Pour tout entier naturel n_0, on pose $[\![n_0 \,;\, +\infty[\![= \mathbb{N} \cap [n_0 \,;\, +\infty[$, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ désignera une suite numérique, c'est-à-dire une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ (le rang initial n_0 étant le plus souvent égal à 0).

1. Comparaison à une série géométrique : la méthode de d'Alembert

Proposition 8.1 – La règle de D'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non nulle à partir d'un certain rang telle que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell.$$

(1) $\boxed{\text{Si}}$ $\ell < 1$ $\boxed{\text{alors}}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ;

(2) $\boxed{\text{si}}$ $\ell > 1$ $\boxed{\text{alors}}$ $\sum u_n$ diverge (grossièrement) ;

(3) si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Méthode 8.1 – Pour appliquer la règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert est bien adaptée aux cas où le terme général s'exprime à l'aide de produits, en particulier quand il contient des puissances ou des factorielles.

- ➟ *Ne pas oublier de dire au correcteur que u_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang ;*
- ➟ *chercher alors **la limite** de $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, sans oublier la **valeur absolue** (ou le **module** dans le cas complexe) ;*
- ➟ *comparer enfin **cette limite** à 1.*

Exemple 8.1 – La série exponentielle converge (le retour).
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, en posant $u_n = \frac{z^n}{n!}$, u_n est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

donc, là, on est bien convaincus que la série exponentielle converge.

Remarque 8.1 – Les mésaventures de l'élève Chaprot

L'erreur fréquente de notre héros consiste en l'oubli de la limite : il compare alors directement la quantité $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ *à 1, ce qui ne permet de rien conclure. Par exemple, pour* $u_n = \frac{1}{n}$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$ *et pourtant* $\sum u_n$ *diverge.*

Exercice 8.1. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ converge.

Remarques 8.2

- Pour $u_n = \frac{1}{n}$ comme pour $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1$, mais pour autant les séries correspondantes ne sont pas de même nature.
- **Un résultat similaire** : s'il existe $\alpha \in [0\,;1[$ tel qu'à partir d'un certain rang, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \alpha$, alors $u_n = O(\alpha^n)$, et en particulier par domination $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.
- Si à partir d'un certain rang, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut tendre vers 0.

Exercice 8.2 – Règle de Cauchy.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que $\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}}$ tend vers une limite L, finie ou infinie.

Montrer que si $L < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Montrer que si $L > 1$, ou $L = +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

2. Produit de Cauchy de deux séries

Définition 8.1 – Produit de Cauchy

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On appelle **produit de Cauchy** ou **produit de convolution** des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini pour tout $n\in\mathbb{N}$ par

$$w_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}u_{n-k}v_k=\sum_{p+q=n}u_pv_q=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_nv_0.$$

Remarque 8.3 – Produit de deux polynômes
Considérons les polynômes $\mathrm{P}=\sum_{n=0}^{p}u_n\mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q}=\sum_{n=0}^{q}v_n\mathrm{X}^n$, dont on veut écrire le produit sous forme développée. Alors en posant $u_n=0$ pour $n>p$ et $v_n=0$ pour $n>q$, on a

$$\mathrm{P}\times\mathrm{Q}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\mathrm{X}^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\mathrm{X}^n\right)=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)\mathrm{X}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}\right)\mathrm{X}^n$$

et pour $\mathrm{X}=1$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}\right)$.

Remarque 8.4 – Si les deux suites démarrent respectivement aux rangs p et q plutôt qu'au rang 0, alors en posant $u_i=v_j=0$ pour $i<p$ et $j<q$, le terme général du produit de Cauchy est :

$$\begin{aligned}w_n&=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_nv_0=u_pv_{n-p}+\cdots+u_{n-q}v_q\\&=\sum_{k=p}^{n-q}u_kv_{n-k}\ \textit{(car } v_{n-k}=0 \textit{ pour } n-k<q \textit{ c'est-à-dire } k>n-q\textit{).}\end{aligned}$$

En particulier $w_n=0$ pour $n-q<p$, c'est-à-dire $n<p+q$.
Par exemple, le produit de Cauchy des séries $\sum\frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum 2^{-n}$ est la série de terme général

$$w_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}2^{k-n}=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{(n-k)(n-k-1)}2^k.$$

Proposition 8.2 – Produit des sommes de deux séries absolument convergentes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites sommables de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (autrement dit si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes), **alors**

- leur produit de Cauchy est aussi sommable, avec pour somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\times\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right).$$

Exercice 8.3. Convergence et somme de la série de terme général

$$\sum_{k=0}^{n-2}\frac{2^{-k}}{(n-k)(n-k-1)}.$$

Remarque 8.5 – Importance de la convergence absolue

Considérons les suites de termes généraux $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ dont les séries sont semi-convergentes, alors le terme général du produit de Cauchy est

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}},$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1\ ;\ n-1]\!]$,

$$k(n-k) = -\left(k^2 - nk\right) = -\left[\left(k-\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4}\right] = \frac{n^2}{4} - \left(k-\frac{n}{2}\right)^2 \leqslant \frac{n^2}{4},$$

d'où $\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{4}}} = \frac{2}{n}$, et par conséquent

$$|w_n| = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{n} = (n-1)\times\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2,$$

donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers 0, et $\sum w_n$ diverge grossièrement.

Proposition 8.3 – La série exponentielle donne vraiment l'exponentielle !

(1) Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z) \times \exp(z') = \exp(z + z')$.

(2) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x + iy) = \mathrm{e}^x \times (\cos(y) + i\sin(y))$.
Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on notera indifféremment $\exp(z)$ ou e^z.

Pour expliquer la proposition précédente, rappelons que

- d'une part, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge, et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est notée $\exp(z)$.
  On sait en outre, grâce à la formule de Taylor (voir l'exercice dans le chapitre des intégrales), que pour tout **réel** x, $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, autrement dit que $\mathrm{e}^z = \exp(x)$;
- d'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$, on sait que

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a \times (\cos(b) + i\sin(b)).$$

La question que règle cette proposition, est l'égalité, pour tout nombre complexe z, de $\exp(z)$ et de e^z.

3. Convergence des séries alternées

On a vu que pour les suites qui ne changent de signe qu'un nombre fini de fois, donc de signe constant à partir d'un certain rang, étudier la convergence de la série correspondante équivaut à étudier leur sommabilité, ce pour quoi nous avons vu tout un tas de résultats.

Mais si la suite n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang, par exemple si elle est de signe alterné, sa série peut être semi-convergente, autrement dit converger sans que son terme général soit sommable (comme $\sum \frac{(-1)^n}{n}$), et dans ce cas les outils précédents ne permettent pas d'établir leur convergence.

Définition 8.2 – Séries alternées

La série **réelle** de terme général u_n est dite **alternée** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n et u_{n+1} sont de signes opposés.
Son terme général peut s'écrire $(-1)^n |u_n|$ ou $(-1)^{n+1} |u_n|$.

Proposition 8.4 – Critère de Leibniz, ou critère spécial des séries alternées

(1) $\boxed{\text{Si}}$
- $\sum u_n$ est alternée,
- $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- $|u_n| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$,

$\boxed{\text{alors}}$ $\sum u_n$ converge.

(2) Dans ce cas, pour tout entier p :

- la somme $S = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques $\sum_{n=p}^{N} u_n$ et $\sum_{n=p}^{N+1} u_n$;
- $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ est du signe de son premier terme u_p,
- $\left|\sum_{n=p}^{+\infty} u_n\right| \leqslant |u_p|$.

Exemple 8.2. la *série harmonique alternée* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Exercice 8.4 – (Quatre questions indépendantes).

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ est convergente.
2. Étudier la nature des séries de termes généraux
$$\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$
3. Nature des séries de terme général
$$\frac{(-1)^n}{\ln(n)} \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}.$$
4. Donner une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ à 10^{-3} près.

4. Preuves et solutions

Une preuve de la proposition 8.1 *énoncé*

Prenons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non nulle à partir d'un certain rang telle que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell.$$

1. Si $\ell < 1$, alors par définition de la convergence d'une suite, en prenant $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ (qui est bien un réel strictement positif), on sait qu'à partir d'un certain rang, tous les $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ sont dans l'intervalle $\left[\ell - \frac{1-\ell}{2}\ ;\ \ell + \frac{1-\ell}{2}\right]$, et en particulier

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{\ell+1}{2} \quad \textit{(qui est le milieu de } [\ell\ ;\ 1]\textit{)}.$$

   On en déduit qu'à partir d'un certain rang, disons $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\left|u_{n+1}\right| \leqslant \frac{\ell+1}{2} \times |u_n|,$$

   puis par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| \leqslant \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \times \left|u_{n_0}\right| = \mathrm{C} \times \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n} \quad \textit{(où C est un réel indépendant de } n\textit{)}.$$

   Autrement dit, on a prouvé que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n\right)$.

   Or $\left|\frac{\ell+1}{2}\right| < 1$ puisque $0 \leqslant \ell < 1$, donc la suite géométrique $\left(\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, d'où par domination, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi sommable.

2. Si $\ell > 1$, on prouve de même que $\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(|u_n|)$, donc par contraposée de la domination, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

Une correction de l'exercice 8.1 *énoncé*

Cette suite est non nulle, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$$

Avec l'équivalence $\ln(1+\square) \underset{\square\to 0}{\sim} \square$, on a $-n\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \times \left(\frac{1}{n}\right) = -1$, donc

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} < 1.$$

Le critère de d'Alembert permet de conclure que la suite de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ converge, donc que $\sum u_n$ converge.

Une correction de l'exercice 8.2

énoncé

1. ➟ Supposons que $(u_n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{L}$ et que $\mathrm{L} < 1$, alors à partir d'un certain rang r

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{L} + \frac{1-\mathrm{L}}{2} = \frac{\mathrm{L}+1}{2}.$$

➟ Comme la fonction $\square \mapsto \square^n$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

> *Ne pas confondre avec la suite $(\square^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante si $0 \leqslant \square \leqslant 1$, et croissante si $\square \geqslant 1$!*

on obtient en composant par cette fonction, sachant que u_n est supposé positif :

$$u_n \leqslant \left(\frac{\mathrm{L}+1}{2}\right)^n.$$

➟ Or $0 \leqslant \mathrm{L} < 1$, donc $0 < \frac{\mathrm{L}+1}{2} < 1$, d'où la série de terme général $\left(\frac{\mathrm{L}+1}{2}\right)^n$ est une série géométrique sommable.
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, on conclut par le critère de domination qu'elle est sommable.

2. De la même manière, si $(u_n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{L}$ et que $\mathrm{L} > 1$, alors à partir d'un certain rang $u_n \geqslant \frac{1+\mathrm{L}}{2}$ (ou n'importe quel réel strictement positif si $\mathrm{L} = +\infty$), ce qui empêche u_n de tendre vers 0, et prouve que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Une preuve de la proposition 8.2

énoncé

On pose

➟ $\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $\mathrm{V}_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, et $\mathrm{W}_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$;

➟ $\mathrm{U} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, $\mathrm{V} = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ et $\mathrm{W} = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k$;

➟ $D_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leqslant p \leqslant n,\ 0 \leqslant q \leqslant n\}$ et $E_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leqslant n\}$.
On peut donc écrire :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{p+q=k} u_p v_q\Big) = \sum_{(p,q)\in E_n} u_p v_q$$
$$U_n V_n = \Big(\sum_{p=0}^{n} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n} v_q\Big) = \sum_{(p,q)\in D_n} u_p v_q$$

Cas des séries à termes positifs : les inclusions $D_n \subset E_n \subset D_{2n}$ et la positivité des u_k et v_k, montrent que
$$\sum_{(p,q)\in D_n} u_p v_q \leqslant \sum_{(p,q)\in E_n} u_p v_q \leqslant \sum_{(p,q)\in D_{2n}} u_p v_q$$
ce qui donne les inégalités $U_n V_n \leqslant W_n \leqslant U_{2n} V_{2n}$, et, par encadrement, on obtient $W = UV$ quand $n \to +\infty$.
Cas général : on applique le résultat précédent aux séries $\sum |u_p|$ et $\sum |v_q|$, ce qui montre la convergence de la série de terme général $\sum\limits_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|$, donc la convergence absolue de la série $\sum w_n$ puisque $|w_n| = \left|\sum\limits_{p+q=n} u_p v_q\right| \leqslant \sum\limits_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|$.
La démonstration précédente montre aussi que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|\Big) = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_p|\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} |v_q|\Big).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|U_n V_n - W_n| = \left|\sum_{(p,q)\in D_n\setminus E_n} u_p v_q\right| \leqslant \sum_{(p,q)\in D_n\setminus E_n} |u_p|\,|v_q|$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q| - \sum_{p=0}^{n} |u_p| \sum_{q=0}^{n} |v_q| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 8.3 *énoncé*

Les suites de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ et $2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont sommables, donc leur produit de

Cauchy est absolument convergent, et

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{2^k}{(n-k)(n-k-1)} = \left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$
$$= 1\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Une preuve de la proposition 8.3 *énoncé*

1. Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, alors

$$\begin{aligned}\exp(z+z') &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+z')^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k(z')^{n-k} \quad \textit{(avec la formule du binôme de Newton)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!} \quad \textit{(car } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\textit{)}.\end{aligned}$$

On reconnaît la somme du produit de Cauchy des suites de termes généraux $\frac{z^n}{n!}$ et $\frac{(z')^n}{n!}$, dont on sait qu'elles sont sommables, ainsi

$$\exp(z+z') = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z')^n}{n!}\right) = \exp(z)\times\exp(z'),\quad \text{C.Q.F.D.}$$

2. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\exp(x+iy) &= \exp(x)\times\exp(iy) \quad \textit{(d'après le point précédent)}\\
&= e^x\times\exp(iy) \quad \textit{(car on sait déjà que } \exp(\square)=e^{\square} \textit{ pour tout réel } \square\textit{)}\\
&= e^x\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iy)^n}{n!}\\
&= e^x\times\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(iy)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \quad \textit{(en séparant } \mathbb{N} \textit{ en la partie des entiers pairs et la partie des impairs)}\\
&= e^x\times\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{+\infty}i\times(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \quad \textit{(car } i^{2k}=(i^2)^k=(-1)^k \textit{ et } i^{2k+1}=i^{2k}\times i\textit{)}\\
&= e^x\times\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+i\times\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\
&= e^x\times(\cos(y)+i\sin(y)) \quad \textit{(voir cet exercice)} \text{ C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 8.4 *énoncé*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite alternée, supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(-1)^n|u_n|$.
Supposons de plus que la suite des $|u_n|$ est décroissante et tend vers 0.
Prenons un entier quelconque $p\in\mathbb{N}$.

Notons pour tout $N\in\mathbb{N}$, on pose $S_N=\sum_{n=p}^{N}u_n$, $V_N=S_{2N}$ et $W_N=S_{2N+1}$.

➟ Montrons d'abord que les suites $(V_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(W_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sont alternées.

- Pour tout entier $N\geqslant p$,

$$\begin{aligned}
V_{N+1}-V_N = S_{2(N+1)}-S_{2N} &= u_{2N+2}+u_{2N+1}\\
&= \left|u_{2N+2}\right|-\left|u_{2N+1}\right|\leqslant 0 \quad \textit{(car la suite } (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est décroissante),}
\end{aligned}$$

  donc $(V_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- De même pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
W_{N+1}-W_N = S_{2(N+1)+1}-S_{2N+1} &= u_{2N+3}+u_{2N+2}\\
&= -\left|u_{2N+3}\right|+\left|u_{2N+2}\right|\geqslant 0,
\end{aligned}$$

  donc $(W_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante.

➔ Enfin $|W_N - V_N| = u_{2N+1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi les suites $(V_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(W_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc on peut affirmer que :

(i) ces deux suites, autrement dit $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ et $\left(S_{2N+1}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, par conséquent la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente, ce qui prouve, par définition, que la série $\sum u_n$ converge.

(ii) Notons $S = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$, alors pour tous entiers A, B plus grands que p,

$$W_A \leqslant S \leqslant V_B,$$

donc en particulier, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $2N-1 \geqslant p$,

$$S_{2N-1} \leqslant S \leqslant S_{2N}$$

$$\text{autrement dit } \sum_{n=0}^{2N+1} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{2N} u_n,$$

ce qui prouve que la somme est bien encadrée par deux sommes partielles consécutives.

(iii) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2N \geqslant p$,

$$\sum_{n=2N}^{+\infty} u_n = S - S_{2N-1} \geqslant 0 \quad \textit{(d'après le point précédent)},$$

et comme $u_{2N} = (-1)^{2N}|u_{2N}| = |u_{2n}| \geqslant 0$, on en déduit que $\sum_{n=2N}^{+\infty} u_n$ et u_{2N} sont de même signe.

On montre de la même manière que $\sum_{n=2N+1}^{+\infty} u_n$ et u_{2N+1} sont tous les deux négatifs.

(iv) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$S \leqslant \sum_{n=0}^{2N} u_n = S_{2N-1} + u_{2N}, \quad \text{donc} \quad S - S_{2N-1} \leqslant u_{2N}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{n=2N}^{+\infty} u_n \leqslant u_{2N}.$$

Mais on sait que le signe de $\sum_{n=2N}^{+\infty} u_n$ est le même que celui de u_{2N}, en l'occurrence positif ici, on conclut que

$$\left|\sum_{n=2N}^{+\infty} u_n\right| \leqslant |u_{2N}|.$$

Je vous laisse appliquer la même méthode pour montrer l'inégalité dans le cas $2N+1$.

Une correction de l'exercice 8.4 *énoncé*

1. Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} &= \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \times \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

or :

➟ par le critère spécial des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge ;

➟ comme $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$, et que $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ est sommable, car $\left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$, alors la suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est sommable, donc a fortiori la série $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge.

donc $\sum \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ est convergente comme somme de séries convergentes.

2. ➟ $\ln\left(1-\frac{(-1)}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(-1)^n}{n^2}$, or $\left(-\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est sommable, donc $\left(\ln\left(1-\frac{(-1)}{n^2}\right)\right)$ est sommable, donc la série $\sum \ln\left(1-\frac{(-1)}{n^2}\right)$ converge.

➟ *Ici l'erreur courante consiste à vouloir utiliser comme auparavant le critère d'équivalence, car* $\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, *et de remarquer que* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge par le critère spécial des séries alternées, donc de vouloir en déduire la convergence de* $\sum \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
Mais ce raisonnement n'est pas valable car je vous rappelle que les critères de comparaison ne permettent de tirer des conclusions que sur la sommabilité des suites concernées, autrement dit la convergence absolue de leurs séries !
Ici $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *n'est pas absolument convergente, donc on ne peut rien déduire de l'équivalence !*

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit grâce au développement limité de $\ln(1-\square)$ quand $\square \to 0$ que

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + \mathrm{O}\left(\left(-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

(remarquer l'utilisation du « grand O » !)

Or

- par le critère spécial des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge ;
- par domination par une série de Riemann convergente, $\sum \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge aussi ;
- $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc par combinaison linéaire $\sum -\frac{1}{2n}$ diverge aussi.

Donc $\sum \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge comme d'une série divergente et d'une série convergente.

3. On applique le critère spécial des séries alternées pour $\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

Pour la seconde série :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\ln(n)}} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{\ln(n)} + o\left(\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right)\right) \quad \left(\textit{car } \left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)
\end{aligned}$$

or :

- par le critère spécial des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge ;
- on sait que $-\frac{1}{\ln^2(n)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\ln^2(n)}$.

  Or $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$ donc $-\frac{1}{\ln^2(n)}$ n'est pas sommable, d'où par équivalence la suite de terme général $-\frac{1}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$ n'est pas sommable non plus.

  L'équivalence prouve de plus que $-\frac{1}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$ est négatif, à l'instar de $-\frac{1}{\ln^2(n)}$, à partir d'un certain rang.

  Donc la série de terme général $-\frac{1}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$ diverge.

On peut conclure que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

4. On sait grâce au critère de Leibniz que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ converge, donc $\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ tend vers $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ quand N tend vers $+\infty$. Autrement dit, comme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}}_{\mathrm{S_N}} + \underbrace{\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}}_{\mathrm{R_N}},$$

on peut dire que S_N est une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ avec une erreur de R_N.

Or on sait aussi grâce au critère de Leibniz que

$$\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}\right| \leqslant |u_{N+1}| = \left|\frac{(-1)^{N+1}}{2(N+1)^3+1}\right| = \frac{1}{2(N+1)^3+1},$$

donc **il suffit que** $\frac{1}{2(N+1)^3+1} < 10^{-3}$ pour que S_N soit une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3+1}$ à 10^{-3} près.

Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(N+1)^3+1} < 10^{-3} &\iff 2(N+1)^3+1 > 10^3 \\ &\iff N > \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(10^3-1\right)} - 1 \simeq 6{,}94, \end{aligned}$$

donc on prend $N = 7$.

Ainsi comme $S_7 \simeq 0{,}7119301168825689$ on conclut que $0{,}712$ est une valeur approchée à 10^{-3} près de la somme.