout d'abord, quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned}
&2x - e^{2x} + 1 \\
&= 2x - \left(1 + (2x) + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{24}(2x)^4 + \frac{1}{120}(2x)^5 + o((2x)^5)\right) + 1 \\
&= -2x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
x\left(e^{2x}-1\right) &= x \times \left((2x)+\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{6}(2x)^3+\frac{1}{24}(2x)^4+o((2x)^4)\right)\\
&= 2x^2+2x^3+\frac{4}{3}x^4+\frac{2}{3}x^5+o(x^5)
\end{aligned}$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{2x-e^{2x}+1}{x(e^{2x}-1)} &= \frac{-2x^2-\frac{4}{3}x^3-\frac{2}{3}x^4-\frac{4}{15}x^5+o(x^5)}{2x^2+2x^3+\frac{4}{3}x^4+\frac{2}{3}x^5+o(x^5)}\\
&= \frac{-2x^2(1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{15}x^3+o(x^3))}{2x^2(1+x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^3+o(x^3))}\\
&= -\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{15}x^3+o(x^3)\right)\\
&\qquad\times\frac{1}{1-\left[-x-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}
\end{aligned}$$

Quand x tend vers 0,

$$\lim_{x\to 0}\left[-x-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]=0,$$

donc on peut utiliser le développement limité $\frac{1}{1-\square}=1+\square+\square^2+\square^3+o(\square^3)$ quand $\square$ tend vers 0. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\left[-x-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]} &= \left(1+\left[-x-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]\right.\\
&\quad+\left[-x-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]^2\\
&\quad+\left[-x-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]^3\\
&\quad\left.+\,o\left(\left[-x-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]^3\right)\right)\\
&= 1-x+\frac{1}{3}x^2+o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{2x - e^{2x} + 1}{x(e^{2x} - 1)} = -\left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^3 + o(x^3)\right) \times \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 + o\left(x^3\right)\right)$$
$$= -1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + o(x^3)$$

- On conclut donc que

$$\frac{2}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{x} = -1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + o(x^3)$$

et je vous laisse les déductions d'usage, en m'attardant sur le fait que $f(x) - (-1 + \frac{1}{3}x) \sim -\frac{1}{45}x^3$, donc que la courbe de f est localement au dessus de la tangente à gauche du point $(0, -1)$, et en dessous à droite de ce point.

Une correction de l'exercice 18.3

énoncé

On raisonne par l'absurde :

- supposons que P possède (au moins) quatre racines réelles distinctes que l'on notera x_1, x_2, x_3, x_4 dans l'ordre croissant.
- Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, P_n est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Comme de plus $\mathrm{P}_n(x_i) = \mathrm{P}(x_{i+1}) = 0$, le théorème de Rolle nous permet d'affirmer qu'il existe $y_i \in\ ]x_i, x_{i+1}[$ qui vérifie $\mathrm{P}_n'(y_i) = 0$.
- On obtient trois réels y_1, y_2, y_3 distincts (car $y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3$) qui annulent P'.
- Il suffit alors de réitérer le même raisonnement sur P', qui est encore continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, pour obtenir deux racines réelles distinctes pour P''.

  Or $\mathrm{P}''(\mathrm{X}) = n(n-1)\mathrm{X}^{n-2}$, donc la seule racine possible de P'' est 0, autrement dit P_n'' admet au plus une seule racine.
- On obtient donc une contradiction, ce qui nous permet de conclure que P admet au plus trois racines réelles distinctes.

Une correction de l'exercice 18.4 *énoncé*

1. (a) ➟ Sur $]0,1]$, $G = g \circ u$ où $u : x \mapsto \frac{1}{x} + a - 1$.

↦ u est continue sur $]0,1]$,
↦ $u(]0\ ;\ 1]) = [a, +\infty[$,
↦ g est continue sur $[a, +\infty[$,

donc $\boxed{G = g \circ u \text{ est continue sur }]0,1]}$.

➟ En 0,

$$\lim_{0^+} G = \lim_{x \to 0^+} g(\tfrac{1}{x} + a - 1) = \lim_{\square \to +\infty} g(\square) = 0 = G(0).$$

ainsi $\boxed{G \text{ est continue en } 0}$.

Donc $\boxed{G \text{ est continue sur } [0,1]}$.

➟ Puis comme pour la continuité

↦ u est dérivable sur $]0,1[$,
↦ $u(]0\ ;\ 1[) =]a, +\infty[$,
↦ g est dérivable sur $]a, +\infty[$,

donc $\boxed{G = g \circ u \text{ est dérivable sur }]0,1[}$

avec pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$,

$$G' : x \mapsto -\frac{1}{x^2} \times g'\left(\frac{1}{x} + a - 1\right).$$

(b) On peut donc appliquer le théorème de Rolle à G sur $[0,1]$, qui nous donne l'existence d'un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $G'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire tel que

$$-\frac{1}{\alpha^2} g'(\frac{1}{\alpha} + a - 1) = 0$$

d'où

$$\boxed{g'(c) = 0} \text{ avec } c = \frac{1}{\alpha} + a - 1 \in]a, +\infty[.$$

2. la fonction tan est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc

$\boxed{f \circ \tan \text{ est dérivable (et continue) sur }]-\pi/2, \pi/2[}$.

De plus f a une limite finie, que l'on note ℓ, en $\pm\infty$, donc comme

$$\lim_{t\to -\pi/2^+} \tan(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t\to \pi/2^-} \tan(t) = +\infty,$$

on en déduit par composition des limites que

$$\lim_{t\to -\pi/2^+} (f\circ \tan)(t) = \ell \text{ et } \lim_{t\to +\pi/2^-} (f\circ \tan)(t) = \ell.$$

On en déduit que l'on peut prolonger par $f\circ\tan$ en la fonction

$$\mathrm{G} : t \mapsto \begin{cases} f(\tan(t)), & \text{si } x \in \,]-\pi/2, \pi/2[, \\ \ell, & \text{si } x = -\pi/2 \text{ ou } x = \pi/2, \end{cases}$$

qui est $\boxed{\text{continue sur } \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]}$.

Cette fonction G remplit toutes les conditions du théorème de Rolle sur $[-\pi/2, \pi/2]$, on en déduit qu'il existe un réel $\alpha \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ qui vérifie $\mathrm{G}'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &(f\circ\tan)'(\alpha) = 0 \\ \Longleftrightarrow\, & f'(\tan(\alpha)) \times (1 + \tan^2(\alpha)) = 0 \end{aligned}$$

d'où $f'(\tan(\alpha)) = 0$.

On obtient bien $\boxed{f'(c) = 0 \text{ avec } c = \tan(\alpha)}$.

Une correction de l'exercice 18.5

énoncé

1. Tout d'abord pour $x = y = 0$, $f(0)(1 - f(0)) = 0$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$;
2. pour $y = 0$, on a pour tout réel x, $f(0)(1 - f(x)) = 0$, donc si $f(0) = 1$, alors f est la fonction constante égale à 1, et est vérifie bien la propriété.
3. Supposons à présent que $f(0) = 0$.
   Dérivons l'égalité par rapport à x, on obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$f'(x+y) = f'(x)(1 - f(y)).$$

   Pour tout réel t, en prenant $x = 0$ et $y = t$, on en déduit que

   $$f'(t) = -f'(0)f(t) + f'(0).$$

Donc, en notant $a = f'(0)$, f est solution de l'équation différentielle $y' = -ay + a$, donc il existe un réel K tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = 1 + \mathrm{K}e^{-at}.$$

Il suffit de se souvenir que $f(0) = 0$ pour obtenir $\mathrm{K} = -1$.

4. On conclut, après avoir vérifié que ces fonctions sont bien solution, que les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto 1 - e^{-at}$, où a est un réel quelconque.

Une correction de l'exercice 18.6

énoncé

1. inv : $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc arctan $\circ$ inv : $x \mapsto \arctan(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et par conséquent φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \arctan'(x) + [\arctan \circ \mathrm{inv}]'(x) \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \arctan'(1/x) \times \mathrm{inv}'(x) \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.
\end{aligned}$$

2. On sait qu'une fonction dérivable dont la dérivée est nulle sur un **intervalle** est constante sur cet **intervalle**, par conséquent φ est constante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   Or $\varphi(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \pi/4 = \pi/2$, et de même $\varphi(-1) = -\pi/2$ donc

$$\boxed{\varphi(x) = \varphi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } x > 0\,; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x < 0\,; \end{cases}}$$

Une correction de l'exercice 18.7

énoncé

➡ Notons g la fonction définie sur $]0\,;\,1[$ par $g(x) = f(x)e^x$.
On peut déjà constater que f et g sont de même signe.
Puis, par les hypothèses sur f, $g(0) = g(1) = 0$.

De plus, g est aussi deux fois dérivable sur $]0\,;1[$, la formule de Leibniz nous donnant $g''(x) = \left(f''(x) + 2f'(x) + f(x)\right)\mathrm{e}^x$.

Donc, encore par hypothèse sur f, g'' est positive sur $]0\,;1[$, donc g' est croissante sur $]0\,;1[$.

- Ainsi, si g' change de signe sur $]0\,;1[$, alors g' est négative, puis positive, donc g est décroissante, puis croissante. Or $g(0) = g(1) = 0$, donc g est négative sur $]0\,;1[$, et f aussi.
- Si g' ne change pas de signe sur $]0\,;1[$, alors g' est de signe constant, donc g est monotone. Or $g(0) = g(1) = 0$, donc g est constante et nulle sur $]0\,;1[$, et f aussi, donc négative au sens large.

Une correction de l'exercice 18.8

énoncé

- Tout d'abord, la fonction g_n est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, comme produit de $x \mapsto x^{n-1}$, polynomiale donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, par la composée de $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, par exp qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- On cherche une expression pour $(g_n)^{(n)}$.

  Par quelques calculs, on constate que pour $n \in \{1,2,3\}$,

$$(g_n)^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Supposons que ceci est vrai pour tout un $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons que cette formule est encore valable au rang $n+1$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, rappelons que $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$, alors

$$g_{n+1}(x) = x^n \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = x \times g_n(x) = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times g_n)(x)$$

d'où avec la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
(g_{n+1})^{(n+1)}(x) &= (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times g_n)^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{(k)}(x) \times (g_n)^{(n+1-k)}(x) \\
&= x \times (g_n)^{(n+1)}(x) + (n+1) \times 1 \times (g_n)^{(n)}(x) \\
&= x \times \left((g_n)^{(n)}\right)'(x) + (n+1) \times 1 \times (g_n)^{(n)}(x) \\
&= x \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) + (n+1)\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= x \times \left((-1)^n\frac{-(n+1)}{x^{n+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) + (n+1)\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \\
&= (-1)^{n+1}\frac{(n+1)}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + (n+1)\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{C.Q.F.D}
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 18.9

énoncé

- La fonction

$$u : x \mapsto x^2 - 2\cos(\theta)x + 1 = \left(x - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(x - \mathrm{e}^{-i\theta}\right) = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$$

  est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;\,1[$,
- u est aussi strictement positive sur $]-1\,;\,1[$, c'est-à-dire $u(]-1\,;\,1[) \subset]0\,;\,+\infty[$, car si $\sin\theta = 0$, alors $\cos\theta = \pm 1$, donc comme $x \in]-1\,;\,1[$, $(x - \cos(\theta))^2 > 0$.
- La fonction ln est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;\,+\infty[$, donc a fortiori sur $u(]-1\,;\,1[)$.

Par conséquent, on peut affirmer que $\ln \circ u : x \mapsto \ln\left(x^2 - 2\cos(\theta)x + 1\right)$ est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;\,1[$.

- Pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, $0 < 1 - |x| < |1 - x\cos(\theta)|$,

> *on rappelle la deuxième inégalité triangulaire :*
>
> $$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$$

donc $x \mapsto \frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}$ est le rapport de deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;\,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas, c'est donc une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;\,1[$.
Ainsi $x \mapsto \arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right)$ est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;\,1[$ car arctan est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- On peut donc conclure que

$$g : x \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 2\cos(\theta)x + 1\right) + i\arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right)$$

est une fonction définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;\,1[$.

- Pour tout $x \in\,]-1\,;\,1[$, la dérivée de cette fonction a pour expression

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{2x - 2\cos(\theta)}{x^2 - 2\cos(\theta)x + 1} + i \times \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right)}{1 + \left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right)^2} \\
&= \frac{\cos(\theta) - x}{x^2 - 2\cos(\theta)x + 1} + i \times \frac{\left(\frac{\sin(\theta)\times(1-x\cos(\theta)) - x\sin(\theta)\times(-\cos(\theta))}{(1-x\cos(\theta))^2}\right)}{\frac{(1-x\cos(\theta))^2 + (x\sin(\theta))^2}{(1-x\cos(\theta))^2}} \\
&= \frac{\cos(\theta) - x}{x^2 - 2\cos(\theta)x + 1} + i \times \frac{\sin(\theta)}{(1-x\cos(\theta))^2 + (x\sin(\theta))^2} \\
&= \frac{\cos(\theta) - x}{x^2 - 2\cos(\theta)x + 1} + i \times \frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2\cos(\theta)x + 1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - x}{x^2 - 2\cos(\theta)x + 1}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 18.10

énoncé

1. $\det(A) = \lambda^2 - (1-\lambda)^2 = 2\lambda - 1$, donc
   - si $\lambda \neq \frac{1}{2}$, A est inversible, d'inverse

$$\frac{1}{2\lambda - 1}\begin{pmatrix} \lambda & -(1-\lambda) \\ -(1-\lambda) & \lambda \end{pmatrix},$$

donc l'équation $AX = B$ se résout en

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2\lambda - 1}\begin{pmatrix} \lambda a - (1-\lambda) b \\ -(1-\lambda) a + \lambda b \end{pmatrix},$$

➟ si $\lambda = \frac{1}{2}$, $AX = B$ est le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y) = a \\ \frac{1}{2}(x+y) = b \end{cases}$$

qui

- si $a \neq b$, n'a pas de solution ;
- si $a = b$, a pour ensemble des solutions la droite d'équation $x + y = 2a$, c'est-à-dire les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} 2a - y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; f(y) - f(x) = (y-x)f'(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

Alors pour $x \neq y$,

$$\begin{aligned} f'(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ \text{et } f'(\lambda y + (1-\lambda)x) &= \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &= f'(\lambda x + (1-\lambda)y) \;\; \text{(E)}, \end{aligned}$$

cette égalité restant vraie pour $x = y$.

➟ $\boxed{\text{Dans le cas où } \lambda \neq \frac{1}{2},}$ montrons que f' est constante. Prenons deux réels $a < b$, montrons que $f'(a) = f'(b)$.
D'après la question 1, il suffit de (et il faut) prendre

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{2\lambda - 1}\begin{pmatrix} \lambda a - (1-\lambda) b \\ -(1-\lambda) a + \lambda b \end{pmatrix},$$

pour avoir

$$AX = B, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} a = \lambda x + (1-\lambda)y \\ b = (1-\lambda)x + \lambda y \end{cases}$$

et par conséquent $f'(a) = f'(b)$ d'après l'égalité (E).
Ainsi, f' est constante sur $\mathbb{R}$, donc f est une fonction affine, autrement dit polynomiale de degré 1, de la forme $f : t \mapsto \alpha t + \beta$.
On vérifie bien que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(y) - f(x) = \alpha(y-x)$$
$$(y-x)f'(\lambda x + (1-\lambda)y) = \alpha(y-x),$$

pour conclure que

> *pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que*
>
> $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(y) - f(x) = (y-x)f'(\lambda x + (1-\lambda)y)$$
>
> *sont les fonctions affines.*

➠ $\boxed{\text{Si } \lambda = \frac{1}{2},}$ alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(y) - f(x) = (y-x)f'\left(\frac{1}{2}(x+y)\right).$$

➔ Prenons un réel t, et pour avoir $t = \frac{1}{2}(x+y)$, on prend un réel x quelconque, et $y = 2t - x$, ainsi

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \ f(2t-x) - f(x) = 2(t-x)f'(t).$$

Mais pour x fixé, la fonction $t \mapsto f'(t) = \frac{f(2t-x)-f(x)}{2(t-x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ comme rapport de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Par conséquent f' est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x\}$, et comme on a prouvé ceci pour tout réel x, on conclut que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On dérive par rapport à t dans l'égalité

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(2t-x)-f(x)=2(t-x)f'(t),$$

pour obtenir

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ \ 2f'(2t-x)=2f'(t)+2(t-x)f''(t),$$

d'où pour $t=0$, et en remplaçant x par $-x$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \ f'(x)=f'(0)+2xf''(0),$$

donc f' est une fonction affine, c'est-à-dire polynomiale de degré 1, d'où $\boxed{f \text{ est une fonction polynomiale de degré } 2}$.

- Réciproquement, si $f=\alpha X^2+\beta X+\gamma$, alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= \alpha(y^2-x^2)+\beta(y-x) \\ &= (y-x)(\alpha(x+y)+\beta) \\ (y-x)f'(\tfrac{1}{2}(x+y)) &= (y-x)\left(2\alpha(\tfrac{1}{2}(x+y))+\beta\right) \\ &= (y-x)(\alpha(x+y)+\beta) \\ &= f(y)-f(x). \end{aligned}$$

- On peut ainsi conclure que

les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(y)-f(x)=(y-x)f'(\tfrac{1}{2}(x+y))$$

sont les fonctions polynomiales de degré 2.

Une correction de l'exercice 18.11 *énoncé*

1. On procède par récurrence, avec $H_0 = 1$, puis

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left[e^{-x^2} H_n(x)\right]' & \quad \textit{(par hypothèse de récurrence, et avec abus de notation)} \\ = -2x \times e^{-x^2} \times H_n(x) + e^{-x^2} \times H_n'(x) & \\ = e^{-x^2}\left(-2x H_n(x) + H_n'(x)\right) & \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu en prenant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $H_{n+1} = -2XH_n + H_n'$.

2. On sait que pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) = -2xe^{-x^2} = -2x \times f(x), \\ \text{donc } f' = u \times f \quad (\textit{où } u\,;\, x \mapsto -2x) \end{aligned}$$

donc en appliquant la formule de Leibniz (de dérivation d'un produit), pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout réel x,

$$\begin{aligned} f^{(n+2)}(x) = \left(f'\right)^{(n+1)}(x) = (u \times f)^{(n+1)}(x) \\ = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)}(x) \times f^{(k)}(x) \\ = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} H_{n+2}(x) = e^{x^2} f^{(n+2)}(x) = -2xe^{x^2} f^{(n+1)}(x) - 2(n+1)e^{x^2} f^{(n)}(x) \\ = -2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x), \end{aligned}$$

ce qui nous donne la relation de récurrence voulue.

3. ➡ D'une part si on suppose qu'au rang $n \in \mathbb{N}$, $\deg(H_n) = n$ et $\deg(H_{n+1}) = n+1$, ce qui est vrai pour $n = 0$, alors le polynôme

$$H_{n+1} = -2XH_{n+1} - 2(n+1)H_n,$$

est de degré $n+2$ comme somme de $-2XH_{n+1}$ qui est de degré $n+2$, et de $-2(n+1)H_n$ de degré n.
Donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(H_n) = n$.

- D'autre part, supposons de nouveau qu'au rang $n \in \mathbb{N}$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P \mid H_n \rangle = (-1)^n \left\langle P^{(n)} \mid H_0 \right\rangle$, ce qui est vrai au rang $n = 0$.
  Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned}\langle P \mid H_{n+1} \rangle &= \left\langle P \mid -2XH_n + H_n' \right\rangle \quad \textit{(d'après la question 1)} \\ &= \langle P \mid -2XH_n \rangle + \left\langle P \mid H_n' \right\rangle.\end{aligned}$$

  Mais

$$\begin{aligned}\langle P \mid -2XH_n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)H_n(t)(-2te^{-t^2})\mathrm{d}\,t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)H_n(t)f'(t)\mathrm{d}\,t.\end{aligned}$$

  Or $t \mapsto P(t)H_n(t)$ et f sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et par croissances comparées $P(t)H_n(t)f(t)$ tend vers 0 en $\pm\infty$, donc par une intégration par parties

$$\begin{aligned}\langle P \mid -2XH_n \rangle &= -\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (PH_n)'(t)f(t)\mathrm{d}\,t\right) \\ &= -\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (PH_n)'(t)f(t)\mathrm{d}\,t\right) \\ &= -\langle P' \mid H_n \rangle - \left\langle P \mid H_n' \right\rangle.\end{aligned}$$

  Ainsi il reste

$$\langle P \mid H_{n+1} \rangle = -\langle P' \mid H_n \rangle$$

  d'où grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée à P',

$$\langle P \mid H_{n+1} \rangle = -(-1)^n \left\langle (P')^{(n)} \mid H_0 \right\rangle = (-1)^{n+1} \left\langle P^{(n+1)} \mid H_0 \right\rangle, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

- Ainsi pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, si $p < q$, alors

$$\begin{aligned}\left\langle H_p \mid H_q \right\rangle &= \left\langle H_p^{(q)} \mid H_0 \right\rangle \\ &= 0 \quad \textit{(car } \deg(H_p) = p < q\textit{)}\end{aligned}$$

  ce qui prouve que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

- Tout d'abord la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et formée de polynômes non nuls, donc elle est libre.
- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, soit N un entier tel que $N \geqslant \deg(P)$, alors
  - $H_0, \dots, H_N \in \mathbb{R}_N[X]$;
  - la famille $(H_0, \dots, H_N)$ est libre ;
  - elle est de cardinal $N+1$, et $\dim(\mathbb{R}_N[X]) = N+1$,

  donc $(H_0, \dots, H_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

  Ainsi $P \in \mathrm{Vect}(H_0, \dots, H_N) \subset \mathrm{Vect}\left((H_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.
  On a donc établi que $\mathbb{R}[X] \subset \mathrm{Vect}\left((H_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, et l'inclusion réciproque est évidente, donc $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.
- la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale, libre, et génératrice de $\mathbb{R}[X]$, c'est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Une correction de l'exercice 18.12

énoncé

La fonction $L : X \mapsto \det_{\mathscr{B}}(X, f(a_1), f(a_2))$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, et $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$.
Donc par composition, l'application de I dans $\mathbb{R}$

$$\varphi = L \circ f : x \mapsto \det_{\mathscr{B}}(f(x), f(a_1), f(a_2))$$

est $\mathscr{C}^1$ sur I de dérivée $\varphi' : x \mapsto (L \circ f')(x) = \det_{\mathscr{B}}\left(f'(x), f(a_1), f(a_2)\right)$.
De plus $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = 0$, donc par le théorème de Rolle, il existe c entre a_1 et a_2, donc dans I, tel que $\varphi'(c) = 0$, autrement dit $\det_{\mathscr{B}}\left(f'(c), f(a_1), f(a_2)\right) = 0$.
Ainsi la famille $\left(f'(c), f(a_1), f(a_2)\right)$ est liée, et comme $(f(a_1), f(a_2))$ est libre, on peut affirmer que $f'(c) \in \mathrm{Vect}(f(a_1), f(a_2))$.

Une correction de l'exercice 18.13

énoncé

L'application $L : X \mapsto (f(b) - f(a)|X)$ est linéaire, donc $\varphi = L \circ f$, qui va de $[a\,;\,b]$ dans $\mathbb{R}$, conserve la continuité de f sur $[a\,;\,b]$ et la dérivabilité de f sur $]a\,;\,b[$, avec en plus

$$\forall t \in]a\,;\,b[,\quad \varphi'(t) = L \circ f' = \left(f(b) - f(a)|f'(t)\right).$$

Cette application φ vérifie les conditions du théorème des accroissements finis, donc il existe $c \in]a\,;\,b[$ tel que $\varphi'(c) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$, ce qui donne

$$(f(b)-f(a)|f'(c)) = \frac{(f(b)-f(a)|f(b)) - (f(b)-f(a)|f(a))}{b-a}$$

d'où

$$(f(b)-f(a)|f'(c)) = \frac{\|f(b)-f(a)\|^2}{b-a}.$$

Puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne que

$$\frac{\|f(b)-f(a)\|^2}{b-a} \leqslant \|f(b)-f(a)\| \times \left\|f'(c)\right\|$$

dont on déduit l'inégalité voulue.

Une correction de l'exercice 18.14

énoncé

Les fonctions $u : x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \cos(x+a) \\ \cos(x+b) \end{pmatrix}$, et $v : x \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \sin(x+a) \\ \sin(x+b) \end{pmatrix}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, car ce sont des fonctions vectorielles dont les coordonnées sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, par la multilinéarité du déterminant, la fonction

$$\mathrm{D} : x \mapsto \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ 1 & \cos(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix}$$

est aussi dérivable, avec pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & -\sin(x) & \sin(x) \\ 1 & -\sin(x+a) & \sin(x+a) \\ 1 & -\sin(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(x) \\ 1 & \cos(x+a) & \cos(x+a) \\ 1 & \cos(x+b) & \cos(x+b) \end{vmatrix} \\ &= 0+0=0.\end{aligned}$$

Donc D est constante sur $\mathbb{R}$, égale à

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(0) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cos(a)-1 & \sin(a) \\ 0 & \cos(b)-1 & \sin(b) \end{vmatrix} \\ &= (\cos(a)-1)\sin(b) - (\cos(b)-1)\sin(a) \\ &= \cos(a)\sin(b) - \cos(b)\sin(a) - \sin(b) + \sin(a) \\ &= \sin(b-a) - \sin(b) + \sin(a). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ 1 & \cos(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix} = \sin(b-a) - \sin(b) + \sin(a).$$

Une correction de l'exercice 18.15 *énoncé*

➟ Comme le déterminant d'un matrice est linéaire par rapport à chaque colonne, et donc par rapport à chaque ligne par transposition, on peut affirmer que l'application L de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{L}(x,y,z) = \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

est linéaire.

Ainsi comme u, v, w sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a\ ;\ b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $\varphi = (u, v, w)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $[a\ ;\ b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, et par conséquent, l'application

$$f = \mathrm{L} \circ \varphi : t \mapsto \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u(t) & v(t) & w(t) \end{vmatrix}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a\ ;\ b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec en particulier pour tout $t \in$

$[a\ ;\ b]$,

$$f'(t) = (\mathrm{L} \circ \varphi)'(t) = \left(\mathrm{L} \circ \varphi'\right)(t) = \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(t) & v'(t) & w'(t) \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \ f''(t) = \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(t) & v''(t) & w''(t) \end{vmatrix}.$$

- Comme le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul, on remarque que $f(a) = f(b) = 0$, et f, étant $\mathscr{C}^2$ sur $[a\ ;\ b]$, respecte les conditions du théorème de Rolle, donc il existe un réel d dans $]a\ ;\ b[$ tel que $f'(d) = 0$.
- Mais d'après l'énoncé

$$\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0,$$

autrement dit $f'(a) = 0$.

Ainsi f' s'annule en a et en d, avec $a < d$, et comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a\ ;\ b]$, l'application f' est continue sur $[a\ ;\ b]$ et dérivable sur $]a\ ;\ b[$, donc on peut de nouveau appliquer le théorème de Rolle à f' entre a et d, ce qui nous donne l'existence de $c \in\,]a\ ;\ d[\, \subset\,]a\ ;\ b[$ tel que $f''(c) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 18.16

énoncé

- Il s'écrit sous forme matricielle $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$, où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
- Par la méthode de son choix, on trouve que les valeurs propres de A sont 1 (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double).

On détermine comme on veut que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 1 ; puis que le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est la droite vectorielle engendrée par $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En particulier, la matrice n'est pas diagonalisable puisque les ordres de multiplicité de 2 sont différents.

➟ On choisit le vecteur $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le seul but de compléter la famille libre (V_1, V_2) en une base de $\mathbb{R}^3$, car il est simple de vérifier que V_1, V_2 et V_3 forment une famille libre.

Puis un petit calcul nous donne $AV_3 = -2V_1 + V_2 + 2V_3$, donc la matrice de A *(plus précisément de l'endomorphisme canoniquement associé à* A*)* dans cette nouvelle base $\mathscr{B} = (V_1, V_2, V_3)$ est

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(A) = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(AV_1, AV_2, AV_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

autrement dit par la formule de changement de bases :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=T} \times P^{-1}.$$

➟ Posons $Y = P^{-1}X$.

La fonction vectorielle Y vérifie le système $Y' = TY$, qu'on écrit

$$\begin{cases} u' = u - 2w \\ v' = 2v + w \\ w' = 2w \end{cases}$$

(système triangulaire qui se résout « du bas vers le haut ».)

➔ Les solutions de $w' = 2w$ sont les fonctions $w : t \mapsto ae^{2t}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$;

- puis (en passant la méthode de variation de la constante), les solutions de $v' = 2v + w$, pour les fonctions w déterminées ci-dessus, sont les fonctions $v : t \mapsto be^{2t} + at\, e^{2t}$;
- enfin les solutions de $u' = u - 2w$, toujours pour les fonctions w déterminées dans le premier point, sont les fonctions $u : t \mapsto ce^t - 2a\, e^{2t}$.

➟ Pour trouver enfin la solution générale du système initial, il suffit de faire $X = PY$, soit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ce^t - 2\alpha e^{2t} \\ (b+\alpha t)e^{2t} \\ \alpha e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ce^t + (3b - 2\alpha + 3\alpha t)e^{2t} \\ (b+\alpha t)e^{2t} \\ (b+\alpha+\alpha t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

Une correction de l'exercice 18.17

énoncé

(1) **Résolution du système homogène** : on diagonalise (polynôme caractéristique $X^2(X-6)$, puis sous-espaces propres) A en

$$A = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

En posant $X = PY$,

$$\begin{aligned}
(H) : X' = AX &\iff Y' = DY \\
&\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R},\quad Y(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 e^{6t} \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R},\quad X(t) = P \times Y(t) = P \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 e^{6t} \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R},\quad X(t) = \begin{pmatrix} C_1 - C_3 e^{6t} \\ C_2 - 2C_3 e^{6t} \\ C_1 + 2C_2 + C_3 e^{6t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2) **Recherche d'une solution particulière de** (E) : cherchons une solution X de (E) sous la forme $X = PY$, où $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} X' = AX + B &\iff P^{-1}X' = P^{-1}APY + P^{-1}B \\ &\iff Y' = DY + P^{-1}B. \end{aligned}$$

Mais un rapide et infaillible calcul donne

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

puis pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} 4t+1 \\ -2t \\ 6t^2 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} X' = AX + B &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t+1 \\ -2t \\ 6t^2 \end{pmatrix} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1'(t) & = 4t+1 \\ y_2'(t) & = -2t \\ y_3'(t) & = 6y_3(t) + 6t^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Rappelons encore une fois qu'il nous suffit de trouver une solution vectorielle Y, autrement dit une solution de chacune des trois équations ci-dessus.
Les deux premières équations différentielles sont élémentaires, et pour la 3ᵉ, je me contente de chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 (comme le second membre $6\,t^2$) et je trouve $-\frac{1}{18} - \frac{1}{3}t - t^2$.

Il suffit de prendre :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{ll} y_1(t) & = t + 2t^2 \\ y_2(t) & = -t^2 \\ y_3(t) & = -\frac{1}{18} - \frac{1}{3}t - t^2 \end{array}\right.$$

et enfin (avec $X = PY$) on obtient la solution de (E) suivante :

$$\begin{aligned} X : t \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t + 2t^2 \\ -t^2 \\ -\frac{1}{18} - \frac{1}{3}t - t^2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} + \frac{4}{3}t + 3t^2 \\ \frac{1}{9} + \frac{2}{3}t + t^2 \\ -\frac{1}{18} + \frac{2}{3}t - t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) Finalement les solutions de (E) sont les applications de la forme

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{18} + \frac{4}{3}t + 3t^2 \\ \frac{1}{9} + \frac{2}{3}t + t^2 \\ -\frac{1}{18} + \frac{2}{3}t - t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 - C_3 e^{6t} \\ C_2 - 2C_3 e^{6t} \\ C_1 + 2C_2 + C_3 e^{6t} \end{pmatrix},$$

où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.

Une correction de l'exercice 18.18

énoncé

Le système différentiel (E) : $\left\{\begin{array}{l} x' = 2t\,x - y + t\cos(t) \\ y' = x + 2t\,y + t\sin(t) \end{array}\right.$ a pour forme matricielle :

$$X' = A(t)X + B(t) \text{ où } A(t) = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} \text{ et} B(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}$$

1. On sait déjà que le système homogène $X' = AX$ correspondant est un plan vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ car A et B sont continues sur $\mathbb{R}$.

   Soient $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, et $U : t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{-t^2} X(t)$.

Alors U est aussi une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{U}(t),$$

donc

$$\mathrm{X}'(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{U}(t) + \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{U}'(t),$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}' = \mathrm{AX} &\iff 2t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{U} + \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{U}' = \mathrm{A}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{U} \\
&\iff \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{U}' = \mathrm{A}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{U} - 2t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{U} = \mathrm{e}^{t^2}(\mathrm{A} - 2t\mathrm{I}_2)\mathrm{U} \\
&\iff \mathrm{U}' = (\mathrm{A} - 2t\mathrm{I}_2)\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{U} \\
&\iff \begin{cases} u' = -v \\ v' = u \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} u'' = -v' = -u \\ v' = u \end{cases} \\
&\iff \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} u = \alpha\cos + \beta\sin \\ v' = u \end{cases} \\
&\text{ce qui est vrai pour } \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} u = \alpha\cos + \beta\sin \\ v = \alpha\sin - \beta\cos \end{cases}
\end{aligned}$$

On vérifie alors que ces deux fonctions donnent bien une solution de

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = u \end{cases}$$

donc on conclut que

$$\mathrm{X} : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}\begin{pmatrix} \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) \\ \alpha\sin(t) - \beta\cos(t) \end{pmatrix} = \alpha\mathrm{e}^{t^2}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \beta\mathrm{e}^{t^2}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

est solution de (H) sur $\mathbb{R}$.
Or on sait que ce système homogène (H) a pour ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$ un plan vectoriel, car A est une application continue sur $\mathbb{R}$, donc on a trouvé toutes les solutions de (H).
En conclusion, l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}\right).$$

2. Soient X_1 et X_2 deux solutions de (H) et a_1, a_2 deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors $X = a_1 x_1 + A_2 x_2$ est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\begin{aligned} X' &= a_1' X_1 + a_1 X_1' + a_2' X_2 + a_2 X_2' \\ &= a_1' X_1 + a_1 A X_1 + a_2' X_2 + a_2 A X_2 \ \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont solutions de } (H)\textit{)} \\ &= a_1' X_1 + a_2' X_2 + A(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1' X_1 + a_2' X_2 + AX, \end{aligned}$$

ainsi X est solution de (E) si, et seulement si, $X' = AX + B$, ce qui équivaut d'après la calcul précédent à $a_1' X_1 + a_2' X_2 + AX = AX + B$, autrement dit $a_1' X_1 + a_2' X_2 = B$. Si on prend pour X_1 et X_2 les deux fonctions qui engendrent $\mathscr{S}_H$, c'est-à-dire

$$X_1 = t \mapsto e^{t^2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ et } X_2 = t \mapsto e^{t^2} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix},$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (a_1'(t)\cos(t) + a_2'(t)\sin(t))e^{t^2} & = t\cos(t) \\ (a_1'(t)\sin(t) - a_2'(t)\cos(t))e^{t^2} & = t\sin(t) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a_1'(t)\cos(t) + a_2'(t)\sin(t) & = t\cos(t)e^{-t^2} \\ a_1'(t)\sin(t) - a_2'(t)\cos(t) & = t\sin(t)e^{-t^2} \end{cases} \\ & \textit{(on effectue } L_2 \leftarrow \sin(t)L_2 + \cos(t)L_1\textit{, puis } L_1 \leftarrow L_1 - \cos(t)L_2\textit{)} \\ \iff & \begin{cases} a_2'(t) & = 0 \\ a_1'(t) & = te^{-t^2} \end{cases} \text{ et on choisit } \begin{cases} a_2(t) & = 0 \\ a_1(t) & = -\frac{1}{2}e^{-t^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on peut affirmer que l'application

$$X_0 : t \mapsto -\frac{1}{2}e^{t^2} X_1(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

est une solution du système.

3. On peut donc conclure que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel (E) de départ est

$$\left\{ X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

autrement dit

$$\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) + a_1\cos(t)e^{t^2} + a_2\sin(t)e^{t^2} \\ -\frac{1}{2}\sin(t) + a_1\sin(t)e^{t^2} - a_2\cos(t)e^{t^2} \end{pmatrix} \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Une correction du problème 18.19

énoncé

E3A PSI 2019

Partie I

1. (a) Si f est une solution de (E_1), alors par définition d'une solution d'équation différentielle d'ordre 3, f est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(3)} = f$.
   Donc en particulier f' est de classe $\mathscr{C}^2$ et f'' de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et a fortiori f, f' et f'' sont dérivables sur $\mathbb{R}$, d'où $g = f + f' + f''$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$g' = f' + f'' + f^{(3)} = f' + f'' + f.$$

   Ainsi g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du premier ordre (E_2) : $y' = y$.

   (b) La résolution de (E_2) est classique : l'ensemble de ses solutions est

$$\mathrm{Vect}(\exp) = \{\lambda \exp \mid \lambda \in \mathbb{C}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^t \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

   (c) ➠

   > *On procède dans un premier temps à l'**analyse** de l'équation (E_1), dans laquelle on cherche les formes nécessaires des solutions. Pour cela on suppose qu'une fonction est solution et on étudie les conditions qui lui sont alors imposées.*

   On a vu que si f est une solution de l'équation (E_1), alors $g = f + f' + f''$ est solution de (E_2). Donc, d'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \lambda \mathrm{e}^t.$$

   C'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) + f'(t) + f(t) = \lambda \mathrm{e}^t.$$

   Autrement dit, f est solution de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda \mathrm{e}^t$, équation différentielle linéaire du second ordre, dont le membre de droite est de forme exponentielle.

- Son équation homogène associée est (H) : $y'' + y' + y = 0$, équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants qui a pour équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$, de solutions classiques j et j^2.
  On en déduit que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle (H) est

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{\mathrm{H}} &= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \alpha e^{\mathrm{j}t} + \beta e^{\mathrm{j}^2 t} \end{array} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{\mathrm{j}t}, t \mapsto e^{\mathrm{j}^2 t} \right).\end{aligned}$$

- On cherche une solution particulière sous la forme $f_p : t \mapsto \mu e^t$, où $\mu \in \mathbb{C}$.
  L'application f_p est bien sûr de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et vérifie (E_λ) si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu e^t + \mu e^t + \mu e^t = \lambda e^t \Longleftrightarrow 3\mu = \lambda \Longleftrightarrow \mu = \frac{\lambda}{3}.$$

- Donc si f est solution de (E_1), alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \alpha e^{\mathrm{j}t} + \beta e^{\mathrm{j}^2 t} + \frac{\lambda}{3} e^t.$$

> *Voici venu le temps de la **synthèse**, étape dans laquelle on cherche, parmi les formes nécessaires des solutions obtenues lors de l'analyse, lesquelles sont vraiment solutions.*

Réciproquement, soit f une fonction de la forme ci-dessus, alors f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f^{(3)}(t) = \mathrm{j}^3 \alpha e^{\mathrm{j}t} + \mathrm{j}^6 \beta e^{\mathrm{j}^2 t} + \frac{\lambda}{3} e^t = f(t) \ \textit{(car } \mathrm{j}^3 = 1\textit{)}.$$

donc f est solution de (E_1).

On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_1 &= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \alpha e^{\mathrm{j}t} + \beta e^{\mathrm{j}^2 t} + \frac{\lambda}{3} e^t \end{array} \mid (\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{\mathrm{j}t}, t \mapsto e^{\mathrm{j}^2 t}, t \mapsto e^t \right).\end{aligned}$$

2. (a) Un bref calcul de déterminant donne le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1),$$

dont les racines sont 1, j et j^2.

Cela permet de répondre à la question de la diagonalisation de A

- le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ d'après le critère de diagonalisation ;
- le polynôme caractéristique de A est scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}$ (en effet $j \neq j^2$ vu que $j \neq 0$ et $j \neq 1$), donc A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

(b) La matrice A est donc diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

La résolution *(que je ne détaille pas)* des systèmes homogènes de matrices respectives $(A - jI_3)X$, $(A - j^2I_3)$ et $(A - I_3)$, permet d'obtenir :

$$\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right),$$

$$\operatorname{Ker}(A - jI_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right),$$

$$\operatorname{Ker}(A - j^2I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j^4\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right),$$

ce dont on déduit que

$$A = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & j & 0\\0 & 0 & j^2\end{pmatrix}P^{-1}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & j & j^2\\1 & j^2 & j\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(S) : X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X\\ &\iff (P^{-1}X)' = DP^{-1}X \ \textit{(car } P^{-1} \textit{ est constante)}\\ &\iff \begin{cases} Y = P^{-1}X \\ Y' = DY \end{cases}\end{aligned}$$

En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, on obtient

$$Y' = DY \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = jy_2 \\ y_3' = j^2 y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \exists\,(\lambda_1, \dots, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3,\ \ Y = t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{jt} \\ \lambda_3 e^{j^2 t} \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure, en remarquant que $Y = P^{-1}X$ équivaut à $X = PY$, que

$$X' = AX \Longleftrightarrow \exists\,(\lambda_1, \dots, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3,\ \ X = PY = t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{jt} + \lambda_3 e^{j^2 t} \\ \lambda_1 e^t + j\lambda_2 e^{jt} + j^2\lambda_3 e^{j^2 t} \\ \lambda_1 e^t + j^2\lambda_2 e^{jt} + j\lambda_3 e^{j^2 t} \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Posons $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$.

Alors X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puisque toutes ses composantes le sont, et $X' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ f^{(3)} \end{pmatrix}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E_1) &\Longleftrightarrow f^{(3)} = f \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} f' &= f' \\ f'' &= f'' \\ f^{(3)} &= f \end{cases} \Longleftrightarrow X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X, \end{aligned}$$

donc f est solution de (E_1) si et seulement si $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$ est solution de (S).

Or nous avons déterminé les solutions de (S) dans la question précédente, dont on déduit que f est solution de (E_1) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in$

$\mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{jt} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} + \beta e^{j^2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j^4 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que (en identifiant coefficient par coefficient) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(t) & = & \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \gamma e^t \\ f'(t) & = & \alpha j e^{jt} + \beta j^2 e^{j^2 t} + \gamma e^t \\ f''(t) & = & \alpha j^2 e^{jt} + \beta j^4 e^{j^2 t} + \gamma e^t \end{cases}$$

Les deux dernières égalités sont conséquence de la première. Donc, en conclusion :

$$f \text{ est solution de } (\mathrm{E}_1) \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \gamma e^t,$$

et l'on retrouve bien la description des solutions donnée dans la question 1.(c).

3. (a) Soit $x > 0$,

$$\frac{\left| \dfrac{x^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \right|}{\left| \dfrac{x^{3n}}{(3n)!} \right|} = \frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}} \frac{(3n)!}{(3n+3)!} = \frac{|x|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{|x|^3}{27 n^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

donc d'après la règle de D'Alembert, la série $\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que le rayon de convergence demandé est $+\infty$.

(b) L'application φ est une somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de convergence, c'est-à-dire $\mathbb{R}$.

(c) Une somme de série entière est dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (3n) \frac{x^{3n-1}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n) \frac{x^{3n-1}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}, \qquad (18.4)$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n-1) \frac{x^{3n-2}}{(3n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!},$$

et enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(3)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n-2) \frac{x^{3n-3}}{(3n-2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} \overset{[n'=n-1]}{=} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{3n'}}{(3n')!},$$

c'est-à-dire $\varphi^{(3)} = \varphi$.
On en déduit par une récurrence que je ne détaille pas que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} & \text{si } k \equiv 0 \bmod 3, \\ \varphi'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} & \text{si } k \equiv 1 \bmod 3, \\ \varphi''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} & \text{si } k \equiv 2 \bmod 3. \end{cases}$$

(d) -i)- On sait que j est racine de $1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$, donc $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$, donc il est facile de vérifier que $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est solution de ce système.
Réciproquement, la matrice de ce système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j}^4 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible *(on pourrait invoquer la question 2b pour le justifier)* car son déterminant est le déterminant de Vandermonde $V_3(1, j, j^2)$ qui est non nul puisque 1, j et j^2 sont deux à deux distincts. par conséquent ce système est de Cramer, autrement dit il possède une unique solution, qui est donc $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

-ii)- D'après la question précédente, $\varphi^{(3)} = \varphi$. On en déduit que φ est solution de (E_1) ; d'après la question 1.(c), il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \alpha e^{jx} + \beta e^{j^2 x} + \gamma e^x.$$

En dérivant l'égalité ci-dessus, et en l'évaluant en 0, on a :

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi(0) & = \alpha + \beta + \gamma \\ \varphi'(0) & = \alpha j + \beta j^2 + \gamma \\ \varphi''(0) & = \alpha j^2 + \beta j^4 + \gamma \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \varphi(0) & = \alpha + \beta + \gamma, \\ \varphi'(0) & = \alpha j + \beta j^2 + \gamma, \\ \varphi''(0) & = \alpha j^2 + \beta j + \gamma, \end{array}\right. \tag{18.5}$$

Mais d'autre part, en examinant les termes constants des développements en série entière en 0 de φ, φ' et φ'' explicités dans la question précédente, on a

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi(0) & = & 1, \\ \varphi'(0) & = & 0, \\ \varphi''(0) & = & 0. \end{array}\right. \tag{18.6}$$

En combinant (18.5) et (18.6), on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha + \beta + \gamma & = & 1, \\ \alpha j + \beta j^2 + \gamma & = & 0, \\ \alpha j^2 + \beta j + \gamma & = & 0, \end{array}\right.$$

qui d'après la question précédente a pour unique solution $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Ainsi, sachant que $j^2 = \bar{j}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}}{3} = \frac{e^x + e^{jx} + e^{\bar{j}x}}{3}$$
$$= \frac{e^x + e^{jx} + \overline{e^{jx}}}{3} = \frac{e^x + 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}\left(e^{jx}\right)}{3}.$$

Enfin comme $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a pour tout réel x,

$$\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\right) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),$$

ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right).$$