Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et on confondra les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec leur représentation en colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Produit scalaire, norme associée à un produit scalaire

Définition 7.1 – Produit scalaire, espace préhilbertien, espace euclidien

- On appelle **produit scalaire** sur E une application $(x, y) \in E^2 \mapsto \langle x \mid y\rangle \in \mathbb{R}$ *(parfois notée* $(x \mid y)$*, voire* $x \cdot y$*)*, possédant les propriétés suivantes :
  (1) **la bilinéarité :** $\forall (x, x_1, x_2, y, y_1, y_2) \in E^6$, $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,
  - $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid y\rangle = \lambda_1 \langle x_1 \mid y\rangle + \lambda_2 \langle x_2 \mid y\rangle$ *(linéarité à gauche)*;
  - $\langle x \mid \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \lambda_1 \langle x \mid y_1\rangle + \lambda_2 \langle x \mid y_2\rangle$ *(linéarité à gauche)*.

  (2) **la symétrie :** $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x \mid y\rangle = \langle y \mid x\rangle$;
  (3) **application positive :** $\forall x \in E$, $\langle x \mid x\rangle \geqslant 0$;
  (4) **application « définie » :** $\forall x \in E$, $\langle x \mid x\rangle = 0 \iff x = 0_E$.
- E, muni de ce produit scalaire, est appelé **espace préhilbertien réel**.
- On appelle **espace euclidien** tout espace préhilbertien de **dimension finie**.

Remarque 7.1 La linéarité à droite associée à la symétrie entraînent la linéarité à gauche.

Proposition 7.1 – Produits scalaires canoniques :

(1) dans $\mathbb{R}^n$: $(X, Y) \mapsto X^\top \times Y = \sum_{i=1}^{n} (X)_i (Y)_i$;

(2) dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $(A, B) \mapsto \operatorname{Tr}\left(A^\top \times B\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (A)_{ij} (B)_{ij}$;

(3) dans $\mathscr{C}([a\,;\,b], \mathbb{R})$: $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t$.

Exercice 7.1 – Produits scalaires chez les polynômes et les fonctions.
Montrer que les applications suivantes définissent un produit scalaire :

1. $(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} P^{(i)}(a) Q^{(i)}(a)$, où $a \in \mathbb{R}$, dans $E = \mathbb{R}[X]$;
2. (pour des réels $a_0, \dots, a_n$ deux à deux distincts) $(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(a_i) Q(a_i)$, dans $E = \mathbb{R}_n[X]$.
3. $(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t) g'(t) \mathrm{d}t$, dans $\mathscr{C}^1([0\,;\,1], \mathbb{R})$.

(mis à jour le 13 décembre 2024)

Remarque 7.2 – Bien identifier le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$

- Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\boxed{X^\top \times Y = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \langle X \mid Y \rangle.}$

  Le produit $X^\top \times Y$ est la forme matricielle du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), et si $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2,\ A \times E_j \text{ et } E_i{}^\top \times A \text{ sont la } j^e \text{ colonne et la } i^e \text{ ligne de } A,$$
$$\left\langle E_i \mid E_j \right\rangle = E_i{}^\top \times E_j = \delta_{i,j},$$
$$(A)_{i,j} = \left\langle E_i \mid AE_j \right\rangle = E_i^\top \times A \times E_j,$$
$$(A \times B)_{i,j} = \langle A^\top E_i \mid BE_j \rangle = \langle (A)_{i,\bullet} \mid (B)_{\bullet,j} \rangle = E_i^\top \times A \times B \times E_j.$$

Exercice 7.2. Montrer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^\top = -M$, alors $I_n + M$ est inversible.

Définition 7.2 – Norme associée à un produit scalaire

Dans un espace préhilbertien $(E, \langle . | . \rangle)$, l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ est la **norme associée** au produit scalaire.

Remarque 7.3 Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**,
et pour tout vecteur non nul $x \in E$, $\frac{1}{\|x\|} \cdot x$ est le vecteur unitaire obtenu par **normalisation** du vecteur x.

Proposition 7.2 – Polarisation, Parallélogramme, Cauchy-Schwarz

Soient $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien, et $(x, y) \in E^2$,

(1). $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$

(2). $\langle x \mid y \rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

$= \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ *(identité de polarisation)*,

(3). $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *(identité du parallèlogramme)*,

(4). $|\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*

avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Remarque 7.4 – applications usuelles de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

- Dans $\mathbb{R}^n$, $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$,
- dans $\mathscr{C}([a\ ;\ b])$, $\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 7.3 – Oral CCMP. Montrer que la somme des inverses de n réels strictement positifs de somme égale à 1 est supérieure ou égale à n^2.

2. Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales

Dans ce paragraphe, $(\mathrm{E}, \langle . \mid . \rangle)$ est un espace préhilbertien, et $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire.

Définition 7.3

- Deux vecteurs sont **orthogonaux**, on note $x \perp y$, lorsque $\langle x \mid y\rangle = 0$.
- L'orthogonal d'une partie A de E, noté $\mathrm{A}^\perp$, est la partie de E définie par
$$\mathrm{A}^\perp = \{x \in \mathrm{E} \mid \ \forall a \in \mathrm{A},\ \ \langle x | a\rangle = 0\}.$$
- Les parties A et B de E sont **orthogonales**, on note $\mathrm{A} \perp \mathrm{B}$, lorsque $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}^\perp$ ou $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}^\perp$, autrement dit : $\forall x \in \mathrm{A},\ \ \forall y \in \mathrm{B},\ \ \langle x \mid y\rangle = 0$.

Exemple 7.1. Dans l'espace usuel à trois dimensions, l'orthogonal d'une droite D est un plan, et toute droite de ce plan est orthogonale à D.

Exemple 7.2 – Hyperplans de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathrm{A} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, alors
$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\} = \{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathrm{X} \mid \mathrm{A}\rangle = 0\} = \{\mathrm{A}\}^\perp.$$

En particulier,
- dans $\mathbb{R}^2$, la droite d'équation $ax + by = 0$ est $\{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\}^\perp$,
- dans $\mathbb{R}^3$, le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\}^\perp$.

Proposition 7.3 – Sous-espace vectoriel orthogonal d'une partie

Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, alors $\mathrm{A}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, et $\mathrm{A} \subset \left(\mathrm{A}^\perp\right)^\perp$.

Remarques 7.5

- $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$;
- $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)^\perp = \{u_1,\dots,u_n\}^\perp$, autrement dit :
$$\boxed{x \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle x|u_i\rangle = 0.}$$
- Pour tout $(a,b)\in E^2$, $a = b \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \langle a|x\rangle = \langle b|x\rangle$
$\Longleftrightarrow \forall e \in \mathscr{B},\ \langle a|e\rangle = \langle b|e\rangle$ *(pour une base $\mathscr{B}$ de E)*

Définition 7.4 – Familles orthogonales, orthonormées

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est

- une **famille orthogonale** lorsque ses éléments sont deux à deux orthogonaux : $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j \Rightarrow \langle x_i|x_j\rangle = 0$;
- une **famille orthonormée (ou orthonormale)** lorsque c'est une famille orthogonale de vecteurs unitaires : $\forall (i,j)\in I^2,\ \langle x_i|x_j\rangle = \delta_{ij}$.

Exercice 7.4.
Montrer que chacune des suites de fonctions $(t\mapsto \cos(nt))_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(t\mapsto \sin(nt))_{n\in\mathbb{N}^*}$, est orthonormée dans $\mathscr{C}^0([-\pi\ ;\ \pi])$ muni du produit scalaire $(f,g)\mapsto \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Proposition 7.4 – Théorème de Pythagore

Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille orthogonale, alors $\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$.

Proposition 7.5

Une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont non nuls (en particulier une famille orthonormale) est une famille libre.

Proposition 7.6 – Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Si $(x_i)_{i\in I}$, avec $I = [\![0,n]\!]$ ou $I=\mathbb{N}$, est une famille **libre** de vecteurs de E, alors **il existe** une famille **orthonormale** $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E telle que pour tout $p\in I$, $\mathrm{Vect}(x_0,\dots,x_p) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_p)$.

Il suffit de prendre pour tout $p \geqslant 0$, $\varepsilon_p = \dfrac{1}{\|e_p\|}.e_p$ où $e_p = x_p - \sum_{i=0}^{p-1}\langle\varepsilon_i|x_p\rangle\,\varepsilon_i$.

Remarque 7.6 On verra plus tard (voir la proposition 7.11) que :

- $\sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \, \varepsilon_i$ est le projeté orthogonal de x_p sur $\mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{p-1})$;
- $e_p = x_p - \sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \, \varepsilon_i$, est le projeté orthogonal de x_p sur $\left(\mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{p-1})\right)^{\perp}$.

Exercice 7.5 – Oral ENSAM (PSI).

.1. Montrer que $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}'(0)\mathrm{Q}'(0) + \mathrm{P}''(0)\mathrm{Q}''(0)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

.2. Orthonormaliser la famille $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$.

3. Bases orthonormées dans un espace euclidien

Proposition 7.7 – Existence de bases orthonormées

(1) Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormale.

(2) Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormale.

Remarque 7.7 la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est bien entendu une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique !
La la base de Lagrange construite sur $(a_0, \dots, a_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ pour le produit scalaire $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q} \rangle = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_i)\mathrm{Q}(a_i)$.

Proposition 7.8 – Calculs dans une base orthonormée

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E.

(1) $\forall x \in \mathrm{E},\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i$, autrement dit $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x | e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x | e_n \rangle \end{pmatrix}$.

(2) Pour tous vecteurs x, y de E, en notant $\mathrm{X} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x)$ et $\mathrm{Y} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(y)$,

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle \times \langle y | e_i \rangle = \mathrm{X}^{\top} \times \mathrm{Y}, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle^2 = \mathrm{X}^{\top} \times \mathrm{X}.$$

(3) Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $m_{i,j} = \langle f(e_j) | e_i \rangle$.

Remarque 7.8 Une fois qu'on a choisi une base orthonormée, les coordonnées d'un vecteur sont ses produits scalaires avec chacun des vecteurs de la base, et tous les calculs sont canoniques comme dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7.6 – Oral IMT. On suppose qu'une famille libre de vecteurs unitaires $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ d'un espace préhilbertien E vérifie la propriété

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de E.

4. Supplémentaires orthogonaux, projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel

Proposition 7.9 – Sous-espaces orthogonaux et somme directe

Des sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux sont en somme directe.

Dans toute la fin de cette section, E désignera un espace préhilbertien, et $\boxed{\mathrm{V} \text{ un sous-espace vectoriel de dimension finie de } \mathrm{E}}$.

Proposition 7.10 – L'orthogonal d'un sous-espace de dimension finie est un supplémentaire

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{V}^{\perp}$ est le seul sous-espace de E à la fois orthogonal et supplémentaire à V.

Définition 7.5 – Sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal

On dit que $\mathrm{V}^{\perp}$ est le **supplémentaire orthogonal** de V, et on a $\left(\mathrm{V}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{V}$.
Si de plus $\dim(\mathrm{E})$ **est finie,** $\dim\left(\mathrm{V}^{\perp}\right) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{V})$.

Méthode 7.1 – Pour montrer que $F = V^{\perp}$:

on peut montrer que

- $F \perp V$ *(ce qui entraîne alors que* $F \subset V^{\perp}$ *et que* F *et* V *sont en somme directe),*
- *et que* $E = F + V$*, ce qui, dans un espace de dimension finie revient à montrer que* $\dim(F) + \dim(V) = \dim(E)$.

Remarques 7.9 – Rappels : projecteur, symétrie

$p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur de E si, et seulement si, $p \circ p = p$; et dans ce cas :

- $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$,
- $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$,
- $2p - \mathrm{id}_E$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

$s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie de E si, et seulement si, $s \circ s = \mathrm{id}_E$; et dans ce cas :

- $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$,
- $\frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$ est la projection sur $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Définition 7.6 – Projecteur orthogonal, réflexion

- On appelle **projecteur orthogonal** sur V, on le note p_V, le projecteur sur V parallèlement à $V^{\perp}$.
- On appelle **réflexion** d'axe D (D étant une droite de E) la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $D^{\perp}$.

Remarque 7.10 – Rappel : ne pas oublier que $p_V + p_{V^{\perp}} = \mathrm{id}_E$, donc que

$$\text{pour tout } x \in E,\quad p_{V^{\perp}}(x) = x - p_V(x), \text{ et de même } p_V(x) = x - p_{V^{\perp}}(x).$$

Proposition 7.11 – Caractérisations du projeté orthogonal d'un vecteur

Pour tout vecteur $x \in E$,

$$y = p_V(x) \iff \begin{cases} y \in V \\ x - y \in V^{\perp} \end{cases} \iff \text{pour toute base orthonormée de } V\ (e_1, \ldots, e_p),\quad y = \sum_{j=1}^{p} \langle x | e_j \rangle\, e_j.$$

Remarque 7.11 – Projection orthogonale sur une droite
Soient $a \in E \setminus \{0_E\}$, et $x \in E$. Le vecteur $\frac{1}{\|a\|}a$ forme une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(a)$, donc

$$p_{\mathrm{Vect}(a)}(x) = \left\langle x \mid \frac{1}{\|a\|}a \right\rangle \frac{1}{\|a\|}a = \frac{\langle x \mid a\rangle}{\langle a \mid a\rangle}\,a.$$

Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une *b.o.n* de E, et $X_a = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(a)$, alors $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(p_{\mathrm{Vect}(a)}) = \dfrac{1}{\|a\|^2} X_a \times X_a^{\top}$.

On remarque de plus que $\mathrm{id}_E = \sum_{i=1}^{n} p_{\mathrm{Vect}(e_i)}$, et que $I_n = \sum_{i=1}^{n} X_{e_i} \times X_{e_i}^{\top}$

Exercice 7.7. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(1,-1,1)$.

Exercice 7.8 – Oral CCP - sans préparation.

.1. Montrer que $(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

.2. Calculer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathrm{Vect}(1,X)$.

Proposition 7.12 – Caractérisation d'un projecteur orthogonal

$u \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\begin{cases} u \circ u = u, \\ \mathrm{Im}(u) \perp \mathrm{Ker}(u). \end{cases}$

Exercice 7.9. Soit E un espace préhilbertien réel, et p un projecteur de E.
Montrer que p est un projecteur orthogonal, que $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$, si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Proposition 7.13 – Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Pour tout vecteur x de E, l'application définie sur V par $z \mapsto \|x - z\|$ possède un minimum atteint en l'unique vecteur $p_V(x)$.
On appelle **distance de x à V** ce nombre :

$$d(x,V) = \|x - p_V(x)\| = \inf_{z\in V} \|x - z\|.$$

Remarques 7.12 Toujours avec les mêmes hypothèses, pour tout $x \in E$,

$$d(x,V) = \|p_{V^\perp}(x)\|, \text{ et } \|x\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x)\|^2 = d(x,V)^2 + \|p_V(x)\|^2.$$

Exercice 7.10 – Oral CCMP. Calculer $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 \left(t^3 - at^2 + bt - c\right)^2 \mathrm{d}\,t$.

Exercice 7.11 – Oral CCINP (sans préparation).
On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par $\langle \mathrm{M} \mid \mathrm{N} \rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}^\top \times \mathrm{N})$.
Soient $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x - 1 & 4 \\ -2 & \mathrm{sh}x \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x + 1 & 3 \\ 6 & -\mathrm{sh}x \end{pmatrix}$.

.1. A-t-on $\langle \mathrm{A} \mid \mathrm{B} \rangle = 0$?

.2. Montrer que l'espace des matrices symétriques et celui des antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

.3. Déterminer la distance de A à l'espace des symétriques.

Preuves et solutions

Une correction de l'exercice 7.1 *énoncé*

.1. Remarquons que cette somme est faussement infinie car tout polynôme a ses dérivées nulles à partir d'un certain rang.

- La symétrie vient de la commutativité du produit des réels,
- la bilinéarité vient de la linéarité de la dérivation, puis de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication,
- et la positivité provient de ce qu'une somme de réels positifs est positive.
- Le caractère défini provient de ce que si $\sum_{i=0}^{+\infty}(\mathrm{P}^{(i)}(a))^2 = 0$, alors *(une somme de réels positifs étant nulle si, et seulement si, tous ces réels sont nuls)* $\mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \cdots = \mathrm{P}^{(\deg(\mathrm{P}))}(a) = 0$, donc a est racine de P d'ordre au moins $\deg(\mathrm{P})+1$, ce qui entraîne que $(\mathrm{X}-a)^{\deg(\mathrm{P})+1}$ divise P, ce qui n'est possible que si P est le polynôme nul.

> *On peut aussi utiliser la formule de Taylor pour les polynômes*
>
> $$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k.$$

.2.
- La symétrie vient de la commutativité du produit des réels,
- la bilinéarité vient des règles de calcul sur les fonctions *(en particulier de ce que $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$)*, puis de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication,
- et la positivité provient de ce qu'une somme de réels positifs est positive.
- Le caractère défini provient de ce que si $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}^2(a_i) = 0$, alors (une somme de réels positifs étant nulle si, et seulement si, tous ces réels sont nuls) $\mathrm{P}(a_0) = \cdots = \mathrm{P}(a_n) = 0$, donc admet au moins $n+1$ racines. Or $\deg(\mathrm{P}) \leqslant n$, donc P est forcément le polynôme nul.

> *Dans l'exercice 14.10, on établit que la base de Lagrange construite sur $(a_0, \ldots, a_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.*

.3. On commence par remarquer que si $f, g \in \mathrm{E}$, alors f' et g' sont continues sur $[0\ ;\ 1]$, d'où l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$.

- La bilinéarité de φ provient de la linéarité de l'intégrale, ainsi que de la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$,

- et la symétrie provient de la commutativité du produit des réels.
- Pour tout $f \in \mathrm{E}$,

$$\varphi(f,f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}\,t \geqslant 0$$ *(par la positivité de l'intégrale des fonctions continues).*

- Si $\varphi(f,f) = 0$, alors

$$f(0)^2 + \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}\,t = 0$$

or derechef, par la positivité de l'intégrale des fonctions continues, $\int_0^1 (f'(t))^2 \,\mathrm{d}\,t \geqslant 0$, donc

$$f(0)^2 + \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}\,t = 0 \Longleftrightarrow f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}\,t = 0.$$

Or $f \in \mathrm{E}$, donc la fonction $(f')^2 : t \mapsto f'(t)^2$ est continue sur $[0\,;\,1]$, et positive sur $[0\,;\,1]$, ainsi par la stricte positivité de l'intégrale des fonctions continues, on peut en déduire que la fonction $t \mapsto f'(t)^2$ est nulle sur $[0\,;\,1]$.
Ainsi comme f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$, on obtient par le théorème fondamental de l'analyse que pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = 0 + \int_0^x 0\mathrm{d}t = 0,$$

autrement dit f est nulle sur $[0\,;\,1]$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 7.2

énoncé

Supposons que $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, et montrons que $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ est inversible.

> *Les méthodes pour montrer qu'une matrice est inversible sont légions. Je vous invite d'ailleurs à y consacrer la confection d'une fiche de méthodes « pour montrer qu'une matrice est inversible ».*
> *Ici, on va montrer que le noyau de $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ (à vrai dire le noyau de son endomorphisme canoniquement associé) est réduit au vecteur nul (autrement dit que -1 n'est pas valeur propre de M).*

Prenons $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})$, et montrons que $\mathrm{X} = 0_{\mathbb{R}^n}$.

> *Pour montrer que $X = 0_{\mathbb{R}^n}$, on utilise cette nouvelle méthode que nous fournit le caractère « défini » du produit scalaire : on montre que $\langle X \mid X\rangle = 0$. Autrement dit avec la forme canonique du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, on va montrer que $X^\top X = 0$.*

De $X \in \mathrm{Ker}(I_n + M)$ on déduit que $(I_n + M)X = 0_{\mathbb{R}^n}$, d'où $MX = -X$.

- En composant cette égalité par la transposition qui est linéaire on obtient $(MX)^\top = -X^\top$, puis selon la règle de calcul entre transposition et produit matriciel, $X^\top M^\top = -X^\top$, ce qui donne par l'antisymétrie de M, $X^\top M = X^\top$
- En multipliant à gauche les deux membres de l'égalité $MX = -X$ par $X^\top$, on obtient $X^\top MX = -X^\top X = -\|X\|^2$.
- Et en multipliant à droite par X dans $X^\top M = X^\top$, on obtient $X^\top MX = X^\top X = \|X\|^2$.
  On en déduit ainsi que $\|X\|^2 = -\|X\|^2$, donc que $\|X\| = 0$, ce qui entraîne $X = 0_{\mathbb{R}^n}$, C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 7.2 *énoncé*

Soient $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien, et $(x, y) \in E^2$,

1. $\|x+y\|^2 = \langle x+y \mid x+y\rangle = \langle x \mid x+y\rangle + \langle y \mid x+y\rangle$ *(par linéarité à gauche)*
   $= \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle$ *(par linéarité à droite)*
   $= \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$ *(par symétrie du produit scalaire).*
2. les identités de polarisation et du parallèlogramme s'obtiennent facilement avec la formule précédente.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons

$$P(t) = \|tx + y\|^2 .$$

   Alors pour tout réel t,

   - $P(t) \geqslant 0$;
   - $P(t) = \|tx+y\|^2 = \|x\|^2\, t^2 + 2\langle x \mid y\rangle\, t + \|y\|^2$ est un polynôme du second degré.

   Ce polynôme du second degré est positif sur tout $\mathbb{R}$, donc son discriminant $\Delta = 4\left(\langle x \mid y\rangle^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\right)$ est négatif, ce qui nous donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   Il y a égalité $\langle x \mid y\rangle^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2$ si, et seulement si, le discriminant est nul, ce qui est vrai si, et seulement si, P a une racine unique t pour laquelle $P(t) = \|tx+y\|^2 = 0$, qui équivaut à la relation de colinéarité $y = -tx$.

Une correction de l'exercice 7.3 *énoncé*

Tout d'abord

$$\begin{aligned} n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \quad \text{(car les } x_k \text{ sont des réels strictement positifs)} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{x_k})^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2\right) \quad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \\ &= 1 \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \quad \text{(car par hypothèse la somme des } x_k \text{ vaut 1)} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue.

Une preuve de la proposition 7.3 *énoncé*

Soit F un sous-espace vectoriel de E, et

$$\mathrm{F}^{\perp} = \{x \in \mathrm{E} \mid \ \forall a \in \mathrm{F}, \ \langle x|a\rangle = 0\}.$$

- Le vecteur nul 0_{E} est évidemment orthogonal à tous les vecteurs de F, donc $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}^{\perp}$, et $\mathrm{F}^{\perp}$ est non vide.
  Soit $(x, y) \in \left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^2$ et λ, μ deux réels, alors pour tout $a \in \mathrm{F}$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y \mid a\rangle &= \lambda \langle x \mid a\rangle + \mu \langle y \mid a\rangle \quad \text{(par linéarité à gauche du produit scalaire)} \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 \quad \text{(car } x, y \in \mathrm{F}^{\perp}\text{)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par combinaison linéaire.
- Pour tout $x \in \mathrm{F}$, alors pour tout $y \in \mathrm{F}^{\perp}$, $\langle x \mid y\rangle = 0$, donc $x \in \left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$.

Une correction de l'exercice 7.4 *énoncé*

Pour tout $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$, notons

$$\begin{aligned}
\langle \cos(p\bullet) \mid \cos(q\bullet)\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt)\times\cos(qt)\,\mathrm{d}\,t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos((p+q)t)+\cos((p-q)t)\right)\mathrm{d}\,t\\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{p+q}\sin((p+q)t)+\frac{1}{p-q}\sin((p-q)t)\right]_{-\pi}^{\pi} & = 0 \text{ si } p\neq q,\\ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2p}\sin(2pt)+t\right]_{-\pi}^{\pi} & = \frac{1}{2\pi}\times 2\pi = 1 \text{ si } p=q.\end{cases}\\
&= \delta_{p,q} \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\langle \sin(p\bullet) \mid \sin(q\bullet)\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(pt)\times\sin(qt)\,\mathrm{d}\,t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(-\cos((p+q)t)+\cos((p-q)t)\right)\mathrm{d}\,t\\
&= \delta_{p,q} \quad \textit{(comme au-dessus)}
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 7.4

énoncé

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale, alors

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \;\middle|\; \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \right\rangle && \textit{(il vaut mieux utiliser deux indices de sommation différent pour appliquer la bilinéarité)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle x_k \;\middle|\; \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \right\rangle && \textit{(par linéarité à gauche)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \langle x_k \mid x_\ell \rangle \right) && \textit{(à droite)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle x_k \mid x_k \rangle && \textit{(car } (x_1, \dots, x_n) \textit{ est une famille orthogonale, donc } \langle x_k \mid x_\ell \rangle = 0 \textit{ pour } k \neq \ell) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 7.5

énoncé

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale dont les vecteurs sont non nuls, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E.$$

Alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i \right\|^2 = 0,$$

c'est-à-dire grâce au théorème de Pythagore

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| \; \|x_i\|^2 = 0.$$

Une somme de réels positifs ne pouvant être nulle que si ces réels sont nuls on en déduit que

$$\forall k \in [\![1 \; ; \, n]\!], \quad |\lambda_k| \; \|x_k\| = 0,$$

or les x_i sont non nuls, donc leurs normes sont non nulles, d'où

$$\forall k \in [\![1 ; n]\!], \quad \lambda_k = 0. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Autre méthode : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale dont les vecteurs sont non nuls, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E.$$

Alors en effectuant le produit scalaire avec x_1,

$$\begin{aligned}
\left\langle x_1 \mid \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\rangle = 0 &\iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_1 \mid x_k \rangle = 0 \ \textit{(par linéarité à droite du produit scalaire)} \\
&\iff \lambda_1 \|x_1\|^2 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k 0 = 0 \ \textit{(car } \langle x_1 \mid x_k \rangle = 0 \textit{ pour tout } k \geqslant 2 \textit{ car les } x_i \textit{ sont deux à deux orthogonaux)} \\
&\iff \lambda_1 \|x_1\| = 0 \\
&\iff \lambda_1 = 0 \ \textit{(car } x_1 \neq 0_E \textit{ donc } \|x_1\| \neq 0\textit{)}.
\end{aligned}$$

Ce qu'on vient de faire avec λ_1 peut être fait avec n'importe lequel des scalaires λ_i, donc tous ces scalaires sont nuls. C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 7.6 *énoncé*

Soit $(x_i)_{i \in I}$, avec $I = [\![0, n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}$, une famille **libre** de vecteurs de E.
Procédons par récurrence.

- Au rang $p = 0$, (x_0) est une famille libre, donc $x_0 \neq 0_E$, d'où $\|x_0\| \neq 0$, ainsi le vecteur $\varepsilon_0 = \frac{1}{\|x_0\|} x_0$ vérifie :
  - $\|\varepsilon_0\| = \left\| \frac{1}{\|x_0\|} x_0 \right\| = \frac{1}{\|x_0\|} \|x_0\| = 1$, donc (ε_0) est une famille orthonormale ;
  - $\varepsilon_0 \in \mathrm{Vect}(x_0)$, donc $\mathrm{Vect}(\varepsilon_0) \subset \mathrm{Vect}(x_0)$, et ce sont deux sous-espaces vectoriels de dimension 1, donc $\mathrm{Vect}(\varepsilon_0) = \mathrm{Vect}(x_0)$.
- Supposons qu'à un rang $p \geqslant 1$, on dispose d'une famille orthonormale $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1})$ telle que $\mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{p-1}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1})$.

  Alors au rang suivant p, prenons $e_p = x_p - \sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \varepsilon_i$.

  - Ce vecteur e_p est non nul car sinon $x_p \in \mathrm{Vect}\left(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(x_0, \dots, x_{p-1}\right)$, ce qui contredit l'indépendance linéaire de la famille $\left(x_0, \dots, x_p\right)$.

On peut donc prendre $\varepsilon_p = \frac{1}{\|e_p\|} e_p$, qui est alors un vecteur de norme 1.

- Pour tout $j \in [\![0\ ;\ p-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \varepsilon_p \mid \varepsilon_j \right\rangle &= \frac{1}{\|e_p\|} \left\langle e_p \mid \varepsilon_j \right\rangle = \frac{1}{\|e_p\|} \left\langle x_p - \sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \varepsilon_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|e_p\|} \left(\left\langle x_p \mid \varepsilon_j \right\rangle - \sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \left\langle \varepsilon_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \right) \quad \textit{(par linéarité à gauche)} \\
&= \frac{1}{\|e_p\|} \left(\left\langle x_p \mid \varepsilon_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=0}^{p-1} \left\langle \varepsilon_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \varepsilon_i | x_p \right\rangle \right) \\
&= \frac{1}{\|e_p\|} \left(\left\langle x_p \mid \varepsilon_j \right\rangle - \left\langle \varepsilon_j | x_p \right\rangle \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc la famille $\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_p\right)$ est orthonormale.

- D'une part,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p &\in \operatorname{Vect}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{p-1}, x_p\right) \quad \textit{(par construction de } \varepsilon_p \textit{ et de } e_p\textit{)} \\
&= \operatorname{Vect}\left(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_p\right) \quad \textit{(par récurrence),}
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Vect}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{p-1}, \varepsilon_p\right) \subset \operatorname{Vect}\left(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_p\right)$.
Réciproquement, en écrivant

$$x_p = \|e_p\| \varepsilon_p + \sum_{i=0}^{p-1} \langle \varepsilon_i | x_p \rangle \varepsilon_i,$$

on a $x_p \in \operatorname{Vect}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_p\right)$, et on finit de la même façon.
Donc on a bien la double inclusion, c'est-à-dire l'égalité

$$\operatorname{Vect}\left(x_0, \ldots, x_p\right) = \operatorname{Vect}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_p\right).$$

Et la récurrence est achevée.

Une correction de l'exercice 7.5

énoncé

1. ➠ La symétrie vient de la commutativité du produit des réels, la bilinéarité vient de la linéarité de la dérivation, puis de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication, et la positivité provient de ce qu'une somme de réels positifs est positive.

- Le caractère défini provient de ce que si $\sum_{i=0}^{2}(P^{(i)}(0))^2 = 0$, alors (une somme de réels positifs étant nulle si, et seulement si, tous ces réels sont nuls) $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$.
  Donc, grâce à la formule de Taylor pour les polynômes

$$P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} X^i = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2} X^2 = 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2.
- $\|1\|^2 = \langle 1 \mid 1 \rangle = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$, donc 1 est déjà normalisé.
- $\langle 1 \mid X \rangle = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0$ donc $1 \perp X$,
  et

$$\|X\|^2 = \langle X \mid X \rangle = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

  donc la famille $(1, X)$ est orthonormée.
- On constate de même que $1 \perp X^2$ et $X \perp X^2$, puis que

$$\left\|X^2\right\|^2 = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 2 = 4$$

  donc que $\left\|X^2\right\| = 2$, d'où que $\left\|\frac{1}{2} X^2\right\| = 1$.
- On conclut que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(1, X, X^2)$ donne la famille $(1, X, \frac{1}{2} X^2)$

Une preuve de la proposition 7.7 *énoncé*

1. Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. On rappelle que la définition originelle d'un espace vectoriel de dimension finie est un espace vectoriel qui dispose d'une famille génératrice finie, et que le théorème de la base incomplète nous permet d'extraire de cette famille une base de E.

   Il suffit alors de faire subir à cette base l'implacable procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une famille orthonormée. D'après la proposition 7.5, cette famille est libre, ainsi d'après le théorème de la base incomplète, on peut donc la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ de E.

   En appliquant à cette base le procédé de Gram-Schmidt, on obtient une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ dont les k premiers vecteurs coïncident avec ceux de la famille donnée. C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 7.8 *énoncé*

Soient $(\mathrm{E}, \langle .|. \rangle)$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Soit $x \in \mathrm{E}$, notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

   Alors $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, et pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\langle x \mid e_i \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mid e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k \mid e_i \rangle \quad \textit{(par linéarité à gauche de produit scalaire)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{k,i} \quad \textit{(car } (e_1, \dots, e_n) \textit{ est une base orthonormée)} \\
&= x_i, \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

2. Soient $x, y \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned}
\langle x \mid y \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle e_k \mid \sum_{i=1}^{n} \langle y \mid e_i \rangle e_i \right\rangle \quad \textit{(d'après le résultat précédent)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle \left(\sum_{i=1}^{n} \langle y \mid e_i \rangle \langle e_k \mid e_i \rangle \right) \quad \textit{(par linéarité à gauche, puis à droite)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle \left(\sum_{i=1}^{n} \langle y \mid e_i \rangle \delta_{k,i} \right) \quad \textit{(car } (e_1, \dots, e_n) \textit{ est une base orthonormée)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle (\langle y \mid e_k \rangle) = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle \times \langle y \mid e_k \rangle .
\end{aligned}$$

3. Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $m_{i,j}$ est la coordonnée sur le vecteur e_i du vecteur $f(e_j)$, et cette coordonnée, d'après le premier point de la proposition, vaut bien $\left\langle f(e_j) \mid e_i \right\rangle$.

Une correction de l'exercice 7.6 *énoncé*

Pour montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E, il suffit de montrer que :

➟ c'est une famille orthonormale, autrement dit que

$$\forall (i,j) \in [\![1\ ;\ p]\!]^2, \ \left\langle e_i \mid e_j \right\rangle = \delta_{i,j},$$

ce qui implique que c'est une famille libre ;

- et que c'est une famille génératrice, autrement dit que

$$\mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p\right) = \mathrm{E}.$$

1. Appliquons l'égalité donnée en hypothèse pour $x = e_1$:

$$\begin{aligned} 1 &= \|e_1\|^2 \quad \textit{(car par hypothèse les } e_i \textit{ sont unitaires)} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \langle e_i \mid e_k \rangle^2 \quad \textit{(par hypothèse)} \\ &= \langle e_1 \mid e_1 \rangle^2 + \sum_{k=2}^{p} \langle e_i \mid e_k \rangle^2 = 1 + \sum_{k=2}^{p} \langle e_i \mid e_k \rangle^2, \end{aligned}$$

donc $\sum\limits_{k=2}^{p} \langle e_i \mid e_k \rangle^2 = 0$, ce qui n'est possible que si pour tout $k \in [\![2 \,;\, p]\!]$, $\langle e_1 \mid e_k \rangle = 0$.
Donc e_1 est orthogonal à tous les autres vecteurs.
La propriété caractéristique de la famille $\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ est indépendante de la numérotation de ses vecteurs, donc toute propriété concernant e_1 vis à vis des autres vecteurs, est généralisable à chaque vecteur de la famille.

> *Les personnes qui jugent cet argument irrecevable feront elles-mêmes le cas général.*

Donc la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthogonale.

Comme on sait que les e_i sont unitaires, on peut conclure que $\boxed{\text{la famille } (e_1, \ldots, e_p) \text{ est orthonormée}}$.

> *On sait dorénévant que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormée, donc elle est libre, mais il reste à prouver qu'elle est génératrice de E pour achever l'exercice.*
> *Pour montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p\right)$, comme l'inclusion de droite à gauche est évidente, il reste à montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $x \in \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p\right)$. Pour cela on montrer que $x = p_{\mathrm{Vect}\left(e_1,\ldots,e_p\right)}(x)$, c'est-à-dire $x = \sum\limits_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle e_k$, et ici aussi on va prouver cette égalité en montrant que la norme de la différence des deux vecteurs est nulle.*

2. Soit x un vecteur de E, et y le vecteur $y = \sum\limits_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle e_k$, montrons que $x = y$.

Alors pour $i \in [\![1 \; ; \; n]\!]$

$$\begin{aligned}\langle y \mid e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k \mid e_i \right\rangle &= \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, \langle e_k \mid e_i \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, \delta_{i,k} = \langle x \mid e_i \rangle \;\; \textit{(par orthonormalité de } (e_i)_{i \in [\![1\,;\,p]\!]}\textit{)}.\end{aligned}$$

donc, par hypothèse de l'exercice

$$\|x-y\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x-y \mid e_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{p} (\langle x \mid e_k \rangle - \langle y \mid e_k \rangle)^2 = 0, \;\; \text{C.Q.F.D.}$$

Une preuve de la proposition 7.9 *énoncé*

Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p$, supposons que

$$x_1 + \cdots + x_p = 0_{\mathrm{E}} \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=1}^{p} x_k = 0_{\mathrm{E}}.$$

Alors grâce au théorème de Pythagore

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_i\|^2 = 0.$$

Une somme de réels positifs ne pouvant être nulle que si ces réels sont nuls on en déduit que

$$\forall k \in [\![1 \; ; \; n]\!], \;\; \|x_k\| = 0,$$

autrement dit

$$\forall k \in [\![1 \; ; \; n]\!], \;\; x_k = 0_{\mathrm{E}}, \;\; \text{C.Q.F.D.}$$

Autre méthode : Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p$, supposons que

$$x_1 + \cdots + x_p = 0_{\mathrm{E}} \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=1}^{p} x_k = 0_{\mathrm{E}}.$$

Alors en effectuant le produit scalaire avec x_1,

$$\begin{aligned}
&\left\langle x_1 \mid \sum_{k=1}^{p} x_k \right\rangle = 0 \\
\Longleftrightarrow &\sum_{k=1}^{p} \langle x_1 \mid x_k \rangle = 0 \text{ \textit{(par linéarité à droite du produit scalaire)}} \\
\Longleftrightarrow &\|x_1\|^2 + \sum_{k=2}^{p} 0 = 0 \text{ \textit{(car $\langle x_1 \mid x_k\rangle = 0$ pour tout $k \geqslant 2$ car les E_i sont deux à deux orthogonaux)}} \\
\Longleftrightarrow &\|x_1\| = 0 \\
\Longleftrightarrow &x_1 = 0_{\mathrm{E}}.
\end{aligned}$$

Ce qu'on vient de faire avec x_1 peut être fait avec n'importe lequel des vecteurs x_i, donc tous ces vecteurs sont nuls. C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 7.10 *énoncé*

Montrer que $\mathrm{V} \oplus \mathrm{V}^{\perp} = \mathrm{E}$.

- Les sous-espaces vectoriels V et $\mathrm{V}^{\perp}$ sont orthogonaux donc en somme directe par la proposition précédente.
- Le sous-espace vectoriel V est de dimension finie, donc par le procédé de Gram-Schmidt sur une base quelconque de V, on peut obtenir une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de V .

  Pour tout vecteur x de E, notons $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle e_i$, et montrons que $x - y \in \mathrm{V}^{\perp}$.

  Pour cela, il suffit de vérifier (voir la remarque 14.7) que $x - y$ est orthogonal à tout vecteur d'une base de V.
  Soit $j \in [\![1 \,;\, n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\langle x - y \mid e_j \rangle &= \langle x \mid e_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle e_i \mid e_j \right\rangle \\
&= \langle x \mid e_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle \langle e_i \mid e_j \rangle \\
&= \langle x \mid e_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle \delta_{i,j} \\
&= \langle x \mid e_j \rangle - \langle x \mid e_j \rangle = 0.
\end{aligned}$$

  Ainsi $x - y \in \mathrm{V}^{\perp}$, donc $x = y + (x - y)$ est dans $\mathrm{V} + \mathrm{V}^{\perp}$.

On peut donc conclure que $E \subset V + V^{\perp}$, donc que $E = V + V^{\perp}$.

➟ On a donc prouvé que $E \subset V \oplus V^{\perp}$

Montrons que $\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = V$.

➟ On sait déjà par la proposition 7.3 que $V \subset \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$.

➟ Réciproquement, soit $z \in \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$. On vient de voir que $E = V \oplus V^{\perp}$, donc il existe un unique $x \in V$ tel que $z = x + (z - x)$ avec $z - x \in V^{\perp}$.
alors

$$\langle z - x \mid z - x \rangle = \langle z \mid z - x \rangle - \langle x \mid z - x \rangle$$ *(par bilinéarité du produit scalaire)*

or
- $\langle z \mid z - x \rangle = 0$, car $z \in \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$ et $z - x \in V^{\perp}$,
- $\langle x \mid z - x \rangle = 0$, car $x \in V$ et $z - x \in V^{\perp}$,

donc $\langle z - x \mid z - x \rangle = 0$, donc $z - x = 0_E$, d'où $z = x$, ce qui prouve que $z \in V$.

Enfin si E est de dimension finie, il découle directement de $E = V \oplus V^{\perp}$ que $\dim\left(V^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(V)$.

Une correction de l'exercice 7.7 *énoncé*

Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $a = (1,-1,1)$, et s la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(a)$. Alors $s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - 2\, p_{\mathrm{Vect}(a)}$.

Notons de plus $X_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors d'après la remarque précédente :

$$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(s) = I_3 - 2 \times \frac{1}{3} X_a \times X_a^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une correction de l'exercice 7.8 *énoncé*

1. ➟ La symétrie vient de la commutativité du produit des réels, la bilinéarité vient de la linéarité de l'intégrale, et la positivité provient de la croissance de l'intégrale.

   ➟ Le caractère défini provient de ce que si $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors par la **stricte positivité** de l'intégrale, comme $t \mapsto P^2(t)$ est continue et positive, alors P s'annule sur tout le segment $[-1 ; 1]$, donc admet une infinité de racines, ce qui prouve que P est le polynôme nul.

2. Pour calculer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathrm{Vect}(1, X)$, commençons par déterminer une base orthonormée $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ de $\mathrm{Vect}(1, X)$ par orthonormalisation de Gram-Schmidt

de $(1,\mathrm{X})$:

- ➟ $\langle 1 \mid 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1^2 \mathrm{d}\,t = 2$, donc on prend $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\times 1)$.
- ➟ $\langle \mathrm{X} \mid \varepsilon_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \mathrm{X} \mid 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} t \mathrm{d}\,t = 0$, donc $\mathrm{X} \perp \varepsilon_0$.
- ➟ $\langle \mathrm{X} \mid \mathrm{X}\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}\,t = \frac{2}{3}$, donc on prend

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\mathrm{X} = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{X}.$$

- ➟ On en déduit (voir la prop 14.11) que le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathrm{Vect}(1,\mathrm{X})$ est

$$\begin{aligned}
p(\mathrm{X}^3) &= \left\langle \mathrm{X}^3 \mid \varepsilon_0 \right\rangle \varepsilon_0 + \left\langle \mathrm{X}^3 \mid \varepsilon_1 \right\rangle \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{X}^3 \mid 1 \right\rangle 1 + \frac{3}{2}\left\langle \mathrm{X}^3 \mid \mathrm{X} \right\rangle \mathrm{X} \\
&= \frac{1}{2} \times \int_{-1}^{1} t^3 \mathrm{d}\,t \times 1 + \frac{3}{2} \times \int_{-1}^{1} t^4 \mathrm{d}\,t \times \mathrm{X} \\
&= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{3}{2} \times \frac{2}{5}\mathrm{X} = \frac{3}{5}\mathrm{X}.
\end{aligned}$$

3. La distance de X^3 à $\mathrm{Vect}(1,\mathrm{X})$ est d'après le cours

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\mathrm{X}^3, \mathrm{Vect}(1,\mathrm{X})\right) &= \left\|\mathrm{X}^3 - p_{\mathrm{Vect}(1,\mathrm{X})}(\mathrm{X}^3)\right\| = \left\|\mathrm{X}^3 - \frac{3}{5}\mathrm{X}\right\| \\
&= \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 \mathrm{d}t} = \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{6}{25}x^5 + \frac{3}{25}x^3\right]_{-1}^{1} \\
&= \sqrt{\frac{8}{175}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} \simeq 0{,}214,
\end{aligned}$$

ce dont on se doutait vachement depuis le début.

Une correction de l'exercice 7.9 *énoncé*

Ici, E n'est pas un espace de dimension finie, on ne peut donc pas travailler dans une base.

Soit p un projecteur de E, autrement dit $p \circ p = p$.

(i) Supposons que $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$.

Alors pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$x = p(x) + (x - p(x)) \text{ avec } p(x) \perp (x - p(x))$$

donc l'identité de Pythagore nous donne

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \\ \text{d'où } \|x\|^2 &\geqslant \|p(x)\|^2 \end{aligned}$$

et comme $\|x\|$ et $\|p(x)\|$ sont positifs, on en déduit que

$$\|x\| \geqslant \|p(x)\| .$$

(ii) Réciproquement, montrons que

$$\big(\forall x \in \mathrm{E},\ \ \|p(x)\| \leqslant \|x\|\big) \Rightarrow \big(\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)\big)$$

en prouvant sa contraposée, autrement dit, supposons que $\mathrm{Ker}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ ne sont pas orthogonaux, et montrons qu'il existe z dans E tel que $\|p(z)\| > \|z\|$.

→ Posons $\mathrm{V} = \mathrm{Ker}\,(p)$ et u la projection orthogonale sur $\mathrm{V}^\perp$.

→ $\mathrm{Ker}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ ne sont pas orthogonaux, donc il existe $x \in \mathrm{Ker}\,(p)$ et $y \in \mathrm{Im}\,(p)$ tels que $\langle x \mid y \rangle \neq 0$.
Posons alors $z = u(y)$. Par définition

$$y = z + y - z, \ \text{ avec } \ z \in \mathrm{V}^\perp \text{ et } y - z \in \mathrm{V}.$$

ainsi

$$\begin{aligned} p(y) &= p(z) + p(y - z) \ \ \textit{(par linéarité de } p\textit{)} \\ &= p(z) \ \ \textit{(car } y - z \in \mathrm{V} = \mathrm{Ker}\,(p)\textit{)}, \end{aligned}$$

mais $y \in \mathrm{Im}\,(p)$, donc $p(y) = y$.
Ainsi $y = p(z)$, donc $\|y\| = \|p(z)\|$.

→ Or grâce au théorème de Pythagore

$$\|y\|^2 = \|z\|^2 + \|y - z\|^2 .$$

Mais $\|y - z\|^2 > 0$, car sinon $y = z$, donc $y \in \mathrm{V}^\perp$, dont on déduit, puisque $x \in \mathrm{Ker}\,(p) = \mathrm{V}$, que $\langle y \mid x \rangle = 0$, ce qui contredit la définition initiale de x et y.

→ Par conséquent $\|y\|^2 < \|z\|^2 = \|p(y)\|^2$, donc par stricte croissance de $\square \mapsto \square^2$ sur $[0\,;+\infty[$,

$$\|y\| < \|p(y)\| , \ \ \textsc{c.q.f.d.}$$

(iii) **Autre méthode pour la réciproque** : supposons que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, et montrons que $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$.
Prenons $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$, et montrons que $\langle x \mid y \rangle = 0$.
On sait que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$, donc $p(y) = y$, et comme $x \in \mathrm{Ker}(p)$, on a pour tout réel t, $p(y+tx) = p(y) + tp(x) = y$.
Ainsi pour tout réel t, par hypothèse de départ

$$\begin{aligned}\|p(y+tx)\| \leqslant \|y+tx\| &\iff \|p(y+tx)\|^2 \leqslant \|y+tx\|^2 \\ &\iff \|y\|^2 \leqslant \|y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle t + \|x\|^2 t^2 \\ &\iff 0 \leqslant 2\langle x \mid y\rangle t + \|x\|^2 t^2.\end{aligned}$$

Donc le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 2\langle x \mid y\rangle \mathrm{X} + \|x\|^2 \mathrm{X}^2$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$, et ceci n'est possible que si son discriminant est négatif.
Or ce discriminant vaut

$$\Delta = (2\langle x \mid y\rangle)^2 - 4 \times \|x\|^2 \times 0 = (2\langle x \mid y\rangle)^2,$$

donc il est positif.
Par conséquent, $\Delta = 0$, donc $\langle x \mid y\rangle = 0$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 7.10

énoncé

On se place dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, muni du produit scalaire $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}\,t$. C'est un espace euclidien.
Ainsi

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 + bt - c)^2 \mathrm{d}\,t = \inf_{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]} \int_0^1 (t^3 - \mathrm{P}(t))^2 \mathrm{d}\,t$$

On remarquera que $(a,b,c) \mapsto (a,-b,c)$ est une bijection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$, ou plus simplement, que $a\mathrm{X}^2 - b\mathrm{X} + c$ parcourt $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ aussi efficacement que $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, quand (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$.
Ainsi

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 + bt - c)^2 \mathrm{d}\,t = \inf_{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]} \left\|\mathrm{X}^3 - \mathrm{P}\right\|^2.$$

On sait d'après le cours que cette borne inférieure existe, c'est même un minimum, atteint en $\mathrm{P} = p_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}^3)$, et elle définit la distance, ici au carré, entre X^3 et $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
Ce projeté orthogonal $\mathrm{P} = p_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}^3)$ est caractérisé par

$$\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}],\ \text{c'est-à-dire } \mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c,\ \text{où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,$$

et

$$X^3 - P \in \mathbb{R}_2[X]^\perp = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)^\perp,$$
$$\text{c'est-à-dire } \langle X^3 - P \mid 1\rangle = \langle X^3 - P \mid X\rangle = \left\langle X^3 - P \mid X^2 \right\rangle = 0.$$

Donc il suffit de trouver les réels a, b, c tels que

$$\langle X^3 - (aX^2 + bX + c) \mid 1\rangle = \langle X^3 - (aX^2 + bX + c) \mid X\rangle = \left\langle X^3 - (aX^2 + bX + c) \mid X^2 \right\rangle = 0,$$

autrement dit

$$\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)\mathrm{d}\,t = 0 \iff -\frac{a}{3} - \frac{b}{2} - c + \frac{1}{4} = 0 \iff 4a + 6b + 12c = 3$$
$$\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c) \times t\mathrm{d}\,t = 0 \iff -\frac{a}{4} - \frac{b}{3} - \frac{c}{2} + \frac{1}{5} = 0 \iff 15a + 20b + 30c = 12$$
$$\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c) \times t^2\mathrm{d}\,t = 0 \iff -\frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{c}{3} + \frac{1}{6} = 0 \iff 12a + 15b + 20c = 10.$$

On obtient donc un système dont la résolution ne peut nous échapper car nous disposons du pivot de Gauss qui nous retourne, implacablement :

$$a = 3/2, \quad b = -3/5, \quad c = 1/20.$$

Par conséquent,

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 + bt - c)^2 \mathrm{d}\,t = \int_0^1 \left(t^3 - \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{120}\right)\right)^2 \mathrm{d}\,t = \frac{1}{2800}.$$

Une correction de l'exercice 7.11 *énoncé*

1. $$\begin{aligned}\langle A \mid B\rangle &= (\mathrm{ch}(x) - 1) \times (\mathrm{ch}(x) + 1) + 4 \times 3 + (-2) * 6 + \mathrm{sh}(x) \times (-\mathrm{sh}(x)) \\ &= \mathrm{ch}(x)^2 - 1 - \mathrm{sh}(x)^2 = \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 - 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. ➟ On suppose connu que l'ensemble $\mathscr{S}$ des matrices symétriques et celui $\mathscr{A}$ des matrices antisymétriques sont bien des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit S une matrice symétrique, et A une matrice antisymétrique, alors

$$\begin{aligned}\langle A \mid S\rangle &= \mathrm{Tr}(A^\top \times S) = \mathrm{Tr}(-A\times S) \ \textit{(car A est antisymétrique)}\\ &= -\mathrm{Tr}(A\times S) \ \textit{(car la trace est linéaire)}\\ &= -\mathrm{Tr}(S\times A) \ \textit{(par propriété de la trace)}\\ &= -\mathrm{Tr}(S^\top \times A) \ \textit{(car S est symétrique)}\\ &= -\langle S \mid A\rangle\end{aligned}$$

  ainsi $\langle A \mid S\rangle = -\langle S \mid A\rangle$, or le produit scalaire est symétrique, donc $\langle A \mid S\rangle = \langle S \mid A\rangle$, d'où $\langle A \mid S\rangle = -\langle A \mid S\rangle$, puis $2\langle A \mid S\rangle = 0$, et par conséquent $\langle A \mid S\rangle = 0$.
  On a prouvé que le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques sont orthogonaux (et donc en somme directe).
- De plus pour toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on remarque (parce qu'on l'a déjà vu cette année, et même l'an dernier) que

$$M = \frac{1}{2}\left(M + M^\top\right) + \frac{1}{2}\left(M - M^\top\right),$$

  où $\frac{1}{2}\left(M+M^\top\right)$ est symétrique, tandis que $\frac{1}{2}\left(M-M^\top\right)$ est antisymétrique.
  Ainsi $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S} + \mathscr{A}$, et l'inclusion réciproque étant évidente, on a bien $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathscr{S} + \mathscr{A}$.
- On peut donc conclure que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. La distance de A à $\mathscr{S}$ est la norme de $A - p_{\mathscr{S}}(A)$, qui est égal à $p_{\mathscr{A}}(A)$.
   Or on a vu au-dessus que

$$\begin{aligned}p_{\mathscr{A}}(A) &= \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\mathrm{ch}x - 1 & 4\\ -2 & \mathrm{sh}x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathrm{ch}x-1 & -2\\ 4 & \mathrm{sh}x\end{pmatrix}\right]\\ &= \begin{pmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   donc la distance voulue est

$$\left\|\begin{pmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}.$$