Définition 7.1 Produit scalaire

Application $\begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \langle x \mid y\rangle \end{array}$ telle que :

- bilinéaire,
- symétrique : $\langle x \mid y\rangle = \langle y \mid x\rangle$,
- positive : $\langle x \mid x\rangle \geqslant 0$,
- définie : $\langle x \mid x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Norme euclidienne

$$\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x\rangle}$$
$$\|x\|^2 = \langle x \mid x\rangle$$

➟ Cauchy-Schwarz : $|\langle x \mid y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$

➟ Une identité de polarisation : $\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

Proposition 7.1 Produits scalaires canoniques :

Dans $\mathbb{R}^n$:

$$\langle X \mid Y\rangle = X^\top \times Y = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$
$$\|X\|^2 = X^\top \times X = \sum_{i=1}^n x_i^2;$$

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors

- $(A)_{\bullet,j} = AE_j$, $(A)_{i,\bullet} = \left\langle E_i \mid AE_j\right\rangle = E_i{}^\top A$,
- $(A)_{i,j} = E_i{}^\top AE_j$,
- $(A\times B)_{i,j} = \left\langle (A)_{i,\bullet} \mid (B)_{\bullet,j}\right\rangle = E_i{}^\top ABE_j$.

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $(A,B) \mapsto \operatorname{Tr}\left(A^\top \times B\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (A)_{ij}(B)_{ij}$;

Dans $\mathscr{C}([a\,;\,b],\mathbb{R})$: $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Orthogonalité : vecteurs

$$x \perp y \Longleftrightarrow \langle x \mid y\rangle = 0$$
$$\Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{(Pythagore)}$$

$(e_i)_{i\in I}$ orthogonale si, et seulement si, $i \neq j \Rightarrow \left\langle e_i \mid e_j\right\rangle = 0$,
$(e_i)_{i\in I}$ orthonormée si, et seulement si, $\left\langle e_i \mid e_j\right\rangle = \delta_{i,j}$

Proposition 7.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Si $(x_i)_{i\in I}$, avec $I = [\![0,n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}$, est une famille **libre** de vecteurs de E, alors en prenant

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \varepsilon_p = \frac{1}{\|e_p\|}e_p \quad \text{où} \quad e_p = x_p - \sum_{i=0}^{p-1}\langle \varepsilon_i | x_p\rangle\, \varepsilon_i$$
$$= x_p - p_{\mathrm{Vect}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{p-1})}(x_p),$$
$$= p_{\mathrm{Vect}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{p-1})^\perp}(x_p), \quad \textit{(si E est de dim finie),}$$

on obtient une famille **orthonormale** $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E telle que pour tout $p \in I$, $\mathrm{Vect}(x_0,\ldots,x_p) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_p)$.

Proposition 7.3 Calculs dans une base orthonormée

Soit $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E :

coordonnées d'un vecteur :

$x = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i\rangle e_i$, autrement dit $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x|e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x|e_n\rangle \end{pmatrix} = X$.

produit scalaire et norme :

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i\rangle \times \langle y|e_i\rangle = X^\top \times Y,$$
$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i\rangle^2 = X^\top \times X.$$

Matrice d'un endomorphisme : si $u \in \mathscr{L}(E)$,
alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\langle u(e_j)|e_i\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

Orthogonalité : parties

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle x \mid a\rangle = 0\}$$
$$\mathrm{Vect}\left(a_1,\ldots,a_p\right)^\perp = \left\{a_1,\ldots,a_p\right\}^\perp$$
$$= \left\{x \in E \mid \forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ \langle x \mid a_i\rangle = 0\right\}$$
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b\end{smallmatrix}\right)\right\}^\perp = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by = 0\right\} = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} -b \\ a\end{smallmatrix}\right)\right)$$
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c\end{smallmatrix}\right)\right\}^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz = 0\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}\right\}^\perp = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0\right\}$$

Orthogonalité : sous-espaces vectoriels

Supplémentaire orthogonal : si V est un **sev de dim finie**,
$V \oplus V^\perp = E$ (et $V = (V^\perp)^\perp$).

Projeté orthogonal : $\forall x \in E$, $x = \underbrace{p_V(x)}_{\in V} + \underbrace{(x - p_V(x))}_{=p_{V^\perp}(x)\in V^\perp}$,

$$y = p_V(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} y \in V \\ x - y \in V^\perp \end{cases} \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \text{pour toute base orthonor-} \\ \text{mée } (e_1,\ldots,e_p) \text{ de V,} \\ y = \sum_{j=1}^p \langle x|e_j\rangle\, e_j. \end{array}\right.$$

Projecteur orthogonal et symétrie orthogonale :
soit $u \in \mathscr{L}(E)$,

u projecteur $\perp$ de E $\Longleftrightarrow u^2 = u$ et $\operatorname{Ker}(u) \perp \operatorname{Im}(u)$
$\Longleftrightarrow s = 2u - \mathrm{id}_E$ est une symétrie $\perp$

u symétrie $\perp$ de E $\Longleftrightarrow u^2 = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \perp \operatorname{Im}(u + \mathrm{id}_E)$
$\Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}(u + \mathrm{id}_E)$ est un projecteur $\perp$

Distance à un sous-espace vectoriel :

$$d(x,V) = \inf_{z\in V}\|x - z\| = \|x - p_V(x)\|$$
$$= \|p_{V^\perp}(x)\|$$