Dans tout le document, sauf mention expresse, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est un entier strictement positif.

1. Espace et sous-espace vectoriels, famille de vecteurs, somme de sous-espaces vectoriels

1.1. Espace vectoriel

Définition 4.1

Un ensemble E est un $\mathbb{K}-$**espace vectoriel** lorsque

(1) E est non vide,

(2) il existe une **addition** $\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{E}^2 & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}\right.$:

- (i) associative : $\forall (x,y,z)\in \mathrm{E}^3,\ \ x+(y+z)=(x+y)+z \overset{\text{def}}{=} x+y+z$,
- (ii) commutative : $\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2,\ \ x+y=y+x$,
- (iii) avec un élément neutre 0_E qui vérifie

$$\forall x\in \mathrm{E},\ \ x+0_\mathrm{E}=0_\mathrm{E}+x=x,$$

- (iv) telle que tout $x\in\mathrm{E}$ a un opposé $(-x)\in\mathrm{E}$ pour lequel

$$x+(-x)=0_\mathrm{E}$$

(3) il existe une **multiplication externe** $\left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{K},\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\, x \end{array}\right.$ qui permet de multiplier les vecteurs x de E par les scalaires λ de $\mathbb{K}$ avec les propriétés suivantes :

- (i) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\quad \forall (x,y)\in\mathrm{E}^2,\quad \lambda\,(x+y)=\lambda\,x+\lambda\,y$,
- (ii) $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\quad \forall x\in\mathrm{E},\quad (\lambda+\mu)\,x=\lambda\,x+\mu\,x$,
- (iii) $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\quad \forall x\in\mathrm{E},\quad \lambda\,(\mu\,x)=\mu\,(\lambda\,x)=(\lambda\mu)\,x$,
- (iv) $\forall x\in\mathrm{E},\quad 1x=x$

Remarque 4.1 – Pour quoi est fait un espace vectoriel ?
Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E dont la structure est destinée à faire des **combinaisons linéaires**. Autrement dit, avec

- une liste $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E, que l'on appelle **vecteurs**,
- et une liste $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$, appelés **scalaires**,

on fabrique la **combinaison linéaire des** x_i **avec les coefficients** λ_i, c'est-à-dire

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n,\ \text{ou plus savamment } \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k,$$

qui est encore un **vecteur** de E.

Dans toute la suite, la lettre E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque.

Définition 4.2 – Sous-espace vectoriel

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

- F est non vide (F *doit notamment contenir* 0_{E}),
- F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire :
$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \ \forall(x,y)\in\mathrm{F}^2,\ \ \lambda x+\mu y\in\mathrm{F}.$$

Exercice 4.1.
On note $\mathscr{D}^2(]0\,;+\infty[)$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $]0\,;+\infty[$.
Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ ci-dessous est un sous-espace-vectoriel de $\mathscr{D}^2(]0\,;+\infty[)$:

$$\mathscr{E}=\left\{f\in\mathscr{D}^2(]0\,;+\infty[)\mid \forall x>0,\ \ x^2f''(x)+4xf'(x)+2f(x)=0\right\}.$$

Théorème 4.1 – Pour ne jamais utiliser la définition 4.1

Un sous-espace vectoriel de E, muni des opérations de E, a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Méthode 4.1 – Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel :
il suffit de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un autre espace vectoriel.

1.2. Famille libre, famille liée

Définition 4.3

Une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est **libre** lorsque

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_{\mathrm{E}} \right] \Rightarrow [\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0].$$

- Une famille est dite **liée** lorsqu' elle n'est pas libre.
- Une famille **infinie** (mais dénombrable) de vecteurs est libre lorsque toutes ses sous-familles **finies** sont libres.

Remarque 4.2 – Explication : la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre lorsqu'**aucune** combinaison linéaire des x_i n'est nulle, hormis celle où tous les coefficients sont nuls.

Méthode 4.2 – Pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est libre :

Il suffit de
- *prendre une liste quelconque $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires,*
- *supposer que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_{\mathrm{E}}$,*
- *et prouver alors que chacun des scalaires λ_i est nul.*

Exercice 4.2 – (*). Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_k : x \mapsto \cos(kx)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

Proposition 4.2

(1) Une famille est liée si, et seulement si l'un (au moins) de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

(2) Si une famille est formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, alors elle est libre.

1.3. Sous-espace engendré, famille génératrice

Définition 4.4 – sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit $\mathscr{A}$ une partie de E.
Un ensemble est noté $\mathrm{Vect}(\mathscr{A})$ et appelé **sous-espace vectoriel engendré par** $\mathscr{A}$ lorsque c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathscr{A}$.

Proposition 4.3 – Caractérisation du sous-espace vectoriel engendré

$\boxed{\text{Si}}$ $\mathscr{A}$ est une famille de vecteurs de E, que l'on note $\mathscr{A} = (x_i)_{i\in\mathrm{I}}$, $\boxed{\text{alors}}$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathscr{A})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{A}$.
En particulier, $\boxed{\text{si}}$ $\mathscr{A} = (x_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]} = (x_1,\ldots,x_n)$ est une famille finie de vecteurs de E, $\boxed{\text{alors}}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(x_1,\ldots,x_n) &= \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \;\middle|\; (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\right\}\\ &= \left\{y\in\mathrm{E} \;\middle|\; \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\;\; y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right\}.\end{aligned}$$

Définition 4.5 – Famille génératrice

La famille $\mathscr{S} = (x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est **génératrice** d'un **sous-espace vectoriel** F de E lorsque $\mathrm{Vect}(\mathscr{S}) = \mathrm{F}$, ce qui équivaut à la double-inclusion suivante :

- $\mathrm{Vect}(\mathscr{S}) \subset \mathrm{F}$ *(pour cela il suffit que $\mathscr{S} \subset \mathrm{F}$)*,
- $\mathrm{F} \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{S})$ *(tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{S}$)*.

Exercice 4.3.
Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{M}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera une base ainsi que la dimension.

Proposition 4.4 – Vecteur redondant

(1) $\boxed{\text{Si}}$ $y \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ $\boxed{\text{alors}}$ $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

(2) $\boxed{\text{Si}}$ $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre, $\boxed{\text{alors}}$

$$(x_1, \dots, x_n, y) \text{ est liée si et seulement si } y \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Méthode 4.3 – Pour prouver que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, :

il suffit de prouver que $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est libre, puis que x_n n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_{n-1}$.

1.4. Base d'un espace vectoriel

Définition 4.6

Une famille de vecteurs est appelée **base de** E, lorsqu'elle est à la fois

- libre,
- et génératrice de E.

Proposition 4.5 – Caractérisation d'une base

Soit $\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de **de** E.
La famille $\mathscr{B}$ **de** E est une base de E $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ tout vecteur x de E se décompose **de manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$.

Dans ce cas, les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelées **coordonnées** du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$.

2. Applications linéaires

2.1. Définitions, premières propriétés

Définition 4.7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application u de E dans F est appelée **application linéaire** lorsque l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images :

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2,\ \ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \ u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y).$$

Remarque 4.3 – Généralisation de la linéarité
On montre par récurrence sur n que si u est linéaire, alors pour toutes familles $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs de E et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ de scalaires :

$$u\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u(x_k).$$

Définition 4.8 – Vocabulaire et notations

L'ensemble des applications linéaires de E dans F se note $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans l'ensemble des scalaires $\mathbb{K}$.
L'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est aussi noté E^*.

Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E lui-même.
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Un isomorphisme de E sur F est une application linéaire bijective de E sur F.

Un automorphisme de E est un isomorphisme de E sur E lui-même.
On note $\mathrm{G}l(\mathrm{E})$ l'ensemble des automorphismes de E, cet ensemble muni de la composition des applications a une structure de groupe.

Exercice 4.4 – Oral Mines-Telecom.
Montrer que $z\mapsto iz+(1-i)\overline{z}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Proposition 4.6 – Caractérisation d'une application linéaire sur une base

Si
- $(e_i)_{i\in I}$ est **une base** de E,
- $(y_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F,

alors il existe une unique application linéaire u de E dans F qui vérifie pour tout $i \in I$, $u(e_i) = y_i$.

Méthode 4.4 – Pour montrer que deux applications linéaires sont égales

autrement dit pour montrer que que : $\forall x \in E,\ u(x) = v(x)$, il suffit :

- *de trouver une base $\mathscr{B}$ de E sur laquelle : $\forall e \in \mathscr{B},\ u(e) = v(e)$;*
- *en dimension finie, de montrer qu'elles ont la même matrice dans une base.*

Exercice 4.5. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Supposons qu'il existe $e \in E$ tel que $\left(e, f(e), \dots, f^{n-1}(e)\right)$ est une base de E.

Montrer qu'il existe une liste $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de réels tels que $f^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

Proposition 4.7 – Puissances d'un endomorphisme, polynômes d'endomorphismes

- La composée de deux applications linéaires est encore linéaire, en particulier $\mathscr{L}(E)$ est stable par composition.
- Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u^n = \begin{cases} \mathrm{id}_E, & \text{si } n = 0, \\ u \circ u^{n-1} = u^{n-1} \circ u, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, on pose

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k = a_0 \,\mathrm{id}_E + a_1 u + \dots + a_n u^n.$$

2.2. Noyau et image

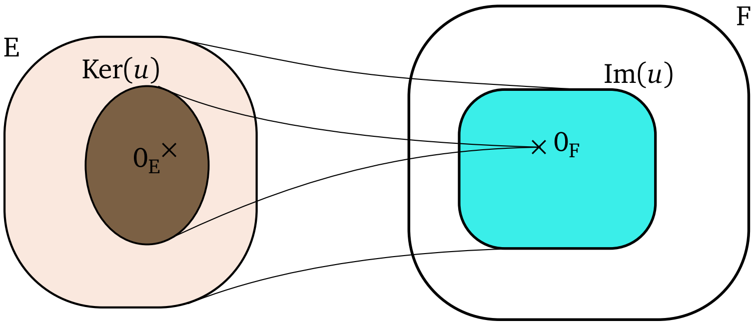
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Définition 4.9

On appelle **noyau de** u la partie de E formée des vecteurs d'image nulle par u : $$\mathrm{Ker}(u) = u^{-1}\{0_\mathrm{F}\} = \left\{ x \in \mathrm{E} \mid u(x) = 0_\mathrm{F} \right\}.$$

On appelle **image de** u la partie de F formée des images par u :

$$\mathrm{Im}(u) = u(\mathrm{E}) = \{u(x) \mid x \in \mathrm{E}\} = \left\{y \in \mathrm{F} \mid \exists x \in \mathrm{E},\ \ u(x) = y\right\}.$$



Méthode 4.6

Montrer que $y \in \mathrm{Im}(u)$ revient à montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(x)$, ce qui revient à l'écrire sous la forme $y = u(\square)$ avec $\square \in \mathrm{E}$.

Proposition 4.8 – Le noyau et l'image sont des sous-espaces vectoriels

L'ensemble $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E,
tandis que $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 4.6 – Quelques questions très classiques !.
Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

1. Montrer les inclusions $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$.
2. Montrer que $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
3. Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathrm{G}$, montrer que si $v \circ u = u \circ v$, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Exercice 4.7 – Oral CCINP. Soient $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(v \circ u) \iff \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_\mathrm{E}\}$.

Méthode 4.8 – Pour trouver le noyau d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$

il suffit de résoudre dans E l'équation $u(x) = 0_F$.

Exercice 4.8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n)$ une liste de n nombres complexes deux à deux distincts, et $D = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$.
Montrer que $M \mapsto D \times M - M \times D$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et donner son noyau.

Proposition 4.9 – Lien entre noyau et injectivité, image et surjectivité

(1) u est injective $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

(2) u est surjective $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ $\mathrm{Im}(u) = F$.

Proposition 4.10 – Image d'un espace engendré

(1) $u\Big(\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}\Big) = \mathrm{Vect}\,\big((u(x_i))_{i\in I}\big)$;

(2) En particulier, $u\Big(\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)\Big) = \mathrm{Vect}\big(u(x_1), \ldots, u(x_n)\big)$;

(3) $\boxed{\text{si}}$ $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille génératrice de E,
$\boxed{\text{alors}}$ $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,\big(u(e_1), \ldots, u(e_p)\big)$.

Exercice 4.9.
Montrer que l'application $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ surjectif.

Proposition 4.11 – Images des familles libres par une application linéaire

Soit $\mathscr{S}$ une famille de vecteurs de E et $u \in \mathscr{L}(E, F)$:

(1) $\boxed{\text{si}}$ $\mathscr{S}$ est une famille liée, $\boxed{\text{alors}}$ $u(\mathscr{S})$ est une famille liée ;

(2) u est injective $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ l'image de toute famille libre de E, est encore une famille libre de F.

Proposition 4.12 – Une caractérisation d'un isomorphisme

$u \in \mathscr{L}(E, F)$ est un isomorphisme $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ l'image d'une base de E est encore une base de F.

3. Espaces vectoriels de dimension finie

3.1. Dimension, bases canoniques

Définition 4.10 – Notion de dimension

On dit que E est de dimension finie lorsqu'il possède une famille génératrice finie. Dans ce cas,

- toutes les bases de E ont le même cardinal,
- ce cardinal est appelé **dimension** de E et noté $\dim(\mathrm{E})$.
- On convient de poser $\dim(\mathrm{E}) = 0$ lorsque $\mathrm{E} = \{0_\mathrm{E}\}$.

Proposition 4.13 – Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors pour toute famille libre $\mathscr{F}$ de vecteurs de E, et toute famille génératrice $\mathscr{G}$ de E :

(1) on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base de E avec des vecteurs de $\mathscr{G}$;

(2) on peut extraire de $\mathscr{G}$ une base de E.

Définition 4.11 – Le symbole de Kronecker

Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $\delta_{i,j} = 0^{|i-j|} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Proposition 4.14 – (et définition) Espaces usuels et bases canoniques

(1) La famille $(e_1, \ldots, e_n)$, où $e_i = \left(\delta_{i,j}\right)_{j \in [\![1,n]\!]}$ est la **base canonique de** $\mathbb{K}^n$. Par conséquent, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

(2) $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ est la **base canonique de** $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}] = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mid \deg(\mathrm{P}) \leqslant n\}$. Par conséquent, $\dim(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]) = n+1$.

(3) On appelle **matrices élémentaires de** $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les matrices notées $\mathrm{E}_{k,\ell}$, où $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant \ell \leqslant p$, dont le terme général est $\delta_{ik} \times \delta_{j\ell}$. *(Autrement dit, toutes les composantes de $\mathrm{E}_{k,\ell}$ sont nulles sauf celle de la k-ème ligne et ℓ-ème colonne qui vaut 1.)*
La famille des matrices élémentaires forme la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = n \times p$.

Remarque 4.4 – $\mathbb{K}^n$ est l'espace canonique de dimension n
L'ensemble $\mathbb{K}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid \forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ \ x_i \in \mathbb{K}\}$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel canonique de dimension n. On confond souvent $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, en écrivant la n-liste $(x_1,\dots,x_n)$ en colonne.

On note désormais $\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G}$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels non réduits au vecteur nul, de dimensions respectives n,p,q, et de bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\psi \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

3.2. Matrices

Définition 4.12 – Matrices de coordonnées

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base :
en notant $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$, pour toute famille $\mathscr{S} = (x_1,\dots,x_p)$ de p vecteurs de E, on appelle matrice de $\mathscr{S}$ dans la base $\mathscr{B}$, on la note $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{S})$ ou $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_p)$, la matrice (m_{ij}) de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$.
Autrement dit :
$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ \ x_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i.$$

Matrice d'une application linéaire :
la matrice de u dans les bases $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}'$ est définie par
$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}'}(u(e_1),\dots,u(e_n)).$$

Cas d'un endomorphisme : si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, on note $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ la matrice $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$.

Proposition 4.15 – Coordonnées de l'image d'un vecteur

Pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, si on pose $\mathrm{X} = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, et $\mathrm{M} = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$, alors
$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}'}(u(x)) = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) \times \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{MX}.$$

Exercice 4.10 – Suite de l'exercice 4.4.
Vérifier que $z \mapsto iz + (1-i)\overline{z}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et donner sa matrice dans la base canonique.

Définition 4.13 – Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- L'application linéaire $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{M}\mathrm{X}(=\mathrm{M}\times\mathrm{X}) \end{array}\right.$

  est l'**application linéaire canoniquement associée à la matrice** M.
  Elle a pour matrice M dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.
- Le noyau et l'image d'une matrice sont ceux de son application linéaire canoniquement associée :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \left\{\mathrm{X} \in \mathbb{K}^p \mid \mathrm{M}\mathrm{X} = 0\right\},$$
$$\mathrm{Im}(\mathrm{M}) = \left\{\mathrm{MX} \mid \mathrm{X} \in \mathbb{K}^p\right\} = \{\mathrm{Y} \in \mathbb{K}^n \mid \exists \mathrm{X} \in \mathbb{K}^p, \mathrm{Y} = \mathrm{MX}\}.$$

Proposition 4.16 – Matrice de la composée de deux applications linéaires

$$\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}''}{\mathrm{Mat}}(v \circ u) = \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}{\mathrm{Mat}}(v) \times \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(u).$$

Proposition 4.17 – Bijections entre espaces vectoriels et ensembles de matrices

(1) L'application $(x_1,\dots,x_p) \mapsto \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x_1,\dots,x_p)$ est un isomorphisme de E^p sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(2) $u \longmapsto \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Remarque 4.5 Parmi les conséquences de ce théorème, on retrouve le fait que :

- si deux applications linéaires ont la même matrice (pour les mêmes bases), alors elles sont égales,
- pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel dont $\mathscr{B}$ est une base, si on note M la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$, alors

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n.$$

3.3. Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'une application linéaire

Définition 4.14 – Les rangs, les rangs, petit patapan

- Le rang d'une famille $(x_1,\dots,x_p)$ de vecteurs de E est
$$\operatorname{rg}(x_1,\dots,x_p)=\dim(\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_p)).$$
- Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes.
- Le rang d'une application linéaire est : $\operatorname{rg}(u)=\dim(\operatorname{Im}(u))$.

Remarque 4.6 – Une façon de comprendre le rang : le rang d'une famille de vecteurs $\mathscr{S}$ est aussi le nombre de vecteurs qui restent quand on en a enlevé tous les vecteurs redondants ; ou encore le plus grand cardinal possible d'une famille libre extraite de $\mathscr{S}$.

Proposition 4.18 – Quelques propriétés du rang

(1) Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $\operatorname{rg}(x_1,\dots,x_p)=\operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_p))$.

(2) $(x_1,\dots,x_p)$ est libre $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ $\operatorname{rg}(x_1,\dots,x_p)=p$.

(3) La famille $(x_1,\dots,x_p)$ de vecteurs de E est génératrice de E $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ $\operatorname{rg}(x_1,\dots,x_p)=\dim(\mathrm{E})$.

(4) $\boxed{\text{Si}}$ $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E, $\boxed{\text{alors}}$ $\operatorname{rg}(u)=\operatorname{rg}(u(e_1),\dots,u(e_p))$.

(5) Pour toutes bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{B}'$ de F, $\operatorname{rg}(u)=\operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u))$.

(6) Le rang d'une application linéaire reste inchangé par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

(7) Le rang d'une matrice reste inchangé par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible.

Exercice 4.11.
Étudier selon les valeurs des réels a et b le rang de la famille :
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&2\\0&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4\\b&-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Proposition 4.19 – Le théorème du rang

(1) Soient H un espace vectoriel. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, H)$, u induit un isomorphisme entre tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E et $\mathrm{Im}(u)$, d'où

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big).$$

(2) Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(M) = n - \dim(\mathrm{Ker}(M))$.

Exercice 4.12. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter $f(x, y, z, t)$ pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. L'application linéaire f est-elle un isomorphisme ?
2. Déterminer (dans l'ordre que vous voulez) le rang de f, une base du noyau de f et une base de l'image de f.

Exercice 4.13 – (**) L'inégalité de Sylvester.
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, montrer que $\dim(u(H)) = \dim(H) - \dim(H \cap \mathrm{Ker}(u))$.
2. On suppose que $\dim(F) = n$, et on prend $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leqslant \mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

3.4. Familles libres et génératrices en dimension finie

Proposition 4.20 – Familles de vecteurs en dimension finie

Dans un espace vectoriel E de dimension n,

(1) $\boxed{\text{si}}$ une famille est libre, $\boxed{\text{alors}}$ elle contient au plus n vecteurs,

(2) $\boxed{\text{si}}$ une famille est génératrice de E, $\boxed{\text{alors}}$ elle contient au moins n vecteurs.

Proposition 4.21 – Caractérisation d'une base en dimension finie

Soit $\mathscr{C}$ une famille de vecteurs, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Les propositions ci-dessous sont $\boxed{\text{équivalentes}}$:

(i) $\mathscr{C}$ est une base de E ;

(ii)
- $\mathscr{C} \subset \mathrm{E}$,
- $\mathscr{C}$ est une famille libre,
- $\operatorname{card}(\mathscr{C}) = \dim(\mathrm{E})$;

(iii)
- $\mathscr{C}$ est génératrice de E,
- $\operatorname{card}(\mathscr{C}) = \dim(\mathrm{E})$;

(iv)
- $\mathscr{C} \subset \mathrm{E}$,
- $\operatorname{rg}(\mathscr{C}) = \dim(\mathrm{E})$;

(v)
- $\mathscr{C} \subset \mathrm{E}$,
- la matrice de $\mathscr{C}$ dans *une* base de E est inversible ;

(vi)
- $\mathscr{C} \subset \mathrm{E}$,
- la matrice de $\mathscr{C}$ dans *toute* base de E est inversible.

Exercice 4.14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Montrer que la famille $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Proposition 4.22 – Égalité de deux espaces vectoriels de dimension finie

$\boxed{\text{Si}}$ F et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie, $\boxed{\text{alors}}$

$$\mathrm{F} = \mathrm{G} \iff \begin{cases} \mathrm{F} \subset \mathrm{G}, \\ \dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{G}) \end{cases}$$

Exercice 4.15. Montrer que $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

3.5. Isomorphismes en dimension finie

Proposition 4.23 – Isomorphisme et égalité des dimensions

$\boxed{\text{S'il}}$ existe un isomorphisme de E sur F, $\boxed{\text{alors}}$ $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$.

Corollaire 4.24 – La dimension de l'espace des applications linéaires

$\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, et $\dim(\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})) = n \times p = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F})$.

Exercice 4.16.

1. Montrer que $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{C}^2$.
   (b) En déduire la dimension de E.
3. Soient a et b les suites réelles de termes généraux $a_n = 1$ et $b_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$.
   (a) Montrer que (a, b) est une base de E.
   (b) Donner en fonction de n l'expression du terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = -1$ et $u_1 = 0$.
   (c) Démontrer que toutes les suites de E sont convergentes.

Proposition 4.25 – Caractérisation d'un isomorphisme en cas d'égalité des dimensions

$\boxed{\text{Si}}$ $\dim(E) = \dim(F)$, $\boxed{\text{alors}}$ les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est bijective ;

(ii) u est injective ;

(iii) u est surjective ;

(iv) il existe $g \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $g \circ u = \mathrm{id}_E$;

(v) il existe $h \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $u \circ h = \mathrm{id}_F$;

(vi) une matrice représentant u est inversible ;

(vii) toutes les matrices représentant u sont inversibles.

Dans le cas où u est bijective, $\underset{\mathscr{B}', \mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u^{-1}) = \left(\underset{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(u)\right)^{-1}$.

Exercice 4.17. Montrer que $f : P \mapsto f(P) = P - P'$ définit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Somme de sous-espaces vectoriels

4.1. Le cas général

On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, dont F et G sont deux sous-espaces vectoriels.

Définition 4.15 – Somme de deux sous-espaces vectoriels

On note $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}+\mathrm{G} &= \mathrm{Vect}(\mathrm{F}\cup\mathrm{G})\\ &= \{x_\mathrm{F}+x_\mathrm{G} \mid x_\mathrm{F}\in\mathrm{F}, x_\mathrm{G}\in\mathrm{G}\}\\ &= \{x\in\mathrm{E} \mid \exists(x_\mathrm{F},x_\mathrm{G})\in\mathrm{F}\times\mathrm{G},\ \ x=x_\mathrm{F}+x_\mathrm{G}\}.\end{aligned}$$

Méthode 4.9 – Pour montrer que $\mathrm{E}=\mathrm{F}+\mathrm{G}$:

comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on sait déjà que $\mathrm{F}+\mathrm{G}\subset\mathrm{E}$, il suffit de prouver l'inclusion inverse.
Pour cela on prend un vecteur x quelconque dans E, et on résout dans $\mathrm{F}\times\mathrm{G}$ l'équation $x=x_\mathrm{F}+x_\mathrm{G}$ d'inconnue $(x_\mathrm{F},x_\mathrm{G})$, l'analyse-synthèse étant souvent appropriée (voir l'exercice 4.18).

Définition 4.16 – Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On dit que F et G sont en **somme directe** lorsque pour tout vecteur x de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ il existe un couple $(x_\mathrm{F},x_\mathrm{G})$ unique dans $\mathrm{F}\times\mathrm{G}$ tel que x s'écrit sous la forme $x=x_\mathrm{F}+x_\mathrm{G}$.

Proposition 4.26 – Caractérisation d'une somme directe

F et G sont en somme directe $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_\mathrm{E}\}$.

Exemple 4.1 – Un cas classique.
Si $(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_r)$ est une **famille libre** d'un espace vectoriel E, alors $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_k)$ et $\mathrm{Vect}(x_{k+1},\dots,x_r)$ sont en somme directe.

Définition 4.17 – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E, on le note $E = F \oplus G$, lorsque **pour tout** vecteur x de E **il existe** un couple (x_F, x_G) **unique** dans $F \times G$ tel que x s'écrit sous la forme $x = x_F + x_G$.
Dans ce cas :

- le vecteur x_F (*resp.* x_G) est appelé **projeté** de x sur F parallèlement à G (*resp.* G parallèlement à F) ;
- l'application $p : x \mapsto x_F$ (*resp.* $q : x \mapsto x_G$) est appelée **projection** de E sur F parallèlement à G (*resp.* **projection** de E sur G parallèlement à F), et $p + q = \mathrm{id}_E$;
- l'application $s = p - q = 2p - \mathrm{id}_E$ est appelée **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G.

Proposition 4.27 – Existence d'un supplémentaire

Tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admet un supplémentaire dans E.

Proposition 4.28 – Une caractérisation pour deux sous-espaces supplémentaires

$$E = F \oplus G \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F \cap G = \{0_E\}, \\ E = F + G. \end{cases}$$

Exercice 4.18 – Oral CCINP (sans préparation).
Soient E un espace vectoriel, et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que si $v \circ u$ et $u \circ v$ sont l'endomorphisme nul, et s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\lambda u + \mu v = \mathrm{Id}_E$, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont supplémentaires dans E.

4.2. Projecteurs et projections, symétries

Définition 4.18 – Projecteur, symétrie

- Un endomorphisme p de E est un projecteur de E lorsque $p \circ p = p$.
- Un endomorphisme s de E est une symétrie de E lorsque $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Proposition 4.29 – Propriétés des projecteurs et des symétries

Soient p un projecteur et s une symétrie de E.

(1) $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$;

(2) $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$;

(3) p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$;

(4) $q = \mathrm{id}_E - p$ est la projection sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$;

(5) $2p - \mathrm{id}_E$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$;

(6) $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$,

(7) s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$,

(8) $\frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Proposition 4.30 – Les projections sont des projecteurs !

La projection p de E sur F parallèlement à G est un projecteur, qui vérifie $\mathrm{Ker}(p) = G$ et $\mathrm{Im}(p) = F$.

Exercice 4.19 – (**). Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et u, v dans $\mathscr{L}(E)^2$ tels que $u + v = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant \dim(E)$.
Montrer que u et v sont des projecteurs.

4.3. Sommes de sous-espaces vectoriels en dimension finie

On suppose à présent que E est de dimension finie.

Proposition 4.31

(1) **La formule de Grassmann :**

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

(2) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

- $\dim(F) \leqslant \dim(E)$,
- F possède (au moins) un sous-espace vectoriel supplémentaire G dans E, qui vérifie $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Proposition 4.32 – Caractérisations de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Les propositions ci-dessous sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$;

(ii) $F \cap G = \{0_E\}$, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$;

(iii) $F + G = E$, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$;

(iv) la concaténation d'une base de F et d'une base de G forme une base de E.

Une telle base est appelée **base adaptée à la somme directe** $E = F \oplus G$.

(v) la réunion de toute base de F avec toute base de G forme une base de E.

Exercice 4.20. On pose $P_1 = 1 + 3X - X^3$, $P_2 = 1 + 2X + X^2 + X^3$, et $P_3 = 1 + 4X - X^2 - 3X^3$.

1. Déterminer le rang de la famille (P_1, P_2, P_3).
2. Donner un sous-espace supplémentaire G de $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Donner alors les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ du projecteur sur F parallèlement à G, puis de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Preuves et solutions

Une correction de l'exercice 4.1 *énoncé*

- L'ensemble $\mathscr{E}$ contient la fonction nulle θ qui est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et vérifie bien pour tout réel $x > 0$

$$x^2\theta''(x) + 4x\theta'(x) + 2\theta(x) = x^2 \times 0 + 4x \times 0 + 2 \times 0 = 0,$$

  donc $\mathscr{E}$ n'est pas vide.
- Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{E}$, λ et μ deux réels, alors d'une part $\lambda f + \mu g$ est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned}
&x^2(\lambda f + \mu g)''(x) + 4x(\lambda f + \mu g)'(x) + 2(\lambda f + \mu g)(x)\\
&\quad = \lambda x^2 f''(x) + \mu x^2 g''(x) + 4\lambda x f'(x) + 4\mu x g'(x)\\
&\qquad + 2\lambda f(x) + 2\mu g(x)\\
&\quad = \lambda\left[x^2 f''(x) + 4x f'(x) + 2f(x)\right]\\
&\qquad + \mu\left[x^2 g''(x) + 4x g'(x) + 2g(x)\right]\\
&\quad = \lambda \times 0 + \mu \times 0 \ \textit{(car f et g sont dans $\mathscr{E}$)}\\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

  donc la fonction $(\lambda f + \mu g)$ est dans $\mathscr{E}$, ce qui prouve que $\mathscr{E}$ est stable par combinaison linéaire.
- L'ensemble $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathscr{D}$ non-vide et stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}$.

Une correction de l'exercice 4.2 *énoncé*

Première méthode

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ la forme propositionnelle
« la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre ».

1. Au rang $n = 0$, la fonction f_0 n'est pas la fonction nulle, donc la famille $[f_0]$ est une famille libre, et $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie, et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est aussi vraie, c'est-à-dire que la famille $(f_0, \dots, f_{n+1})$ est libre.
   Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$, $n+2$ réels qui vérifient

$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = \theta \quad \text{(où θ est la fonction nulle)}$$

autrement dit

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k f_k = \theta$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \cos(k\,x) = 0.$$

Si on dérive deux fois cette égalité, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=0}^{n+1} (-k^2)\lambda_k \cos(k\,x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-k^2)\lambda_k f_k = -\lambda_1 f_1 \cdots - n^2\lambda_n f_n - (n+1)^2\lambda_{n+1} f_{n+1} = \theta.$$

Par conséquent, on va multiplier la première égalité (E) par $(n+1)^2$ et lui ajouter l'égalité que l'on vient d'obtenir pour éliminer le terme en f_{n+1} :

$$(n+1)^2 \times \left(\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k f_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-k^2)\lambda_k k f_k\right) = -(n+1)^2\theta + \theta$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n} ((n+1)^2 - k^2)\lambda_k f_k = \theta.$$

On a obtenu une combinaison linéaire nulle des fonctions $f_0, \ldots, f_n$. Or par hypothèse de récurrence, ces fonctions forment une famille libre, donc les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls. Autrement dit, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $((n+1)^2 - k^2)\lambda_k = 0$, et comme $n+1 \neq k$, $\lambda_k = 0$.

Ainsi $\boxed{\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0}$, et il ne reste plus dans l'égalité de départ que $\lambda_{n+1} f_{n+1} = \theta$, qui donne $\boxed{\lambda_{n+1} = 0}$ car f_{n+1} n'est pas la fonction nulle.

On a donc établi $\mathscr{P}_{n+1}$, ce qui achève l'exercice.

Deuxième méthode

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, $n+1$ réels qui vérifient

$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = \theta \quad \text{(où } \theta \text{ est la fonction nulle)}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos(kx) = 0.$$

Donc avec la formule d'Euler

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = 0,$$

c'est-à-dire, en multipliant par 2 et en séparant les deux sommes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{ikx} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-ikx} = 0,$$

d'où en multipliant par e^{inx},

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{i(n+k)x} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{i(n-k)x} = 0,$$

puis en posant $k' = n + k$ dans la première somme, et $k' = n - k$ dans la seconde,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=n}^{2n} \lambda_{k-n} e^{ikx} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n-k} e^{ikx} = 0$$

ce qui revient à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}\left(e^{ix}\right) = 0,$$

où P est le polynôme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n-k} \mathrm{X}^k + 2\lambda_0 \mathrm{X}^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_{k-n} \mathrm{X}^k \\
&= \lambda_n + \lambda_{n-1}\mathrm{X} + \cdots + \lambda_1 \mathrm{X}^{n-1} + 2\lambda_0 \mathrm{X}^n \\
&\qquad + \lambda_1 \mathrm{X}^{n+1} + \cdots + \lambda_{n-1} \mathrm{X}^{2n-1} + \lambda_n \mathrm{X}^{2n}.
\end{aligned}$$

Ainsi le polynôme P ci-dessus admet pour racines tous les e^{ix} pour $x \in \mathbb{R}$, autrement dit tous les nombres complexes du cercle unité, ce qui fait en bref une infinité de racines.

Par conséquent, P est le polynôme nul, donc ses coefficients sont nuls, et par conséquent les λ_k pour $k \in [\![0, n]\!]$ sont tous nuls, ce qui achève de prouver que la famille $[f_0, f_1, \ldots, f_n]$ est libre.

Une correction de l'exercice 4.3 *énoncé*

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Alors

$$\mathrm{AM} = \begin{pmatrix} a-d+g & b-e+h & c-f+i \\ d-g & e-h & f-i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{MA} = \begin{pmatrix} a & -a+b & a-b+c \\ d & -d+e & d-e+f \\ g & -g+h & g-h+i \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{A}) &\iff \mathrm{AM} = \mathrm{MA} \\ &\iff \begin{pmatrix} a-d+g & b-e+h & c-f+i \\ d-g & e-h & f-i \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -a+b & a-b+c \\ d & -d+e & d-e+f \\ g & -g+h & g-h+i \end{pmatrix} \\ &\iff \cdots \text{(calculs)} \cdots \iff \begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{cases} \iff \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\ &\iff \mathrm{M} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi en notant $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{A}) \iff \mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_3, \mathrm{J}, \mathrm{K}),$$

autrement dit

$$\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_3, \mathrm{J}, \mathrm{K}).$$

On en déduit que $\mathscr{C}(\mathrm{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont $(\mathrm{I}_3, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ est une famille génératrice. Cette famille est aussi une base car on montre sans difficulté qu'elle est libre. On en déduit que $\dim(\mathscr{C}(\mathrm{A})) = 3$.

Une correction de l'exercice 4.4 *énoncé*

Notons u cette application, qui a bien pour ensembles de départ et d'arrivée $\mathbb{C}$.
Soient a, b deux nombres complexes, λ, μ deux **réels (!)**, alors

$$\begin{aligned}
u(\lambda a+\mu b) &= i(\lambda a+\mu b)+(1-i)\overline{(\lambda a+\mu b)} \\
&= i(\lambda a+\mu b)+(1-i)\left(\overline{\lambda}\,\overline{a}+\overline{\mu}\,\overline{b}\right) && \text{\textit{(car la conjugaison des nombres complexes est linéaire)}} \\
&= \lambda\left(i a+(1-i)\overline{a}\right)+\mu\left(i b+(1-i)\overline{b}\right) && \text{\textit{(par distributivité de l'addition par rapport à la multiplication dans } \mathbb{C}\text{)}} \\
&= \lambda u(a)+(1-i)u(b), \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 4.5 *énoncé*

Méthode 4.10 – L'analyse-synthèse

Pour montrer l'existence d'un objet mathématique, ou carrément pour trouver cet objet (comme quand on résout une équation par exemple), on peut utiliser la méthode d'« analyse-synthèse » :

- *d'abord on suppose que cet objet existe, et on essaie de voir des conditions que doit alors vérifier cet objet jusqu'à pouvoir en dresser un portrait-robot ;*
- *dans un second temps, on cherche parmi les objets qui vérifient les conditions qu'on vient de trouver le(s)quel(s) sont effectivement solutions.*

Analyse : supposons qu'il existe une liste $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de réels tels que $f^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$, alors en particulier

$$f^n(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(e),$$

donc $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est la liste des coordonnées du vecteur $f^n(e)$ dans la base $\left(e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e)\right)$.

Ici la partie analyse nous montre que si jamais la liste existe, elle ne peut être que la liste des coordonnées du vecteur $f^n(e)$ dans la base $\left(e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e)\right)$, donc qu'elle est unique.

Synthèse : Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ la liste des coordonnées de $f^n(e)$ dans la base $\left(e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e)\right)$ que l'on note $\mathscr{B}$, et montrons l'égalité (entre deux endomorphismes)

$$f^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k.$$

Pour cela, montrons que ces deux endomorphismes sont égaux sur la base $\mathscr{B}$.
Prenons un vecteur quelconque $f^p(e)$, avec $p \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$, dans cette base. Alors

- d'une part,

$$\begin{aligned} f^n\left(f^p(e)\right) = f^{n+p}(e) = f^{p+n}(e) = f^p\left(f^n(e)\right) \\ &= f^p\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(e)\right) \quad \textit{(par hypothèse sur les } a_k\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^p\left(f^k(e)\right) \quad \textit{(par linéarité de } f^p\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{p+k}(e)\,; \end{aligned}$$

- et d'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\left(f^p(e)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+p}(e) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{p+k}(e). \end{aligned}$$

- Ainsi les endomorphismes f^n et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ coïncident sur la base $\mathscr{B}$, ce qui prouvent qu'ils sont égaux.

Une correction de l'exercice 4.6

énoncé

1. **Première méthode :** $\mathrm{Im}(v \circ u) = (v \circ u)(\mathrm{E}) = v(u(\mathrm{E}))$, or $u(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$, donc $v(u(\mathrm{E})) \subset v(\mathrm{E}) = \mathrm{Im}(v)$, d'où $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$.

   Autre méthode :

   Méthode 4.11 – pour montrer une inclusion d'un ensemble F dans un ensemble G, on prend un élément quelconque de F, et on prouve qu'il est dans G.

   Soit $\boxed{y \in \mathrm{Im}(v \circ u)}$, alors il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = (v \circ u)(x) = v(u(x))$, donc y est de la forme $v(\square)$, où $\square \in \mathrm{E}$, ce qui prouve que $\boxed{y \in \mathrm{Im}(v)}$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$.

2. ➟ Supposons que $v \circ u$ est l'endomorphisme nul, et montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$. Pour cela prenons $y \in \mathrm{Im}(u)$, et montrons que $y \in \mathrm{Ker}(v)$.
   Par définition de l'image de u, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(x)$, d'où

   $$v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) = 0_{\mathrm{E}},$$

   donc $y \in \mathrm{Ker}(v)$, C.Q.F.D.

   ➟ Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$, et montrons que $v \circ u = 0$, autrement dit montrons que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $(v \circ u)(x) = 0$, c'est-à-dire $v\big(u(x)\big) = 0$.
   Soit $x \in \mathrm{E}$, par définition $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, donc par hypothèse $u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$, d'où $v\big(u(x)\big) = 0$, C.Q.F.D.

3. Supposons que $u \circ v = v \circ u$.

   (a) Montrons que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par v, autrement dit que les images des éléments de $\mathrm{Ker}(u)$ par v sont encore des éléments de $\mathrm{Ker}(u)$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors

   $$\begin{aligned} u(v(x)) &= (u \circ v)(x) \\ &= (v \circ u)(x) \quad \textit{(par hypothèse)} \\ &= v(u(x)) = v(0_{\mathrm{E}}) \quad \textit{(car } x \in \mathrm{Ker}(u)\textit{)} \\ &= 0_{\mathrm{E}} \quad \textit{(car } v \textit{ est une application linéaire)} \text{ C.Q.F.D} \end{aligned}$$

   (b) Montrons que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(x)$, ainsi

   $$\begin{aligned} v(y) = v(u(x)) &= (v \circ u)(x) = (u \circ v)(x) \quad \textit{(par hypothèse)} \\ &= u(v(x)) \end{aligned}$$

   donc $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$, C.Q.F.D

Une correction de l'exercice 4.7 *énoncé*

➟ Supposons que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(v \circ u)$, et montrons que $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{0_E\}$.

> *L'égalité $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{0_E\}$ est une égalité entre deux ensembles, c'est-à-dire une double inclusion.*
> *L'inclusion de droite à gauche qui est détaillée dans le premier point ci-dessous est tellement évidente que sa preuve est très souvent éludée.*

(i) La partie $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(v)$ de E est un sous-espace vectoriel de E en tant qu'intersection de deux sous-espaces vectoriels, il contient obligatoirement 0_E, c'est pourquoi l'inclusion $\{0_E\} \subset \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(v)$.

(ii) Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(v)$, montrons que $y = 0_E$.
Comme y est dans $\operatorname{Im}(u)$, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $y = u(x)$; mais y est aussi dans $\operatorname{Ker}(v)$, donc $v(y) = 0_E$.
Cette égalité équivaut à $v(u(x)) = 0_E$, autrement dit $(v \circ u)(x) = 0_E$, ce qui prouve que $x \in \operatorname{Ker}(v \circ u)$.
Or par hypothèse, $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker}(u)$, donc $x \in \operatorname{Ker}(u)$, autrement dit $u(x) = 0_E$, c'est-à-dire $y = 0_E$, C.Q.F.D.

➟ Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{0_E\}$, et montrons que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(v \circ u)$.

(i) Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$, montrons que $x \in \operatorname{Ker}(v \circ u)$:

$$\begin{aligned}(v \circ u)(x) &= v(u(x)) = v(0_E) \quad \textit{(car } x \in \operatorname{Ker}(u)\textit{)} \\ &= 0_E \quad \textit{(car } v \textit{ est une application linéaire).}\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$.

(ii) Soit $x \in \operatorname{Ker}(v \circ u)$, montrons que $x \in \operatorname{Ker}(u)$:
Comme $x \in \operatorname{Ker}(v \circ u)$, on sait que $v(u(x)) = 0_E$, ainsi $u(x) \in \operatorname{Ker}(v)$. Or par définition, $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$, donc $u(x) \in \operatorname{Ker}(v) \cap \operatorname{Im}(u)$.
Mais par hypothèse, $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{0_E\}$, donc $u(x) = 0_E$, ce qui prouve que $x \in \operatorname{Ker}(u)$.

Une correction de l'exercice 4.8 *énoncé*

Notons $\phi : M \mapsto D \times M - M \times D$.

➟ Le produit matriciel $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2 \mapsto A \times B$ est :

- une application interne à $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ donc ϕ est bien une application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

➔ bilinéaire, donc ϕ est une application linéaire.

Ainsi ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors par la formule du produit matriciel, pour tout $(i,j) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}(\phi(M))_{i,j} &= (DM - MD)_{i,j} = (DM)_{i,j} - (MD)_{i,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (D)_{i,k}(M)_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} (M)_{i,k}(D)_{k,j} \\ &= a_i (M)_{i,j} - (M)_{i,j} a_j \ \left(\textit{car } (D)_{p,q} = \begin{cases} a_p & \textit{si } p = q, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}\right) \\ &= (a_i - a_j)(M)_{i,j}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker}(\phi) &\iff \forall (i,j) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2,\ \ (a_i - a_j)(M)_{i,j} = 0 \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2,\ \ i \neq j,\ \ (M)_{i,j} = 0 \ \ (\textit{car si } i \neq j,\ a_i - a_j \neq 0) \\ &\iff M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \ \ (\textit{autrement dit } M \textit{ est une matrice diagonale.}) \end{aligned}$$

On a donc prouvé que

$$\operatorname{Ker}(\phi) = \mathcal{D}_n(\mathbb{C}).$$

Une correction de l'exercice 4.9 *énoncé*

- Il est dans un premier temps incontestable que si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\Delta(P)$, c'est-à-dire $P(X+1) - P(X)$, est aussi dans $\mathbb{R}[X]$, donc Δ est bien une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- Soient P et Q deux polynômes, λ et μ deux réels. Alors

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda \left(P(X+1) - P(X)\right) + \mu \left(Q(X+1) - Q(X)\right) \\ &= \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q).\end{aligned}$$

d'où la linéarité de Δ, qui est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- Pour montrer que Δ est surjectif, il suffit de montrer que $\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{R}[X]$, autrement dit $\Delta(\mathbb{R}[X]) = \mathbb{R}[X]$.

➔ On sait déjà que $\Delta(\mathbb{R}[X]) \subset \mathbb{R}[X]$, car Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- De plus $\mathbb{R}[X] = \text{Vect}\left((X^k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$, donc

$$\begin{aligned}\text{Im}(\Delta) &= \Delta\left(\text{Vect}\left((X^k)_{k\in\mathbb{N}}\right)\right)\\ &= \text{Vect}\left(\Delta(X^k)_{k\in\mathbb{N}}\right).\end{aligned}$$

D'une part $\Delta(1) = 0$, puis pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k &= \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}X^p - X^k\\ &= \sum_{p=0}^{k-1}\binom{k}{p}X^p\\ &= kX^{k-1} + \sum_{p=0}^{k-2}\binom{k}{p}X^p,\end{aligned}$$

donc

$$X^{k-1} = \frac{1}{k}\Delta(X^k) + \sum_{p=0}^{k-2}\frac{1}{k}\binom{k}{p}X^p.$$

On va montrer par une récurrence forte que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(k) \quad : \quad X^k \in \text{Vect}\left(\Delta(X^p)_{p\in\mathbb{N}}\right).$$

  - Tout d'abord $X^0 = 1 = \Delta(X)$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vérifié.
  - Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que les propriétés $\mathscr{P}(0), \dots, \mathscr{P}(k)$ sont vraies, autrement dit que $1, X, \dots, X^k$ sont dans $\text{Vect}\left(\Delta(X^p)_{p\in\mathbb{N}}\right)$.
    Alors d'après le résultat du calcul ci-dessus (appliqué à $k+2$ à la place de k)

$$X^{k+1} = \frac{1}{k+2}\Delta(X^{k+2}) + \sum_{p=0}^{k}\frac{1}{k+2}\binom{k+2}{p}X^p,$$

    donc X^{k+1} est une combinaison linéaire de polynômes de $\text{Vect}\left(\Delta(X^p)_{p\in\mathbb{N}}\right)$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, donc $X^{k+1} \in \text{Vect}\left(\Delta(X^p)_{p\in\mathbb{N}}\right)$, ce qui prouve $\mathscr{P}(k+1)$.
  - On a donc établi par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k \in \text{Vect}\left(\Delta(X^p)_{p\in\mathbb{N}}\right)$.
- On conclut que $\mathbb{R}[X] = \text{Vect}\left((X^k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$ est inclus dans $\text{Vect}\left(\Delta(X^p)_{p\in\mathbb{N}}\right)$ (car ce dernier ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$), donc que $\mathbb{R}[X] \subset \text{Im}(\Delta)$.
- On a prouvé la double inclusion, qui nous permet d'affirmer l'égalité $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}[X]$, dont on peut déduire que Δ est surjectif.

Une preuve de la proposition 4.11 *énoncé*

1. Prenons une famille $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E, et supposons qu'elle est liée. Alors il existe un jeu $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ de coefficients, dont l'un au moins est non nul, tel que
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_{\mathrm{E}}.$$
Alors en composant par u, on obtient par linéarité de u
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i) = 0_{\mathrm{E}},$$
ce qui prouve que la famille $u(\mathscr{S})$ est aussi liée.

2. ➟ Supposons que u est injective. Prenons une famille libre $(x_1, \dots, x_n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) de vecteurs de E, et montrons que $(u(x_1), \dots, u(x_n))$ est libre.
Prenons pour ce faire *(il est toujours satisfaisant d'utiliser l'expression « pour ce faire »)* des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pour lesquels
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i) = 0_{\mathrm{F}}.$$
Alors par linéarité de u,
$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0_{\mathrm{F}},$$
autrement dit $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \mathrm{Ker}(u)$.
Or on a supposé que u est injective, donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathrm{E}}\}$, d'où
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_{\mathrm{E}}.$$
Enfin, comme on a supposé que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on peut conclure que les λ_i sont nuls, ce qui boucle le raisonnement.
➟ Réciproquement, supposons que u transforme toute famille libre en une famille libre, et montrons que u est injective.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0_{\mathrm{F}}$, donc la famille $\{u(x)\}$ est liée.
Or $\{u(x)\} = u(\{x\})$, donc par contraposée de l'hypothèse, la famille $\{x\}$ doit être liée, ce qui n'est possible que pour $x = 0_{\mathrm{E}}$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 4.10 *énoncé*

Rappelons tout d'abord que la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est $(1, i)$.
L'application u va bien de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et elle est linéaire grâce à la linéarité de la conjugaison.

Avec la définition : la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est $(1, i)$, de plus, en notant u l'application considérée,

$$\begin{aligned} u(1) = i\times 1 + (1-i)\times \overline{1} = 1 = 1\times \quad 1 \quad + 0\times \quad i,\\ u(i) = i\times i + (1-i)\times \overline{i} = -1-(1-i)\times i = (-2)\times \quad 1 \quad + (-1)\times \quad i,\end{aligned}$$

donc

$$\underset{(1,i)}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avec la proposition : prenons un nombre complexe quelconque z, et notons $x = \mathbb{R}\mathrm{e}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ ses coordonnées dans la base canonique $(1, i)$, alors

$$u(z) = iz + (1-i)\overline{z} = i(x+iy) + (1-i)(x-iy) = (x-2y)\times 1 + (-y)\times i,$$

ainsi

$$\underset{(1,i)}{\mathrm{Mat}}(u(z)) = \begin{pmatrix} x-2y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \underset{(1,i)}{\mathrm{Mat}}(z).$$

donc comme on sait que

$$\underset{(1,i)}{\mathrm{Mat}}(u(z)) = \underset{(1,i)}{\mathrm{Mat}}(u) \times \underset{(1,i)}{\mathrm{Mat}}(z),$$

on se permet d'en déduire par identification que

$$\underset{(1,i)}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une correction de l'exercice 4.11 *énoncé*

Le rang de cette famille de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est égal au rang de la matrice de leurs coordonnées dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, qui est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 3 & a & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est équivalentes par les lignes à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la famille est :

- de rang 4, si $a \neq 4$ et $b \neq -3$;
- de rang 3, si $a = 4$ mais $b \neq -3$, ou bien si $a \neq 4$ mais $b = -3$;
- de rang 2 si $a = 4$ et $b = -3$.

Une correction de l'exercice 4.12

énoncé

1. Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathscr{C}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Notons aussi $u = (x, y, z, t)$, alors

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}'}(f(u)) = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(f) \times \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y-2z-5t \\ x+2y+z-t \end{pmatrix}$$

   donc $\boxed{f(x,y,z,t) = (x+3y-2z-5t, x+2y+z-t)}$.
   Cette application linéaire n'a aucune chance d'être un isomorphisme car les espaces de départ et d'arrivée ne sont pas de même dimension, ce qui est une condition nécessaire pour que deux espaces vectoriels soient isomorphes.

2. - On voit à l'œil nu que les deux lignes de cette matrice ne sont pas colinéaires, donc son rang est 2. Or le rang d'un endomorphisme est le rang de n'importe laquelle de ses matrices, donc $\boxed{\operatorname{rg}(f) = 2}$.
     Ainsi, $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension 2, donc il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires de l'image pour en avoir une base. On remarque que $f(1,0,0,0) = (1,1) \in \operatorname{Im}(f)$ et $f(0,1,0,0) = (3,2) \in \operatorname{Im}(f)$, et ne sont pas colinéaires, donc on peut conclure que
     $$\boxed{(1,1) \text{ et } (3,2) \text{ forment une base de } \operatorname{Im}(f).}$$
   - Par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \operatorname{rg}(f) = 2$, donc il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires du noyau pour en avoir une base.
     Ici, un simple coup d'œil ne me donne pas ces deux vecteurs, donc je vais résoudre

$f(u)=0$: prenons à nouveau $\vec{u}=(x,y,z,t)$, alors

$$f(u)=0_E \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z-5t=0 \\ x+2y+z-t=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z-5t=0 \\ -y+3z+4t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-7z-7t \\ y=3z+4t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u=(-7z-7t,3z+4t,z,t)=z(-7,3,1,0)+t(-7,4,0,1)$$

Par conséquent, si l'on note $\boxed{u_1=(-7,3,1,0) \text{ et } u_2=(-7,4,0,1)}$, on en déduit que $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}(u_1,u_2)$, et comme ces deux vecteurs ne sont évidemment pas colinéaires, on en déduit que la famille $\boxed{(u_1,u_2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f)}$.

Une correction de l'exercice 4.13 — *énoncé*

1. Notons u_H la restriction de l'endomorphisme u à H. Alors d'une part $\operatorname{Im}(u_H)=u_H(H)=u(H)$ d'où $\operatorname{rg}(u_H)=\dim(u(H))$, et d'autre part

$$\operatorname{Ker}(u_H)=\{x\in H \mid u_H(x)=0_E\}=\{x\in E \mid x\in H, u(x)=0_E\}=H\cap\operatorname{Ker}(u).$$

Ainsi, le théorème du rang appliqué à u_H nous donne

$$\dim(u(H))=\dim(H)-\dim(H\cap\operatorname{Ker}(u))$$

qui est l'égalité voulue.

2. Ici $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$, et $\dim(F)=n$.

- Par définition, $\operatorname{rg}(v\circ u)=\dim(v\circ u(E))=\dim(v(u(E))$. Mais $u(E)\subset F$, donc $v(u(E))\subset v(F)$, d'où $\operatorname{rg}(v\circ u)\leqslant\dim(v(F))=\operatorname{rg}(v)$.
  Mais aussi grâce à la question 1, dans laquelle on remplace H par $u(E)$, et u par v,

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(v\circ u)&=\dim(v(u(E))\\&=\dim(u(E))-\dim(u(E)\cap\operatorname{Ker}(v))\leqslant\dim(u(E))=\operatorname{rg}(u).\end{aligned}$$

  Donc on a prouvé que

$$\operatorname{rg}(v\circ u)\leqslant\operatorname{rg}(u) \text{ et } \operatorname{rg}(v\circ u)\leqslant\operatorname{rg}(v),$$

  par conséquent

$$\operatorname{rg}(v\circ u)\leqslant\min(\operatorname{rg}(u),\operatorname{rg}(v)).$$

- On vient de voir au-dessus que

$$\operatorname{rg}(v\circ u)=\dim(u(E))-\dim(u(E)\cap\operatorname{Ker}(v))$$

or $u(\mathrm{E}) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(v)$, donc

$$\dim(u(\mathrm{E}) \cap \mathrm{Ker}(v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(v)),$$

et en faisant attention au signe “-”,

$$\begin{aligned}\dim(u(\mathrm{E})) - \dim(u(\mathrm{E}) \cap \mathrm{Ker}(v)) \\ \geqslant \dim(u(\mathrm{E})) - \dim(\mathrm{Ker}(v)).\end{aligned}$$

Mais avec le théorème du rang appliqué à v,

$$\begin{aligned}\dim(u(\mathrm{E})) - \dim(\mathrm{Ker}(v)) &= \mathrm{rg}(u) - \big(\dim(\mathrm{F}) - \mathrm{rg}(v)\big) \\ &= \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n,\end{aligned}$$

ce qui nous donne bien l'inégalité voulue

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \geqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n.$$

Une correction de l'exercice 4.14 *énoncé*

Les polynômes de la famille $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ *sont tous de degré* n*, donc ce sont bien des éléments de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Ainsi, comme cette famille est de cardinal $n+1$*, et que* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *est de dimension* $n+1$*, **il suffit** de prouver que c'est une famille libre pour conclure que c'est une base de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ (et il est inutile de parler de famille génératrice, surtout quand on maîtrise mal le raisonnement).

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \text{« la famille } (\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n) \text{ est libre ».}$$

Attention, les polynômes $\mathrm{P}_i = \mathrm{X}^i(1-\mathrm{X})^{n-i}$ *ont une expression qui dépend de* n*, il va donc falloir adapter cette expression quand on va passer à* $\mathscr{P}(n+1)$ *!*

(i) Au rang $n = 0$, la famille ne contient que le polynôme $\mathrm{P}_0 = \mathrm{X}^0(1-\mathrm{X})^{0-0} = 1$ qui est non-nul, donc c'est une famille libre.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que la famille formée par les polynômes $\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ est libre, et montrons $\mathscr{P}(n+1)$, autrement dit que la famille formée par les polynômes $\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{(n+1)-k}$ pour $k \in [\![0, n+1]\!]$ est libre.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$ des scalaires, supposons que $\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \mathrm{X}^k (1-\mathrm{X})^{(n+1)-k} = \theta$, où θ est le polynôme nul. Alors

$$\lambda_0(1-X)^{n+1}+\lambda_1 X(1-X)^n+\cdots+\lambda_n X^n(1-X)+\lambda_{n+1}X^{n+1}=\theta$$

donc en remplaçant X par 0, il reste $\boxed{\lambda_0=0}$.

Notre égalité de départ donne alors

$$\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k X^k(1-X)^{(n+1)-k}=\theta,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 X(1-X)^n+\cdots+\lambda_n X^n(1-X)+\lambda_{n+1}X^{n+1}=\theta,$$

soit en simplifiant par X

$$\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k X^{k-1}(1-X)^{(n+1)-k}=\theta,$$

autrement dit,

$$\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k X^{k-1}(1-X)^{n-(k-1)}=\theta,$$

et avec le changement d'indice $k'=k-1$,

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k+1}X^k(1-X)^{n-k}=\theta,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1(1-X)^n+\lambda_2 X(1-X)^{n-1}+\cdots+\lambda_n X^{n-1}(1-X)+\lambda_{n+1}X^n=\theta.$$

On reconnaît là une combinaison linéaire nulle des polynômes $X^k(1-X)^{n-k}$ pour $k\in[\![0,n]\!]$, or l'hypothèse de récurrence nous dit que cette famille est libre, donc $\boxed{\text{les coefficients } \lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1} \text{ sont nuls}}$.

Il reste alors $\lambda_k(1-X)^{n+1}=\theta$ dans la toute première égalité, qui nous donne $\boxed{\lambda_0=0}$ et achève notre raisonnement.

Une correction de l'exercice 4.15 *énoncé*

Notons les matrices $M_1, \dots, M_4$ dans leur ordre d'apparition.

- Tout d'abord on remarque que M_1 et M_2 ne sont pas colinéaires, donc que $\mathrm{rg}(M_1, M_2) = 2$, c'est-à-dire que $\dim(\mathrm{Vect}(M_1, M_2)) = 2$. De même, $\dim(\mathrm{Vect}(M_3, M_4)) = 2$.
  Les deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(M_1, M_2)$ et $\mathrm{Vect}(M_3, M_4)$ étant de même dimension, il suffit que l'un soit inclus dans l'autre pour qu'ils soient confondus (c'est-à-dire égaux).
- On remarque de plus

  > *(bien sûr, si on ne le voit pas à l'œil nu, on résout vite fait sur un coin de brouillon, les systèmes qui découlent des égalités $M_1 = aM_3 + bM_4$ et $M_2 = aM_3 + bM_4$)*

  que $M_1 = -M_3 + 2M_4$ et que $M_2 = M_3 - M_4$. Ainsi M_1 et M_2 sont dans $\mathrm{Vect}(M_3, M_4)$, ce qui entraîne l'inclusion $\mathrm{Vect}(M_1, M_2) \subset \mathrm{Vect}(M_3, M_4)$, et achève donc de prouver l'égalité demandée.

Une correction de l'exercice 4.16 *énoncé*

1. - L'ensemble E contient la suite nulle (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\times 0 - (n+1)\times 0 + 0 = 0$), donc il n'est pas vide.
   - De plus, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de E, et λ et μ deux nombres complexes, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\begin{aligned}
   &(n+1)(\lambda u_{n+1} + \mu u_{n+1}) - (n+2)(\lambda u_n + \mu u_n) \\
   &\qquad + (\lambda u_{n-1} + \mu u_{n-1}) \\
   &= \lambda\underbrace{\left((n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1}\right)}_{=0} \\
   &\qquad + \mu\underbrace{\left((n+1)v_{n+1} - (n+2)v_n + v_{n-1}\right)}_{=0} \\
   &= 0
   \end{aligned}$$

   donc la suite $\lambda\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\,(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E.
   - Ainsi E est non-vide et stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. (a) Montrons que l'application f de E dans $\mathbb{R}^2$ qui à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (E) associe (u_0, u_1) est un isomorphisme.

(i) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E, et λ et μ deux réels,

$$\begin{aligned}&f\left(\lambda\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu\,(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\\&=(\lambda u_0+\mu v_0,\lambda u_1+\mu v_1)\\&=\lambda(u_0,v_0)+\mu(u_1,v_1)\\&=\lambda f\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)+\mu f\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\end{aligned}$$

donc $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

(ii) Pour tout couple (a,b) de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^2$, il suffit de prendre une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui vérifie $u_0=a$ et $u_1=b$ pour que cette suite soit un antécédent de (a,b) par f. Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

(iii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E prise dans le noyau de f.

> *On va montrer que $u_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ par* ***une récurrence sur deux termes*** *: on montre que la propriété est vraie pour les* ***deux*** *premiers termes, puis on montre que si elle est vraie pour* ***deux termes consécutifs*** *quelconques, alors elle est vraie pour le terme suivant.*

- Alors $f\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)=(0,0)$, donc $(u_0,u_1)=(0,0)$, autrement dit $\boxed{u_0=u_1=0}$.
- Supposons que pour un entier n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n-1}=u_n=0$.
  Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant dans E, on a $(n+1)u_{n+1}-(n+2)u_n+u_{n-1}=0$.
  On obtient alors que $(n+1)u_{n+1}=0$, ce qui donne $\boxed{u_{n+1}=0}$ car $n+1\neq 0$.
- Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n=0$, ce qui prouve que le noyau de f ne contient que la suite nulle, donc que $\boxed{f \text{ est injective}}$.

(iv) On peut enfin conclure que f est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^2$.

(b) Comme on a trouvé un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^2$, et que $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, on peut en déduire que $\boxed{\text{E est aussi un espace vectoriel de dimension 2}}$.

3. (a)

> *On vient de voir que $\dim(\mathrm{E})=2$, donc pour montrer que (a,b) est une base de E, il suffit de prouver que c'est une famille libre, et* ***NE PAS OUBLIER*** *de vérifier que ces deux suites sont dans E.*

(i) Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&(n+1)a_{n+1}-(n+2)a_n+a_{n-1}\\&=(n+1)\times 1-(n+2)\times 1+1=0\end{aligned}$$

donc la suite a est dans E ;
d'autre part

$$\begin{aligned}
&(n+1)b_{n+1}-(n+2)b_n+b_{n-1}\\
&=(n+1)\times\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{i!}-(n+2)\times\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\\
&=(n+1)\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}+\frac{1}{(n+1)!}\right]\\
&\qquad-(n+2)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}+\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}-\frac{1}{n!}\right]\\
&=0\times\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}+\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{n!}=0
\end{aligned}$$

donc donc la suite b est aussi dans E.

(ii) Soient λ et μ qui vérifient $\lambda a+\mu b=(0)_{n\in\mathbb{N}}$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lambda a_n+\mu b_n=0$, c'est-à-dire $\lambda+\mu\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}=0$.
En particulier, pour $n=0$, on obtient $\lambda+\mu=0$, puis pour $n=1$, $\lambda+\mu\times 2=0$. De ces deux égalités, on déduit sans fatigue excessive que $\lambda=\mu=0$, donc que la famille (a,b) est libre.

(iii) On sait que $\dim(\mathrm{E})=2$ et que (a,b) est une famille libre de 2 suites de E, donc c'est une base de E.

(b) D'après ce qui précède, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, il existe deux réels λ et μ uniques tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=\lambda a+\mu b$, autrement dit

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n=\lambda+\mu\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}.$$

Dans ce cas, $u_0=-1$ et $u_1=0$ entraînent que $\lambda+\mu=-1$ et $\lambda+2\mu=0$, donc $\mu=1$ et $\lambda=-2$, d'où

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n=-2+\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}.$$

(c) De nouveau, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E s'écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=\lambda a+\mu b$.
Or la suite constante a converge vers 1, et on reconnaît dans la suite b la suite des sommes partielles de la série exponentielle donnant e^1. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\lambda+\mu\mathrm{e}$.

Une correction de l'exercice 4.17 *énoncé*

Première méthode ➟ La dérivation est linéaire, et elle diminue le degré du polynôme à qui on l'applique, donc la dérivation définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, que l'on peut noter $D_{\mathbb{R}_n[X]}$.
Ainsi, comme $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - D_{\mathbb{R}_n[X]}$, c'est encore un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ comme combinaison linéaire d'endomorphismes.

➟ l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, donc f, à l'instar de tous les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$, est bijectif si, et seulement si, il est injectif, ce qui revient à ce que $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ 0_{\mathbb{R}_n[X]} \right\}$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$: si $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, $\deg(P') < \deg(P)$, donc a fortiori $P \neq P'$, d'où $f(P) \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, et $P \notin \mathrm{Ker}(f)$.
On a donc prouvé par contraposée que si $P \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, ce qui prouve que f est injectif, et achève le raisonnement.

Deuxième méthode : pour tout $j \in [\![0\ ;\ n]\!]$,

$$f(X^j) = X^j - jX^{j-1},$$

donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice M de terme général, pour tout $(i,j) \in [\![0\ ;\ n]\!]^2$,

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ -j & \text{si } i = j-1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, donc son déterminant est le produit des termes de sa diagonale, c'est-à-dire $\det(M) = 1$.
On en déduit que la matrice de f dans la base canonique est inversible car son déterminant est non nul, et donc que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Une correction de l'exercice 4.18 *énoncé*

(a) Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_E\}$.
Tout d'abord, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, donc ils

contiennent les deux 0_E, et par conséquent $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$. *(Ce premier point est tellement évident qu'il est souvent éludé.)*

Réciproquement, prenons un vecteur x de $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$, alors $u(x) = 0_E$ et $v(x) = 0_E$. Mais alors d'après la deuxième condition,

$$\begin{aligned} x = \mathrm{id}_E(x) &= (\lambda u + \mu v)(x) \\ &= \lambda u(x) + \mu v(x) = \lambda 0_E + \mu 0_E = 0_E \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(b) D'autre part, montrons que $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E$. Ici aussi, l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) \subset E$ est évidente.

Réciproquement, prenons un vecteur x de E. Alors grâce à la deuxième condition, comme dans le raisonnement précédent, $x = \lambda u(x) + \mu v(x)$.

Mais

$$v(\lambda u(x)) = \lambda v(u(x)) = \lambda(v \circ u)(x) = \lambda \theta_E(x) = \lambda 0_E = 0_E$$

donc $\lambda u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$.

Et de même, on prouve que $\mu v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.

Donc on a trouvé un couple de vecteurs de $\mathrm{Ker}(u) \times \mathrm{Ker}(v)$ dont la somme est égale à x, ce qui achève de prouver que $E \subset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$, et conclut notre raisonnement.

Une correction de l'exercice 4.19 *énoncé*

Pour montrer que u et v sont des projecteurs, il suffit de prouver que $u^2 = u$ et $v^2 = v$. Remarquons que $u + v = \mathrm{id}_E$, donc $u = \mathrm{id}_E - v$.

Ainsi $u^2 = u \circ u = u \circ (\mathrm{id}_E - v) = u - u \circ v$, ainsi prouver que $u^2 = u$ revient à prouver que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}E}$.

Et on a déjà vu en exercice que cette égalité équivaut à $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

À ce stade-là, on voit mal comment on peut analyser plus avant la conclusion à laquelle on veut arriver.
On est donc dans la situation où il faut fouiller la boîte à outils, c'est-à-dire les hypothèses de l'énoncé.

- La formule du rang nous donne $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$, et l'énoncé nous dit que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant \dim(E)$.

  On combine les deux pour obtenir

  $$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$$

  qui donne $\mathrm{rg}(v) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$, c'est-à-dire

  $$\dim(\mathrm{Im}(v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u)) \tag{4.2}$$

.

- Mais d'autre part, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u)$, on sait que $u(x) = 0_E$, donc comme $u = \mathrm{id}_E - v$, on en déduit que $(\mathrm{id}_E - v)(x) = 0_E$, d'où $v(x) = x$.
  Ainsi x s'écrit $v(\square)$, ce qui prouve que $x \in \mathrm{Im}(v)$.
  On a donc prouvé que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(v)$.
- On en déduit en particulier que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(v))$, ce qui, associé à l'inégalité (4.2), permet de conclure l'égalité des dimensions de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(v)$.
  Ainsi, grâce à l'inclusion ci-dessus, on peut en déduire l'égalité
  $$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v).$$
- Comme annoncé en préambule, on en déduit que $u \circ v$ est l'endomorphisme nul, puis comme dans la première méthode, on finit par conclure que u et v sont bien des projecteurs.

Une correction de l'exercice 4.20

énoncé

1. En effectuant les opérations
   $$P_3 \leftarrow P_3 + P_2 - 2P_1, \text{ puis } P_2 \leftarrow P_2 + P_1,$$
   on constate que
   $$\begin{aligned} \mathrm{rg}(P_1, P_2, P_3) &= \mathrm{rg}(1 + 3X - X^3, 2 + 5X + X^2, \theta) \\ &= \mathrm{rg}(1 + 3X - X^3, 2 + 5X + X^2) \\ &= 2 \textit{ (au vu des degrés).} \end{aligned}$$
2. Par définition du rang, on déduit de la question précédente que $\dim(F) = \dim(\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)) = 2$, or P_1 et P_2 sont deux polynômes non-colinéaires, et ils sont dans F, donc ils forment une base de F.
3. De nouveau grâce à l'opération $P_2 \leftarrow P_2 + P_1$, on constate que
   $$\begin{aligned} \mathrm{rg}(1, X, P_1, P_2) &= \mathrm{rg}(1, X, 1 + 3X - X^3, 2 + 5X + X^2) \\ &= 4 \textit{ (encore avec les degrés).} \end{aligned}$$
   donc ces quatre polynômes, qui sont dans $\mathbb{R}_3[X]$, forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.
   On en déduit que $\mathrm{Vect}(1, X)$ et $\mathrm{Vect}(P_1, P_2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$, autrement dit que $G = \mathrm{Vect}(1, X)$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire à F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Le théorème de la base incomplète affirme que pour toute famille ***libre*** *$(x_1,\dots,x_p)$ de p vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n, on peut trouver $n-p$ vecteurs $(x_{p+1},\dots,x_n)$ dans n'importe quelle base de E avec lesquels compléter la famille libre en une base $(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_n)$ de E.*
Ici on a complété la famille libre $(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)$ en une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ avec les polynômes 1 et X pris dans la base canonique.

4. *On va utiliser la deuxième méthode de l'exercice 4.10, en cherchant l'expression du projeté d'un polynôme quelconque dans la base canonique.*

Soit $\mathrm{P}=\alpha+\beta\mathrm{X}+\gamma\mathrm{X}^2+\delta\mathrm{X}^3$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
Cherchons d'abord les coordonnées de P dans la base $(1,\mathrm{X},\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)$, pour cela prenons quatre réels a,b,c,d. Alors

$$\begin{aligned}
a+b\mathrm{X}+c\mathrm{P}_1+d\mathrm{P}_2=\mathrm{P} &\iff (a+c+2d)+(b+3c+5d)\mathrm{X}+d\mathrm{X}^2-c\mathrm{X}^3\\
&\qquad\qquad =\alpha+\beta\mathrm{X}+\gamma\mathrm{X}^2+\delta\mathrm{X}^3\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & & +c & +2d & =\alpha\\ & b & +3c & +5d & =\beta\\ & & & d & =\gamma\\ & & -c & & =\delta\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=\alpha-2\gamma+\delta\\ b=\beta-5\gamma+3\delta\\ c=-\delta\\ d=\gamma\end{array}\right.
\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{P}=\underbrace{(\alpha-2\gamma+\delta)+(\beta-5\gamma+3\delta)\mathrm{X}}_{\in\mathrm{G}}+\underbrace{(-\delta)\mathrm{P}_1+\gamma\mathrm{P}_2}_{\in\mathrm{F}}.$$

On en déduit que le projeté de P sur F parallèlement à G est

$$(-\delta)\mathrm{P}_1+\gamma\mathrm{P}_2=(2\gamma-\delta)+(5\gamma-3\delta)\mathrm{X}+\gamma\mathrm{X}^2+\delta\mathrm{X}^3,$$

donc, en notant p le projecteur étudié, que

$$\underset{(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\mathrm{X}^3)}{\mathrm{Mat}}(p(\mathrm{P}))=\begin{pmatrix}2\gamma-\delta\\5\gamma-3\delta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2&-1\\0&0&5&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix},$$

dont on déduit que

$$\underset{(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\mathrm{X}^3)}{\mathrm{Mat}}(p)=\begin{pmatrix}0&0&2&-1\\0&0&5&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Enfin, la symétrie par rapport à F parallèlement à G étant $s = 2p - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}$, on en déduit que

$$\underset{(1,X,X^2,X^3)}{\mathrm{Mat}}(s) = 2\underset{(1,X,X^2,X^3)}{\mathrm{Mat}}(p) - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$