> *Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et pour tout entier n_0, on note $[\![n_0\ ;+\infty[\![$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à n_0.*

1. Généralités sur les suites réelles

Définition 1.1

Soit E un ensemble, on appelle **suite d'éléments de** E toute application u de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{K}$, de la forme $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathrm{E} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n. \end{array}$

On note alors cette suite sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'il ne faut pas confondre avec l'élément u_n de E, qui est appelé **terme général** de la suite (u_n).

On note $\mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de E.

Remarques 1.1

(1) On remarquera qu'à la notation générale $u(n)$ est préférée la notation u_n liée au fait que les antécédents sont des entiers.
On peut aussi voir une suite comme une liste infinie d'éléments de E numérotés :

$$(u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots)$$

(2) Parfois l'ensemble de départ est une partie $[\![n_0\ ;+\infty[\![$ de $\mathbb{N}$, mais il suffit de compléter en donnant la valeur 0 aux éléments $u_0, \ldots, u_{n_0-1}$.

(3) Lorsque E est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on parle de suite **numérique**.

(4) Définir une suite consiste à permettre le calcul de tous ses termes, autrement dit le calcul de u_n pour un n donné. Il y a trois méthodes :
- la définition **explicite**, par une formule comme $u_n = \frac{1}{n^2-1}$, donnant u_n en fonction de n ;
- la définition **implicite**, comme dans

  « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n l'unique racine strictement positive du polynôme $x^n + nx - 1$ » ;
- **par récurrence**, on donne chaque terme en fonction d'un ou plusieurs termes précédents, comme dans
  - « pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$, $u_p = 3u_{p-1} - 2u_{p-2} + u_{p-3}$ »,
  - ou « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Dans ce dernier cas, on dit que f est **l'itératrice** de la suite.

Exercice 1.1.

1. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $a_0 = -1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $na_n + 2a_{n-1} = 0$.
   Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de n.
2. Une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)b_{n+1} + 2b_{n-1} = 0$.
   Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de b_n en fonction de n.

Définition 1.2 – « À partir d'un certain rang »

Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une certaine propriété **à partir d'un certain rang** signifie qu'il existe un entier n_0 tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ (c'est la suite initiale privée de ses premiers termes) vérifie cette propriété.

2. Suites récurrentes de référence

Suite arithmétique : on dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est arithmétique lorsqu'il existe $r \in \mathbb{C}$ (indépendant de n) qui vérifie $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
Alors pour tous entiers n et p supérieurs à n_0, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Suite géométrique : on dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est géométrique lorsqu'il existe $q \in \mathbb{C}$ (indépendant de n) qui vérifie $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
Alors pour tous entiers n et p supérieurs à n_0, $u_n = q^{n-p}u_p$.

Suite arithmético-géométrique : on dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est arithmético-géométrique lorsqu'il existe $a \in \mathbb{C} - \{0,1\}$, $b \in \mathbb{C}^*$ (indépendants de n) qui vérifient $u_{n+1} = au_n + b$ tout entier $n \geqslant n_0$.

(1) On appelle **point fixe** de la suite le réel α qui vérifie $\alpha = a\alpha + b$,

(2) la suite de terme général $(u_n - \alpha)$ est alors une suite géométrique de raison a, ce dont on déduit que pour tous entiers n et p supérieurs à n_0,

$$u_n = a^{n-p}(u_p - \alpha) + \alpha.$$

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 : on dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'il existe $(a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ (indépendants de n) qui vérifient, pour tout $n\geqslant n_0$, $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$.

(1) On résout l'équation (E) : $r^2-ar-b=0$, appelée **équation caractéristique**,

(2) on en déduit :

- si (E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors il existe λ et μ dans C qui vérifient pour tout entier $n\geqslant n_0$,

$$u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n\,;$$

- si (E) admet une solution double r alors il existe λ et μ dans C qui vérifient pour tout $n\geqslant n_0$,

$$u_n=(\lambda n+\mu)r^n\,;$$

- si a, b et les u_n sont réels et si (E) admet deux solutions complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ (avec $r\in\,]0;+\infty[$), alors il existe λ et μ réels qui vérifient pour tout $n\geqslant n_0$,

$$u_n=r^n\big(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)\big)\,;$$

et dans les trois cas λ et μ se calculent grâce aux valeurs de deux termes de la suite (en général les deux premiers).

Exercice 1.2. On pose $u_0=1$, $u_1=2$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}^2}{u_n}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer pour tout $n\in\mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n en s'intéressant à $\ln(u_n)$.
3. *Autre méthode :* calculer u_2,u_3,u_4, et conjecturer une formule donnant l'expression générale de u_n en fonction de n, puis démontrer que cette expression est valable pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3. Limite d'une suite

Définition 1.3 – Limite finie ou infinie d'une suite

- Dire que la suite réelle (*resp.* complexe) (u_n) **admet pour limite** le nombre ℓ signifie que tout intervalle ouvert (*resp.* tout disque ouvert) contenant ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, autrement dit
$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant n_0,\ \ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
- Dire que la suite réelle (u_n) **admet pour limite** $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) signifie que tout intervalle ouvert d'extrémité $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) contient tous les u_n à partir d'un certain rang, autrement dit
$$\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant n_0,\ \ u_n > \mathrm{A}\ \ (\textit{resp. } u_n < \mathrm{A}).$$

Remarque 1.2 – Inégalités strictes ou larges?
Une fois n'est pas coutume, le caractère strict ou large des inégalités dans les définitions ci-dessus n'a pas d'importance.

Proposition 1.1 – Unicité de la limite

$\boxed{\text{Si}}$ (u_n) admet une limite $\boxed{\text{alors}}$ cette limite est unique.

Proposition 1.2 – Limite finie d'une suite complexe

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \ell \iff \begin{cases} \mathbb{R}\mathrm{e}(u_n) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{e}(\ell), \\ \mathrm{Im}(u_n) \longrightarrow \mathrm{Im}(\ell). \end{cases}$

Définition 1.4 – convergence et divergence d'une suite

- Une suite est **convergente** lorsqu'elle admet une **limite finie**, que l'on note alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u_n$.
- Une suite est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

Remarques 1.3 – Erreurs courantes :

(1) diverger ne signifie pas « tendre vers l'infini »! Par exemple la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente mais reste bornée.

(2) On parle de convergence dans le cas où une suite tend vers une limite finie, mais il est incorrect d'utiliser ce mot pour une fonction qui tend vers une limite finie.

Exercice 1.3 – Un grand classique : le lemme de Cesaro.
Montrer que si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite des moyennes de Cesaro $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge aussi vers la même limite. *(On pourra commencer par le cas d'une limite nulle.)* La réciproque est-elle vraie ?

Proposition 1.3 – Deux caractérisations d'une suite convergente :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1).$$

4. Conséquences de la convergence

Définition 1.5 – Suite majorée, minorée, bornée

Dire que la suite **réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- **majorée** (*resp.* **minorée**) signifie qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall n \geqslant n_0,\ \ u_n \leqslant \mathrm{A}\ \ (\textit{resp.}\ u_n \geqslant \mathrm{A}),$$

- **bornée** signifie qu'elle est à la fois majorée et minorée, autrement dit qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall n \geqslant n_0,\ \ |u_n| \leqslant \mathrm{M}$.

Proposition 1.4

Toute suite convergente est bornée.

Proposition 1.5 – Des inégalités sur la limite aux inégalités sur les termes de la suite

(1) $\boxed{\text{Si}}$ $\left|\begin{array}{l} \mapsto (u_n) \text{ converge vers } \ell, \\ \mapsto a < \ell < b, \end{array}\right.$ $\boxed{\text{alors}}$ $\left|\begin{array}{l} \text{à partir d'un certain rang,} \\ \qquad a < u_n < b. \end{array}\right.$

(2) $\boxed{\text{Si}}$ $\lim u_n > 0$, $\boxed{\text{alors}}$ à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.

Proposition 1.6 – Prolongement des inégalités larges (mais pas strictes) à la limite

Si
- (u_n) et (v_n) convergent,
- à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$,

alors $\lim(u_n) \leqslant \lim(v_n)$.

Remarques 1.4

(1) Les **inégalités strictes ne se prolongent pas à la limite**, comme on le constate en prenant $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

(2) En particulier si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant \mathrm{M}$ (*resp.* $u_n \geqslant m$), alors $\lim u_n \leqslant \mathrm{M}$ (*resp.* $\lim u_n \geqslant m$).

5. Opérations sur les limites

Proposition 1.7

De manière générale, la limite d'une combinaison linéaire (*resp.* d'un produit, d'un quotient) de suites qui ont une limite est la combinaison linéaire (*resp.* d'un produit, d'un quotient) de leurs limites, avec les règles de calcul ci-dessous :

$+$	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**??**
ℓ'		$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$			$+\infty$

$\lim(u_n)$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0
$\lim(1/u_n)$	0	$+\infty$	$-\infty$	**??**

$\times$	$-\infty$	$\ell(\neq 0)$	0	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } \ell > 0\,; \\ +\infty & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$	**??**	$-\infty$
$\ell'(\neq 0)$		$\ell \times \ell'$	0	$\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell' > 0\,; \\ -\infty & \text{si } \ell' < 0 \end{cases}$
0			0	**??**
$+\infty$				$+\infty$

Remarque 1.5 – Formes indéterminées
On remarquera les **formes indéterminées** (notées **??**) et celles qui s'y ramènent :

$$(-\infty)+(+\infty),\ \ 0\times\infty,\ \ \frac{1}{0},\ \ \frac{0}{0},\ \ \frac{\infty}{\infty},\ \ 1^{+\infty}=\mathrm{e}^{+\infty\times 0}.$$

Exemple 1.1 – À connaître ! Cas de la forme indéterminée « $1^{+\infty}$ ».

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $\alpha>0$, $\displaystyle\left(1+\frac{x}{n^\alpha}\right)^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha>1,\\ \mathrm{e}^x & \text{si } \alpha=1,\\ +\infty & \text{si } \alpha<1 \text{ et } x>0,\\ 0 & \text{si } \alpha<1 \text{ et } x<0.\end{cases}$

Proposition 1.8 – Composition d'une suite par une fonction

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, I un intervalle dont a est un élément ou une extrémité, f une fonction définie sur I, et (u_n) une suite d'éléments de I.

Si
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a,
- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=b$,

alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers b.

Méthode 1.2 – Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite :

il suffit de trouver des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers une borne $\square$ mais telles que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ ont des limites différentes.

Exemple 1.2 – La fonction cosinus en $+\infty$.
Les suites de terme général $u_n=n2\pi$ et $v_n=\pi+n2\pi$ tendent vers $+\infty$, mais $\cos(u_n)=1\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}1$ et $\cos(v_n)=-1\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}-1$, donc la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Corollaire 1.9 – Propriété de la limite d'une suite récurrente

Si
- $\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=f(u_n)$,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ,
- f est continue en ℓ,

alors $f(\ell)=\ell$.

Exercice 1.4. Montrer que $u_0>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}$ définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et que cette suite ne peut pas converger.

6. Relation de comparaisons des suites

Définition 1.6 – Comparaison locale des suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques, on suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- Dire que u_n est **dominée par** v_n signifie que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée.
  On note alors $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)}$ ou $\boxed{u_n = \mathrm{O}(v_n)}$.
- Dire que u_n est **négligeable devant** v_n signifie que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 0.
  On note alors $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)}$ ou $\boxed{u_n = o(v_n)}$.
- Dire que u_n et v_n sont **équivalents** signifie que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1.
  On note alors $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n}$.

Si on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$, c'est qu'on s'est trompé !

Remarque 1.6 – Équivalence et addition

Une somme de termes n'est pas équivalente à la somme de leurs équivalents !
En revanche, une somme est équivalente à son terme dominant.

Autrement dit, on ne remplace un terme par un équivalent dans une somme, par exemple $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ n'est pas équivalent à $\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1.5. Donner un équivalent de $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$,
(Il est sous-entendu qu'un équivalent de u_n se donne quand n tend vers $+\infty$.)

Proposition 1.10 – Toutes les croissances comparées

Pour tout réel β, et tout $\alpha > 0$,

En $+\infty$:

- $\displaystyle\lim_{\square\to+\infty}\left(\frac{e^{\alpha\square}}{\square^{\beta}}\right) = +\infty$, autrement dit

$$\square^{\beta} \underset{\square\to+\infty}{=} o\left(e^{\alpha\square}\right), \text{ ou encore } e^{-\alpha\square} \underset{\square\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\square^{\beta}}\right).$$

- $\displaystyle\lim_{\square\to+\infty}\left(\frac{\square^{\alpha}}{\ln^{\beta}(\square)}\right) = +\infty$, autrement dit $\ln^{\beta}(\square) \underset{\square\to+\infty}{=} o\left(\square^{\alpha}\right)$.
- a fortiori $\ln^{\beta}(\square) \underset{\square\to+\infty}{=} o\left(e^{\alpha\square}\right)$.

En 0 : $\displaystyle\lim_{\square\to0}\left(\square^{\alpha}\times\ln^{\beta}(|\square|)\right) = 0$, autrement dit $\ln^{\beta}(|\square|) \underset{\square\to0}{=} o\left(\frac{1}{\square^{\alpha}}\right)$.

Exercice 1.6 – L'exponentielle est négligeable devant la factorielle !.

Montrer que pour tout réel x, $x^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

$$\forall\beta\in\mathbb{R},\quad e^{\beta n} = o\left(n!\right).$$

Remarque 1.7 – Pour résumer

Grâce à l'ancienne notation $u_n << v_n$, qui signifiait $u_n = o\left(v_n\right)$, on peut résumer les croissances comparées des suites de référence par, pour tous réels a, b et c strictement positifs,

$$\underbrace{\frac{1}{n!} << e^{-cn} << \frac{1}{n^b} << \frac{1}{\ln^a(n)}}_{\to 0} << 1 << \underbrace{\ln^a(n) << n^b << e^{cn} << n!}_{\to+\infty}$$

Proposition 1.11 – Premières conséquences

(1) $\boxed{\text{Si}}$ $u_n = o(v_n)$ $\boxed{\text{alors}}$ $u_n = O(v_n)$,

(2) $\boxed{\text{si}}$ $u_n \sim v_n$ $\boxed{\text{alors}}$
- $u_n = O(v_n)$,
- et $v_n = O(u_n)$.

(3) $\boxed{\text{Si}}$ $u_n \sim v_n$ $\boxed{\text{alors}}$ à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

7. Théorèmes pour prouver la convergence

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles, et $\ell \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.12 – Principes d'encadrement (ex gendarmes)

(1) Si
- à partir d'un certain rang $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$,
- $\lim v_n = \lim w_n = \ell$,

alors
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- sa limite est ℓ.

(2) Si
- $u_n = \mathrm{O}(v_n)$,
- $\lim(v_n) = 0$,

alors
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- sa limite est 0.

(3) Si
- $u_n - \ell = \mathrm{O}(v_n)$,
- $\lim(v_n) = 0$,

alors
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- sa limite est ℓ.

Méthode 1.3 – Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, :

il suffit de majorer la distance $|u_n - \ell|$ entre u_n et ℓ par le terme général d'une suite qui tend vers 0 !

Exercice 1.7 – (application de la formule de Taylor-Lagrange).

1. Montrer que pour tout réel x *(positif ou négatif !)*, si t est un réel compris entre 0 et x, alors $0 < \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{|x|}$.
2. Montrer que pour tout réel x, la série de terme général $\frac{1}{k!}x^k$ converge et a pour somme e^x.

Méthode 1.4 – Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell$,

il suffit de majorer à partir d'un certain rang $|u_n - \ell|$, par le terme général d'une suite qui tend vers 0.

Exercice 1.8 – Comparaison à une suite géométrique.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, non nulle à partir d'un certain rang.

1. Montrer que s'il existe $\alpha \in [0\,;1[$ tel qu'à partir d'un certain rang $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \alpha$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\alpha^n)$.
2. En déduire sa limite.

Proposition 1.13 – Recherche de la limite avec les équivalents

Si
- $u_n \sim v_n$,
- $\lim(v_n) = \ell$,

alors
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- sa limite est ℓ.

Proposition 1.14 – Divergence par comparaison

Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n$, alors $\begin{cases} \lim(v_n) = +\infty \Rightarrow \lim(u_n) = +\infty, \\ \lim(u_n) = -\infty \Rightarrow \lim(v_n) = -\infty \end{cases}$

8. Conséquence de la monotonie d'une suite réelle

Définition 1.7 – Sens de variation d'une suite réelle

Dire que la suite (u_n) est :

croissante signifie que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.

strictement croissante signifie que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$.

décroissante signifie que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

strictement décroissante signifie que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

constante signifie que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.

stationnaire signifie qu'elle est constante à partir d'un certain rang.

(strictement) monotone signifie qu'elle est (strictement) croissante ou décroissante.

Méthode 1.5 – pour étudier le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- On étudie en général le signe de $u_n - u_{n-1}$, ou $u_{n+1} - u_n$.
- Plus rarement, **et seulement dans le cas où** la suite est strictement positive à partir d'un certain rang, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 (autrement dit on étudie le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$).
- Dans le cas d'une suite récurrente d'itératrice f, on étudie
  - d'une part le signe de $f(\square) - \square$ selon les intervalles où se trouve $\square$,
  - et d'autre part les intervalles où se situent les termes de la suite (ce qui dépend la plupart du temps des variations de f). Il est important de travailler sur les intervalles stables par f.

Remarque 1.8 — Dérivation discrète
La « dérivée discrète » de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite Δu des différences

$$(\Delta u)_n = u_n - u_{n-1} = \frac{u(n)-u(n-1)}{n-(n-1)}.$$

Comme pour les fonctions, le signe de la dérivée discrète donne le sens de variation de la suite, et le théorème fondamental de l'analyse dans lequel $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ se retrouve ici sous la forme $u_n = u_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\Delta u)_k$, l'addition classique étant ici une « intégration discrète ».

Proposition 1.15 — Le théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels croissante (*resp.* décroissante). Alors cette suite admet une limite, finie ou infinie.
Plus précisément :

(1) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (*resp.* minorée), alors elle converge vers la borne supérieure (*resp.* borne inférieure) de l'ensemble de ses valeurs ;

(2) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée (*resp.* minorée), alors elle diverge et tend vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$).

Exercice 1.9 — Suite de l'exercice 1.4.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
Montrer que u_n tend vers $+\infty$.

9. Utilisation des suites extraites

Définition 1.8

On appelle **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 1.16

$\boxed{\text{Si}}$ la suite (u_n) admet une limite, $\boxed{\text{alors}}$ toute suite extraite de (u_n) tend vers cette même limite.

Exercice 1.10. Que dire d'une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{3n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$?

Méthode 1.6 – Pour montrer qu'une suite n'a pas de limite :

il suffit d'en extraire deux sous-suites qui ont des limites différentes.

Exemple 1.3.

La suite $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car

- $(-2)^{2n} = 4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,
- $(-2)^{2n+1} = -2\times 4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Exercice 1.11. Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, autrement dit θ est un réel non multiple de 2π. Montrer que la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite

Proposition 1.17

$\boxed{\text{Si}}$ $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite, $\boxed{\text{alors}}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers cette limite.

10. Suites adjacentes

Définition 1.9

Deux suites réelles sont **adjacentes** lorsque
- l'une est croissante,
- l'autre décroissante,
- la différence des deux tend vers 0.

Proposition 1.18 – Convergence des suites adjacentes

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors

(1) elles convergent vers la même limite ℓ ;

(2) de plus, dans le cas où (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $u_p \leqslant \ell \leqslant v_q$, autrement dit $\frac{u_p+v_q}{2}$ est une valeur approchée de ℓ à $\frac{v_q-u_p}{2}$ près.

Proposition 1.19 – $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Théorème 1.20 – Borne supérieure, borne inférieure

Toute partie non-vide et majorée (*resp.* minorée) A de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant (*resp.* plus grand minorant) que l'on appelle **borne supérieure** (*resp.* **borne inférieure**) de A et notée sup(A) (*resp.* inf(A)).

Remarque 1.9 Lorsque sup(A) est dans A, alors sup(A) est le plus grand élément de A, c'est-à-dire le maximum de A, et on le note max(A).

Le **théorème des bornes atteintes** affirme qu'une fonction f continue sur un segment $[a\,;\,b]$ **est bornée**, d'où l'existence de

$$\sup\big(f([a\,;b])\big) = \sup_{x\in[a;b]}\big(f(x)\big) \text{ et } \inf\big(f([a\,;b])\big) = \inf_{x\in[a;b]}\big(f(x)\big),$$

et atteint ses bornes, autrement dit

$$\sup\big(f([a\,;b])\big) = \max\big(f([a\,;b])\big) \text{ et } \inf\big(f([a\,;b])\big) = \min\big(f([a\,;b])\big).$$

Preuves et solutions

Une correction de l'exercice 1.1

énoncé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = -\frac{2}{n} a_{n-1}$.

*La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire (d'ordre 1), mais elle n'est pas à **coefficients constants** !*
L'élève Chaprot ne fait pas attention à ce « petit détail », et il croit avoir affaire à une suite géométrique.

Méthode 1.7 – Pour obtenir a_n en fonction de n :

il suffit de remarquer que $\forall \square \in \mathbb{N},\ a_{\square+1} = -\frac{2}{\square+1} a_{\square}$, d'où sur le brouillon, on peut partir de a_n et obtenir une formule générale par applications successives de la relation de récurrence

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{n} a_{n-1} = \left(-\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2}{n-1}\right) a_{n-2} \\ &= \left(-\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2}{n-1}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{2}{1}\right) a_0 \\ &= \frac{(-2)\times(-2)\times\cdots\times(-2)}{n\times(n-1)\times\cdots\times 1} \times (-1). \end{aligned}$$

On montre par récurrence *(en général, on se contente de le dire mais on ne le fait pas)* que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = -\frac{(-2)^n}{n!}.$$

Dans ce cas, chaque terme de rang $\square$ est défini en fonction du terme de rang $\square - 2$, ceci nous suggère de séparer l'étude des termes de rang pair de l'étude des termes de rang impair.

2. On montre par récurrence que

- que les coefficients de rang pair sont nuls,

➟ et d'autre part que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
b_{2p+1} &= \frac{2}{2p+1} b_{2p-1} = \frac{2}{2p+1} \times \frac{2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} b_1 \\
&= \frac{2^p}{(2p+1)(2p-1) \times \cdots \times 3} \times 1 \\
&= 2^p \times \frac{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2p+1) \times (2p) \times (2p-1) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2}
\end{aligned}$$

(par une astuce « du belge » multiplicative, on a multiplié numérateur et dénominateur par le produit des entiers pairs qui manquent au dénominateur pour donner $(2p+1)!$)

$$= 2^p \times \frac{2^p \times p!}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p} \times p!}{(2p+1)!} \quad \textit{(bien remarquer que } (2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 4 \times 2 = 2^p \times p!\textit{)}$$

On conclut que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} b_{2p} &= 0, \\ b_{2p+1} &= \dfrac{2^{2p} \times p!}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

Une correction de l'exercice 1.2

énoncé

1. ➟ Les deux premiers termes u_0 et u_1 sont strictement positifs ;

   ➟ supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n et u_{n+1} existent et sont strictement positifs, alors $u_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$ est aussi défini, et strictement positif.

   On a donc prouvé que par une récurrence sur deux termes que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définis (et strictement positifs, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse).

2. On a vu que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs, donc la suite de terme général $v_n = \ln(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$, et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) &= \ln\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right) \\
&= 2\ln\left(u_{n+1}\right) - \ln(u_n) \quad \textit{(par propriété du logarithme)} \\
&= 2v_{n+1} - v_n.
\end{aligned}$$

   Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 **à coefficients constants**, son équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = 0$ qui a pour unique solution 1.

   Le cours nous permet d'en déduire qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\lambda n + \mu) \times 1^n$.

On sait que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, donc $v_0 = 0$ et $v_1 = \ln(2)$, ce dont on déduit que $\mu = 0$ et $\lambda = \ln(2)$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(2) \times n = \ln(2^n)$, donc en prenant l'exponentielle (qui est la bijection réciproque de ln), on conclut que $u_n = 2^n$.

3. Le calcul de u_2, u_3, u_4 nous pousse à conjecturer que u_n soit égal à 2^n. Montrons ce résultat par une récurrence sur deux termes.

> *Une récurrence sur p termes (où $p \in \mathbb{N}^*$) s'utilise pour une propriété $\mathscr{P}$ qui nécessite d'être vraie sur p termes consécutifs pour que le $p+1^e$ terme en hérite.*
> *Ici, on constate que chaque terme de la suite dépend des deux termes précédents, c'est pourquoi on peut légitimement penser qu'il suffit que 2 termes vérifient une propriété pour que le terme suivant la vérifie aussi.*

➟ L'égalité $u_n = 2^n$ est vraie aux rangs $n \in [\![0\,;4]\!]$ (les deux premiers rangs sont suffisants pour la récurrence sur 2 termes).

➟ Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$, alors au rang suivant :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = \frac{(2^{n+1})^2}{2^n} \\ &= 2^{2(n+1)-n} = 2^{n+2}. \end{aligned}$$

➟ On a donc établi grâce à une récurrence sur deux termes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

Une correction de l'exercice 1.3 *énoncé*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers 0, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.

On va revenir à la définition de la convergence : prenons un réel $\varepsilon > 0$, et cherchons un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| < \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$.

➟ On sait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, ainsi pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}
|v_n| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \\
&= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} |u_k| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \quad \textit{(par l'inégalité triangulaire)}
\end{aligned}$$

➟ D'une part le réel $C = \sum_{k=0}^{n_0} |u_k|$ est indépendant de n, autrement dit est une constante par rapport à n.
Et d'autre part, pour tout $k \in [\![n_0+1\,;n]\!]$, $|u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc en additionnant ces inégalités

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| < (n-n_0)\frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient pour tout $n \geqslant n_0$

$$|v_n| < \frac{1}{n+1}C + \frac{n-n_0}{(n+1)}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{n+1}C + \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{(car évidemment } \left|\tfrac{n-n_0}{n+1}\right| < 1\textit{)}.$$

➟ Enfin, comme $\frac{1}{n+1}C \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe aussi un entier n_1 à partir duquel $\left|\frac{1}{n+1}C\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc en notant $N = \max(n_0, n_1)$, on a pour tout $n \geqslant N$,

$$|v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2. Si à présent, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors la suite de terme général $u_n - \ell$ tend vers 0, donc d'après le point précédent $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)$ tend aussi vers 0.

Or

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k-\ell) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\ell \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - \ell,
\end{aligned}$$

donc on obtient bien que $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers ℓ.

3. Enfin, il suffit de prendre $u_n = (-1)^n$ pour constater que :
   - d'une part $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$, et la contraposée de la proposition 1.16 empêche alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de converger ;
   - d'autre part
   $$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$
   donc v_{2n} et v_{2n+1} tendent toutes les deux vers 0, donc on conclut grâce à la proposition 1.17 que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   Ainsi la moyenne de Cesaro peut converger, même si la suite initiale ne converge pas, donc la réciproque est fausse.

Une correction de l'exercice 1.4 *énoncé*

1. On montre par récurrence comme dans le premier exercice que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et strictement positif.
2. On va raisonner par l'absurde : supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

     Ainsi par prolongement des inégalités larges à la limite $\ell \geqslant u_0 > 0$, en particulier $\ell > 0$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$, et f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^*$, donc f est en particulier continue en ℓ, car les fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

     On en déduit (par le corollaire 1.9) que $f(\ell) = \ell$, autrement dit que $\ell + \frac{1}{\ell} = \ell$, donc que $\frac{1}{\ell} = 0$, puis en multipliant par ℓ que $1 = 0$, ce qui est tellement faux qu'un frisson glacé nous parcourt l'échine.

   Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger.

Une correction de l'exercice 1.5 *énoncé*

Rappelons que pour tout réel α,

$$(1+\square)^\alpha \underset{\square\to 0}{=} 1 + \alpha\square + o(\square),$$

donc comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} &= \frac{1}{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} - \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{1}{n}\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1/2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n^2}\right)+o\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 1.6

énoncé

Si $x = 0$ le résultat est direct.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$, l'exercice revient à prouver que

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Première méthode.

- Notons N la partie entière de $|x|$, $\mathrm{N} = \lfloor x \rfloor$. Alors N vérifie $\mathrm{N} \leqslant |x| < \mathrm{N}+1$.
  Ainsi dès que $n \geqslant \mathrm{N}+1$,

$$\begin{aligned}
n! &= 1\times 2\times\cdots\times \mathrm{N}\times(\mathrm{N}+1)\times(\mathrm{N}+2)\times\cdots\times n \\
&\geqslant \underbrace{1\times 2\times\cdots\times \mathrm{N}}\times(\mathrm{N}+1)\times(\mathrm{N}+1)\times\cdots\times(\mathrm{N}+1) \\
&= \mathrm{N}!\times(\mathrm{N}+1)^{n-\mathrm{N}}.
\end{aligned}$$

  Par conséquent

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leqslant \frac{x^n}{\mathrm{N}!\times(\mathrm{N}+1)^{n-\mathrm{N}}} &= \frac{(\mathrm{N}+1)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}\times\left(\frac{|x|}{\mathrm{N}+1}\right)^n \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{|x|}{\mathrm{N}+1}\right)^n\right) \quad \textit{(car } \tfrac{(\mathrm{N}+1)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} \textit{ ne dépend pas de } n\textit{)}.
\end{aligned}$$

- Or par définition de N, on sait que $0 < \frac{|x|}{\mathrm{N}+1} < 1$, donc $\left(\frac{|x|}{\mathrm{N}+1}\right)^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.
  Donc par domination et encadrement (proposition 1.12)

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0, \text{C.Q.F.D.}$$

Deuxième méthode. ➟ Tout d'abord la suite de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ ne s'annule pas, et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

➟ Donc à partir d'un certain rang r, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}$.

> *ceci est vrai pour n'importe quel réel positif à la place de $\frac{1}{2}$, nous choisissons en particulier un réel dans $]0\,;1[$ pour que ses puissances tendent vers 0.*

➟ D'où par récurrence pour tout $n \geqslant r$, $|u_n| \leqslant |u_r| \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}$,

➟ Ainsi $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, ce qui entraîne par domination (proposition 1.12) que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Une correction de l'exercice 1.7

énoncé

1. ➟ Si $x \geqslant 0$, alors $x = |x|$, et par croissance de l'exponentielle, pour tout $t \in [0\,;|x|]$, on a bien $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{|x|}$,

   ➟ Si $x \leqslant 0$, alors pour tout $t \in [x\,;0]$, on a $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^0 = 1$. Mais d'autre part, $|x| \geqslant 0$ donc $1 \leqslant \mathrm{e}^{|x|}$, d'où a fortiori $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{|x|}$.

   ➟ Enfin l'inégalité $0 < \mathrm{e}^t$ est une propriété élémentaire de l'exponentielle.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   > *Montrer que la série de terme général $\frac{1}{k!}x^k$ converge et a pour somme e^x revient, par définition de la convergence d'une série, à montrer que*
   >
   > $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^x.$$

   ➟ Prenons un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel x quelconque.
   On sait que la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur le segment K entre 0 et x (*x peut être inférieur à* 0).
   De plus, d'après la question précédente, pour tout t dans ce segment K,

   $$\left|\exp^{(n+1)}(t)\right| = \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{|x|},$$

   donc toutes les conditions sont remplies (avec $\mathrm{M} = \mathrm{e}^{|x|}$) pour appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange, qui nous donne :

   $$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1},$$

c'est-à-dire

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1},$$

- Montrons que la suite de terme général noté $u_n = \dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ tend vers 0.
  - Tout d'abord la suite de terme général u_n est strictement positive, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

  - Donc à partir d'un certain rang r *(autrement dit pour tout entier $n \geqslant r$)*, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

> *On applique ici la définition d'une suite convergente en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, mais n'importe quelle valeur prise dans $]0\,;\,1[$ fait l'affaire.*

On en déduit, par une récurrence dont je nous passe les détails, que pour tout $n \geqslant r$,

$$|u_n| \leqslant |u_r| \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} = 2^r\,|u_r| \times \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

autrement dit $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, donc par encadrement $u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

- On a donc prouvé que

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k\right| \leqslant u_n,$$

avec $u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, donc, derechef par encadrement on peut conclure que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} e^x,$$

ce qui prouve par définition que la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et admet pour somme e^x.

Une correction de l'exercice 1.8

énoncé

1. Supposons qu'à partir du rang $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \alpha$.

   Alors pour tout $k \geqslant \mathrm{N}$, $\left|\frac{u_{k+1}}{\alpha \times u_k}\right| \leqslant 1$.

   Donc pour tout $n > \mathrm{N}$,

$$\prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \left|\frac{u_{k+1}}{\alpha \times u_k}\right| \leqslant 1.$$

   Mais par un phénomène télescopique qu'on a l'habitude d'utiliser avec les sommes, mais qui marche aussi avec les produits :

$$\prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \left|\frac{u_{k+1}}{\alpha \times u_k}\right| = \left|\prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{\alpha \times u_k}\right| = \left|\frac{1}{\alpha^{n-\mathrm{N}}} \prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{1}{\alpha^{n-\mathrm{N}}} \times \frac{u_n}{u_\mathrm{N}}\right|$$
$$= \left|\frac{\alpha^\mathrm{N}}{u_\mathrm{N}}\right| \times \left|\frac{u_n}{\alpha^n}\right|.$$

   Ainsi

$$\left|\frac{\alpha^\mathrm{N}}{u_\mathrm{N}}\right| \times \left|\frac{u_n}{\alpha^n}\right| \leqslant 1.$$

   On en déduit que pour tout $n > \mathrm{N}$, en notant $\mathrm{M} = \left|\frac{u_\mathrm{N}}{\alpha^\mathrm{N}}\right|$ qui est bien une quantité constante par rapport à n,

$$|u_n| \leqslant \mathrm{M}\,\alpha^n,$$

   ce qui prouve que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\alpha^n)$.

2. Comme $\alpha \in [0\,;\,1[$, on sait que $\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui entraîne par la relation de domination $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\alpha^n)$ que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Une preuve de la proposition 1.15

énoncé

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels croissante.

1. Supposons que cette suite est majorée. Alors l'ensemble $\mathscr{S} = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite est un ensemble de réels non vide et majoré, donc par théorème cet ensemble possède une borne supérieure que l'on note ℓ.

Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Par définition, cela revient à prouver que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$.
On remarque que l'inégalité $|u_n - \ell| < \varepsilon$ équivaut à $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.
Par définition, la borne supérieure ℓ est le plus petit des majorants de l'ensemble $\mathscr{S}$, donc $\ell - \varepsilon$ étant inférieur à ℓ, ce n'est plus un majorant de $\mathscr{S}$, donc il existe un élément de $\mathscr{S}$ entre $\ell - \varepsilon$ et ℓ, autrement dit

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \ell.$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$, on a $u_{n_0} \leqslant u_n$.
D'autre part, puisque ℓ est un majorant de la suite, $u_n \leqslant \ell$.
On obtient donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant n_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell < \ell + \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration dans le cas où la suite est majorée.

2. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ce qui par définition revient à montrer que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant \mathrm{A}.$$

Soit A un réel, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, donc on peut trouver un terme de la suite supérieur à A, autrement dit

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0} \geqslant \mathrm{A}.$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant \mathrm{A},$$

ce qui achève la démonstration dans le cas où la suite n'est pas majorée.

Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on adapte le raisonnement ci-dessus.

Une correction de l'exercice 1.9 *énoncé*

On a vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie, croissante, et ne converge pas.
Donc d'après le théorème de la limite monotone (proposition 1.15), elle n'a pas d'autre comportement possible que de tendre vers $+\infty$.

Une preuve de la proposition 1.16 *énoncé*

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique qui tend vers L, et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Prenons un intervalle ouvert I qui forme un voisinage de L, c'est-à-dire de la forme

- $\mathrm{I} =]\mathrm{L}-\varepsilon\,;\,\mathrm{L}+\varepsilon[$ (où $\varepsilon > 0$) si L est un réel,
- $\mathrm{I} =]-\infty\,;\,\mathrm{A}[$ (où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$) si $\mathrm{L} = -\infty$,
- ou $\mathrm{I} =]\mathrm{A}\,;\,+\infty[$ (où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$) si $\mathrm{L} = +\infty$,

et montrons qu'à partir d'un certain rang, $u_{\varphi(n)} \in \mathrm{I}$.
Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{L}$, on sait qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in \mathrm{I}$.
Or par définition d'une suite extraite, l'application φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, donc on montre par récurrence ci-dessous que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

> *En effet, $\varphi(0)\in\mathbb{N}$, donc $\varphi(0)\geqslant 0$, puis pour un $n\in\mathbb{N}$ quelconque, si $\varphi(n)\geqslant n$, alors par stricte croissance de φ, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, donc comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)+1 \geqslant n+1$,* C.Q.F.D.

Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, a fortiori $\varphi(n)\geqslant n_0$, donc $v_n = u_{\varphi(n)} \in \mathrm{I}$, ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L.

Une correction de l'exercice 1.10 *énoncé*

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors par le théorème de la limite monotone (proposition 1.15), elle a forcément une limite L (qui est soit un réel, soit $+\infty$).
Mais alors, comme toute suite extraite, $\left(u_{3n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers L.
Or on sait que $u_{3n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$, donc par unicité de la limite, $\mathrm{L} = 3$.
On peut donc conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et admet pour limite 3.

Une correction de l'exercice 1.11 *énoncé*

Prenons un réel θ non multiple de 2π, et supposons que la suite de terme général $u_n = \cos(n\theta)$ converge vers un réel ℓ.

- Alors d'une part

$$u_{2n} = \cos(2n\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$
$$\text{et } u_{2n} = \cos(2n\theta) = 2\cos(n\theta)^2 - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ell^2 - 1$$

  donc $\ell = 2\ell^2 - 1$, donc en particulier $\ell \neq 0$.

- Mais d'autre part,

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) &= u_{n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell, \\ \text{et } \cos((n-1)\theta) &= u_{n-1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell, \\ \text{donc } \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) &\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 2\ell. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) &= 2\cos(n\theta)\cos(\theta) \\ &= 2u_n \cos(\theta) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 2\ell\cos(\theta) \end{aligned}$$

donc, par unicité de la limite $2\ell\cos(\theta) = 2\ell$, et comme on a vu que $\ell \neq 0$, on en déduit que $\cos(\theta) = 1$, ce qui contredit que θ est un réel non multiple de 2π.