Dans tout ce chapitre, a et b pourront désigner tout à la fois deux réels tels que $a \leqslant b$, ou, quand le sens le permet, a et b pourront être respectivement $-\infty$ ou $+\infty$.

On notera I un intervalle, et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Notion d'intégrale généralisée

Rappelons que le programme de PCSI nous a appris la notion d'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ d'une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a\ ;\ b]$, et qu'un segment est un intervalle **borné**, et **fermé** (à ses extrémités).

Définition 10.1 – Intégrale généralisée

On dit que l'intégrale $\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}\,t$ est une **intégrale généralisée** dans un des deux cas suivants :

- l'intervalle I n'est pas borné ;
- l'intervalle I est borné, mais f n'est pas continue par morceaux sur tout le segment $[\inf(\mathrm{I})\ ;\ \sup(\mathrm{I})]$.

Exemple 10.1. Les intégrales ci-dessous sont des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}\,x, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}\,t, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}\,x.$$

Remarque 10.1 – Notation

Pour les séries, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne un nombre et n'a de sens que lorsque la série $\sum u_n$ converge, tandis que la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}\,t$ va désigner aussi bien l'intégrale dont l'existence est hypothétique, que sa valeur lorsqu'elle existe.

(mis à jour le 1er octobre 2024)

2. Intégrale sur un intervalle quelconque

2.1. Intégrale sur $[a\ ;\ b[$

Définition 10.2 – Convergence d'une intégrale sur $[a\ ;\ b[$

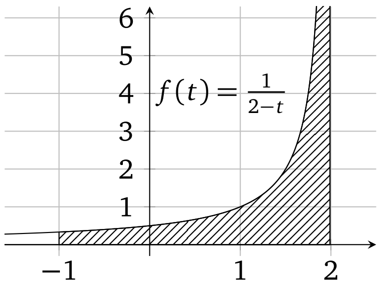
- On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **convergente** $\boxed{\text{lorsque}}$
  - f est continue par morceaux sur $\mathrm{I} = [a\ ;\ b[$,
  - $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures.
- Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, (ou $\int_a^b f$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variable d'intégration) cette limite.
- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est **divergente**.

Remarque 10.2 – Parallèle avec les séries

Rappelons que $\sum u_n$ converge lorsque la somme partielle $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n$ a une limite finie quand N tend vers $+\infty$; pour poursuivre le parallèle, on pourrait dire que $\int_a^x f$ est une « intégrale partielle » de l'intégrale généralisée $\int_a^b f$.

Exemple 10.2. L'intégrale généralisée $\int_{-1}^2 \frac{1}{2-t}\mathrm{d}t$ diverge, car $t \mapsto \frac{1}{2-t}$ est continue sur $[-1\ ;\ 2[$, et

$$\int_{-1}^x \frac{1}{2-t}\mathrm{d}t = \Big[-\ln(2-t)\Big]_{-1}^x \underset{x \overset{<}{\to} 2}{\longrightarrow} +\infty.$$



Exercices 10.1.

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{d}t$ diverge.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n-i)t}\mathrm{d}t$ converge de valeur $\frac{1}{n-i}$.

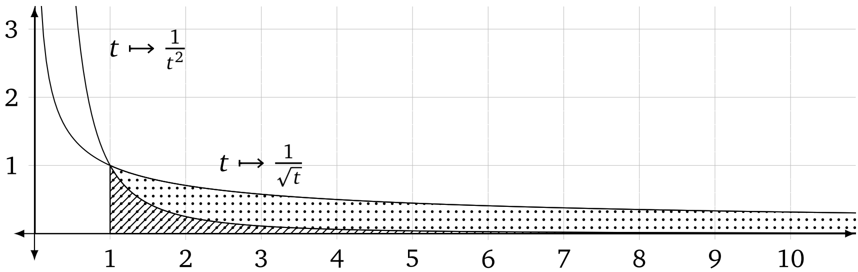
2.2. Intégrales généralisées de référence

Proposition 10.1 – Intégrales de fonctions de Riemann à l'infini

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i). l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}\, t$ converge $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ $\alpha > 1$,

(ii). dans ce cas $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}\, t = \frac{1}{\alpha - 1}.$$



Proposition 10.2 – Intégrale de l'exponentielle

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i). l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{d}\, t$ converge $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha) > 0$,

(ii). dans ce cas $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{d}\, t = \frac{1}{\alpha}.$$

Remarque 10.3 – Une grosse différence avec les séries : il n'y a pas de condition nécessaire de convergence!

On se souvient que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$.

En revanche, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{d}\, t$ peut converger sans que f tende vers 0 en $+\infty$.

Par exemple, l'intégrale (de Hardy) $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^5 \sin^2(t)} \mathrm{d}t$ converge, mais $\frac{t}{1+t^5 \sin^2(t)}$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$ (et n'ailleurs même pas bornée), puisque $f(n\pi) = n\pi \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Exercice 10.2. Soit f continue par morceaux sur $[0\ ;+\infty[$, montrer que si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et si $\int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t$ converge, alors $\ell = 0$.

2.3. Intégrale sur $]a\ ;\ b]$

Définition 10.3 – Convergence d'une intégrale sur $]a\ ;\ b]$

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}\,t$ est **convergente** $\boxed{\text{lorsque}}$

- f est continue par morceaux sur $\mathrm{I} =]a\ ;\ b]$,
- $\int_x^b f(t)\mathrm{d}\,t$ a une limite finie quand x tend vers a par valeurs supérieures.

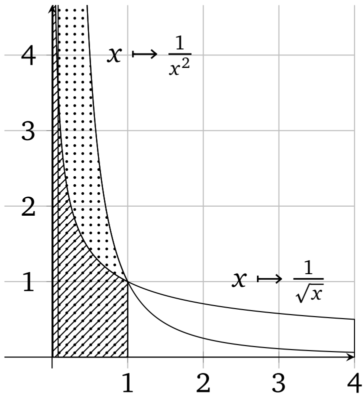
2.4. Intégrales généralisées de référence (suite)

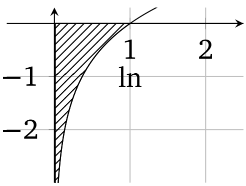
Proposition 10.3 – Fonctions de Riemann en 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

(i). L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}\,t$ converge si, et seulement si $\alpha < 1$,

(ii). dans ce cas sa valeur est $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{1-\alpha}$.





Proposition 10.4 – Logarithme entre 0 et 1

(i). L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}\,t$ est convergente,

(ii). sa valeur est $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}\,t = -1$.

2.5. Intégrale sur $]a\,;\,b[$

Définition 10.4 – Convergence d'une intégrale sur $]a\,;\,b[$

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}\,t$ est **convergente** lorsque

- f est continue par morceaux sur $\mathrm{I}=]a\,;\,b[$,
- il existe un réel $\gamma\in]a\,;\,b[$ pour lequel $\int_a^\gamma f(t)\mathrm{d}\,t$ et $\int_\gamma^b f(t)\mathrm{d}\,t$ convergent.

Dans ce cas, pour tout $c\in]a\,;\,b[$, $\int_a^c f(t)\mathrm{d}\,t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}\,t$ convergent, et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}\,t \overset{\text{def}}{=} \int_a^c f(t)\mathrm{d}\,t+\int_c^b f(t)\mathrm{d}\,t$.

Exemple 10.3.

Retenir que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}\,t$ diverge quel que soit le réel α.

Méthode 10.1 – D'abord la continuité :

Pour étudier la nature, ou encore ***l'existence de l'intégrale $\int_\mathrm{I} f$****, on* ***commence toujours par étudier la continuité de l'intégrande f sur l'intervalle d'intégration****. On n'a pas à étudier la convergence aux bornes où f est continue !*

- *Si f est continue sur $\mathrm{I}=[a\,;\,b]$, l'intégrale est définie, elle existe (ce n'est pas une intégrale généralisée).*
- *si f est continue sur $\mathrm{I}=[a\,;\,b[$ (resp. sur $\mathrm{I}=]a\,;\,b]$), alors on étudie ce qui se passe en b (resp. a),*
- *si f est continue sur $\mathrm{I}=]a\,;\,b[$, alors on étudie ce qui se passe en b et en a. Pour cela on prend le réel $c\in]a\,;\,b[$ (de notre choix !) et on étudie $\int_c^b f(t)\mathrm{d}\,t$ et $\int_a^c f(t)\mathrm{d}\,t$.*

Exercice 10.3. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}\,t$ converge et vaut 2.

Exemple 10.4 – Intégrale de référence hors-programme : l'intégrale de Gauss.
Pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t^2} \mathrm{d}\, t$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Remarque 10.4 – Restriction et élargissement de l'intervalle d'intégration

- Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}\, t$ converge, alors pour tout $c \in]a\ ;\ b[$, $\int_a^c f(t)\mathrm{d}\, t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}\, t$ convergent.
- Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}\, t$ converge et si f est continue par morceaux sur $]a\ ;\ c]$ avec $b \leqslant c$, alors $\int_a^c f(t)\mathrm{d}\, t$ converge encore.

En bref, de même que la nature d'une série ne dépend que du comportement asymptotique (quand $n \to +\infty$) de son terme général, la nature d'une intégrale ne dépend que du comportement de son intégrande au voisinage des bornes où elle n'est pas continue.

Par exemple, les intégrales $\int_{34}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}\, t$, $\int_0^{\pi} \ln(t)\mathrm{d}\, t$, et $\int_0^{\mathrm{e}} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}\, t$ convergent.

Remarque 10.5 – Vocabulaire : existence d'une intégrale
Montrer qu'« **une intégrale existe** » revient à montrer que :

- soit c'est la brave intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux,
- soit une intégrale généralisée convergente.

2.6. Intégrale d'une fonction dont on connaît une primitive

Proposition 10.5 – Lien avec une primitive

$\boxed{\text{Si}}$ f est continue par morceaux sur $]a\ ;\ b[$, $\boxed{\text{alors}}$ pour toute primitive F de f sur $]a\ ;\ b[$,

- $\int_a^b f$ converge $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ F admet des limites finies en a et b ;
- en cas de convergence, $\int_a^b f = \lim\limits_{x\to b} \mathrm{F}(x) - \lim\limits_{x \to a} \mathrm{F}(x) \overset{\text{not}^n}{=} \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b$.

Exemples 10.5. L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}\, t$ converge et vaut π.

Exercice 10.4. Donner une primitive sur $]-1\ ;\ 1[$ de la fonction $t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$.
Quelle est la nature de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{t}{1-t^2}\mathrm{d}\, t$?

2.7. Cas d'une fonction à valeurs complexes

Proposition 10.6 – Intégrale d'une fonction complexe

Soit f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs complexes :

(1) $\int_I f$ est convergente $\boxed{\text{si, et seulement si}}$ les intégrales (réelles) $\int_I \mathbb{R}\mathrm{e}(f)$ et $\int_I \mathrm{Im}(f)$ sont convergentes.

Dans ce cas $\mathbb{R}\mathrm{e}\left(\int_I f\right) = \int_I \mathbb{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathrm{Im}\left(\int_I f\right) = \int_I \mathrm{Im}(f)$.

(2) Les intégrales $\int_I f$ et $\int_I \overline{f}$ sont de même nature, et $\boxed{\text{si}}$ elles convergent, $\boxed{\text{alors}}$ $\overline{\left(\int_I f\right)} = \int_I \overline{f}$.

Exercice 10.5.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{1+n^2}$.

3. Propriétés des intégrales généralisées convergentes

3.1. La linéarité

Proposition 10.7 – Linéarité de l'intégrale généralisée convergente

(1) $\boxed{\text{si}}$ $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, $\boxed{\text{alors}}$

- pour tous scalaires λ et μ, $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge,
- $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) $\boxed{\text{Si}}$ $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b g$ diverge, $\boxed{\text{alors}}$ $\int_a^b (f+g)$ diverge.

Remarque 10.6 Quand $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ divergent, on ne peut rien dire de $\int_a^b (f+g)$.

On n'écrira donc jamais l'égalité $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ sans avoir prouvé au préalable la convergence de $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$.

Proposition 10.8 – Relation de Chasles

$\boxed{\text{si}}$ les intégrales $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ existent, $\boxed{\text{alors}}$ $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ existe aussi, et

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.6. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Préciser sa dérivée.

3.2. Intégrales et inégalités

Proposition 10.9 – Positivité et croissance des intégrales généralisées convergentes

On pose $\mathrm{I} =]a\,;\,b[$, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Positivité : $\boxed{\text{si}}$
- f est continue par morceaux sur I,
- f est positive sur I,
- $\int_a^b f$ converge,

$\boxed{\text{alors}}$ $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Croissance : $\boxed{\text{si}}$
- f et g sont continues par morceaux sur I,
- $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent,
- $\forall t \in \mathrm{I},\ f(t) \leqslant g(t)$,

$\boxed{\text{alors}}$ $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Stricte positivité : $\boxed{\text{si}}$
- f est **continue** sur I,
- f est positive sur I,
- $\int_a^b f$ converge,

$\boxed{\text{alors}}$ f est nulle sur I si, et seulement si, $\int_a^b f = 0$.

3.3. Changement de variables

Proposition 10.10 – Changement de variables : version officielle

Si
- $f :]a\ ;\ b[\ \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux ;
- $\varphi :]\alpha\ ;\ \beta[\ \to\ ]a\ ;\ b[$ est
  - de classe $\mathscr{C}^1$,
  - strictement monotone,
  - bijective,

,

alors
- $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature,
- en cas de convergence, elles sont égales ou opposées *(selon le sens de variation de φ)*

Méthode 10.2 – Pour effectuer un changement de variables :

la plupart du temps, quand on se propose de calculer la valeur, ou étudier la nature, de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, où $f :]a,b[\ \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, à l'aide d'un changement de variables, on pose indifféremment, selon ce qui nous arrange le mieux, $t=\varphi(u)$ (l'ancienne variable en fonction de la nouvelle), ou $u=\psi(t)$ (la nouvelle variable en fonction de l'ancienne).

- *Dans le premier cas, justifier le changement de variables consiste à montrer que φ vérifie les conditions de la proposition précédente. Puis on écrit $\mathrm{d}t=\varphi'(u)\mathrm{d}u$, $f(t)\mathrm{d}t = f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$, et on n'oublie pas de modifier les bornes de l'intégrale.*
- *Dans le deuxième cas, pour justifier le changement de variables, on peut inverser la relation $u=\psi(t)$ en $t=\psi^{-1}(u)$ et on se ramène au cas précédent.*

Proposition 10.11 – Généralisation des intégrales de Riemann

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$.
Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ convergent si, et seulement si, $\alpha<1$.

Exercice 10.7. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ de donner sa valeur le cas échéant.

Remarque 10.7 – Conséquence pour les fonctions paires ou impaires :
grâce au changement de variables $u = -t$, on prouve que si f est paire ou impaire, et si $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{d}t$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge aussi.
Dans ce cas $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ si f est paire, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$ si f est impaire.

3.4. Intégration par parties

Proposition 10.12 – Intégration par parties dans une intégrale généralisée

Si
- les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$,
- $f \times g$ a une limite finie à droite en a ainsi qu'à gauche en b,

alors
- $\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature,
- en cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \Big[f \times g\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

où on note $\Big[f \times g\Big]_a^b = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} b} f(x)g(x) - \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x)g(x)$.

Remarque 10.8 Si f et g sont $\mathscr{C}^1$ en a, ou en b, alors $f \times g$ est continue en cette borne, et il est inutile d'y étudier sa limite. Et si f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a\ ;\ b]$, alors on est ramené à l'intégration par parties de PCSI.

Exercices 10.8.

1. Montrer, grâce à une intégration par parties, que pour tout réel $\alpha > 0$, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ sont convergentes.
2. Prouver que, pour tout naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $\mathrm{I}_n = \int_0^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t$.

4. Convergence des fonctions à valeurs positives, fonctions intégrables

Remarque 10.9 Si f est positive et continue par morceaux sur $]a\,;b[$, alors pour tout $c \in]a\,;b[$, la fonction $x \mapsto \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante sur $]a\,;b[$.

Remarque 10.10 – Le théorème de la limite monotone pour les fonctions
Si f est une fonction réelle croissante sur $]a\,;b[$. Alors f admet en a^+ et en b^- une limite, finie ou infinie. Plus précisément :

(1) f tend en b^- vers une limite finie si, et seulement si, f est majorée sur $]a\,;b[$, et dans ce cas $\lim\limits_{b^-} f$ est sa borne supérieure ; sinon elle tend vers $+\infty$.

(2) f tend en a^+ vers une limite finie si, et seulement si, f est minorée sur $]a\,;b[$, et dans ce cas $\lim\limits_{a^+} f$ est sa borne inférieure ; sinon elle tend vers $-\infty$.

Lemme 1 – Intégrales généralisées de fonctions positives

(1) $\boxed{\text{Si}}$ f est
- continue par morceaux sur $[a, b[$,
- positive sur $[a, b[$,

$\boxed{\text{alors}}$
- $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge $\boxed{\text{si et seulement si}}$ $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a\,;b[$,
- $\boxed{\text{sinon}}$ $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x \longrightarrow b]{} +\infty$.

(2) $\boxed{\text{Si}}$
- f et g sont continues par morceaux sur I,
- $\forall x \in \mathrm{I},\ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,

$\boxed{\text{alors}}$ la convergence de $\int_{\mathrm{I}} g$ entraîne la convergence de $\int_{\mathrm{I}} f$.

Remarque 10.11 Dans les faits, on n'utilisera *(presque)* jamais ce résultat, auquel on préférera de loin les critères de comparaison !

4.1. Convergence absolue d'une intégrale, fonction intégrable sur un intervalle

Définition 10.5 – Intégrale généralisée absolument convergente, fonction intégrable

- On dit que l'intégrale de f sur I est **absolument convergente** $\boxed{\text{lorsque}}$ $\int_I |f(t)| \mathrm{d}t$ est convergente.
- On dit qu'une fonction est **intégrable** sur I $\boxed{\text{lorsque}}$:
  - elle est continue par morceaux sur I,
  - son intégrale sur I est **absolument** convergente.

Remarque 10.12 – Parallèle entre séries et intégrales généralisées
On parle aussi de fonction **sommable** sur un intervalle !
L'intégrabilité sur un intervalle est aux fonctions ce que la sommabilité (sur $[\![n_0\ ;\ +\infty[\![$) est aux suites.

Exemple 10.6 – Exemples basiques de fonctions intégrables.

- Une fonction continue par morceaux sur un segment $[a\ ;\ b]$ est intégrable sur ce segment ! (L'intégrale correspondante n'est pas une intégrale généralisée.)
- Une fonction continue par morceaux sur $]a\ ;\ b[$ et prolongeable par continuité sur $[a\ ;\ b]$ est intégrable sur $]a\ ;\ b[$.

Proposition 10.13 – Fonctions intégrables de référence

- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable « en $\pm\infty$ » si, et seulement si, $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha) > 1$,
- $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable « en a » si, et seulement si, $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha) < 1$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0\ ;\ +\infty[$ si, et seulement si, $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha) > 0$.
- Le logarithme est intégrable sur $]0\ ;\ 1]$.

4.2. Liens entre la convergence absolue et la convergence d'une intégrale

Proposition 10.14 – La convergence absolue entraîne la convergence

$\boxed{\text{Si}}$ la fonction f est intégrable sur I, $\boxed{\text{alors}}$:

(1) l'intégrale $\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}\,t$ converge ;

(2) on a l'**inégalité de la moyenne** (ou **inégalité triangulaire**) :

$$\left|\int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} |f(t)|\mathrm{d}\,t.$$

Méthode 10.3 – Pour montrer que $\int_{\mathrm{I}} f$ converge :

on montre le plus souvent que f est intégrable sur I.

Remarque 10.13 – La réciproque de la proposition 10.14 est fausse...

L'**intégrale de Dirichlet** $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}\,t$ converge mais $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}\,t$ diverge.
C'est un exemple d'intégrale **semi-convergente**.

Remarque 10.14 – ... mais dans certains cas :

si f est une application réelle continue par morceaux sur un intervalle I, et qui change de signe un nombre fini de fois, alors $\int_{\mathrm{I}} f$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur I.

Remarque 10.15 – De l'importance de l'ordre des bornes dans l'inégalité triangulaire !

Si on ne sait pas que $a \leqslant b$, il faut garder la valeur absolue, ou le module. L'inégalité de la moyenne est alors $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}\,t\right|$.

5. Comment étudier la nature d'une intégrale généralisée ?

Proposition 10.15 – Critère de domination (globale)

Si
- f et g sont continues par morceaux sur I,
- $\forall x \in \mathrm{I}, |f(x)| \leqslant |g(x)|$,

alors l'intégrabilité de g sur I implique celle de f sur I.

Exercice 10.9. Montrer que $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est intégrable sur $]0\,;\,1]$.

Exercice 10.10.

1. Montrer que $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\,\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

Proposition 10.16 – Fonctions à valeurs complexes intégrables

Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est intégrable sur I si, et seulement si $\mathbb{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont aussi.

Exercice 10.11. Les fonctions cos et sin sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}$?

Corollaire 10.17 – Critères de domination (locale) et d'équivalence

- si
  - f et g sont continues par morceaux sur $[a\,;\,b[$ (*resp.* $]b\,;\,a]$),
  - $f \underset{b}{=} \mathrm{O}(g)$,
  - g est intégrable sur $[a\,;\,b[$ (*resp.* sur $]b\,;\,a]$),

  alors f est intégrable sur $[a\,;\,b[$ (*resp.* sur $]b\,;\,a]$).
- si
  - f et g sont continues par morceaux sur $[a\,;\,b[$ (*resp.* $]b\,;\,a]$),
  - $f \underset{b}{\sim} g$,

  alors f est intégrable sur $[a\,;\,b[$ (*resp.* sur $]b\,;\,a]$) si, et seulement si g l'est aussi.

Exercice 10.12. Étudier l'intégrabilité sur $]0\,;\,1[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$.

Méthode 10.4 – Pour montrer que $\int_{\mathrm{I}} f$ diverge :

on montre souvent que
- *f est de signe constant sur I (ou sur $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$),*
- *f n'est pas intégrable sur I (ou J).*

Exercice 10.13 – Les intégrales de Bertrand.
Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 10.14. Étudier, selon $\alpha > 0$, la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}\right) \mathrm{d}\,x$.

Remarque 10.16 – On compare les INTÉGRABILITÉS ! Ces critères ne permettent pas de conclure directement sur la convergence *basique* des intégrales concernées, mais sur leurs convergences absolues, autrement dit sur les **intégrabilités** des fonctions en question !

~~$f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t)$, *or* $\int_a^b g$ *converge (resp. diverge),*~~

~~*donc* $\int_a^b f$ *converge (resp. diverge).*~~

Un contre-exemple : bien que $\ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$,
l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}\,x$ diverge, tandis que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\,x$ converge.

6. Espaces vectoriels des fonctions intégrables, et des fonctions de carré intégrable

Proposition 10.18 – L'espace vectoriel $\mathrm{L}^1(\mathrm{I})$

L'ensemble des applications intégrables sur un intervalle I est un espace vectoriel, noté $\mathrm{L}^1(\mathrm{I})$.

Proposition 10.19 – Produit de deux fonctions de carré intégrable

$\boxed{\text{Si}}$ $|f|^2$ et $|g|^2$ sont intégrables sur I, $\boxed{\text{alors}}$ $f \times g$ est intégrable sur I.

Remarques 10.17 – Un faux théorème de l'élève Chaprot :
le produit de deux fonctions intégrables sur I **n**'est **pas** intégrable sur I ! Il suffit de comparer les intégrabilités de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ et de $t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2$ sur $]0\,;1[$.

Définition 10.6 – Fonction de carré intégrable

Une fonction continue par morceaux sur un intervalle I est dite **de carré intégrable sur** I $\boxed{\text{lorsque}}$ $|f|^2$ est intégrable sur I.

Proposition 10.20 – L'espace vectoriel $L^2(I)$

L'ensemble des applications de carré intégrable sur un intervalle I est un espace vectoriel, noté $L^2(I)$.

Remarque 10.18 – Cauchy-Schwarz : $\forall (f,g) \in L^2(I)^2$, $\left|\int_I f \times \overline{g}\right| \leqslant \sqrt{\int_I |f|^2} \times \sqrt{\int_I |g|^2}$.

7. Comparaison d'une série à une intégrale

Proposition 10.21 – Comparaison d'une série à une intégrale

$\boxed{\text{Si}}$ $f : [a\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ est
- positive, continue,
- décroissante,

$\boxed{\text{alors}}$ la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 10.15 – Les intégrales de Bertrand (et de Riemann pour $\beta = 0$).
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ converge si, et seulement si, $\begin{cases} \alpha > 1, \text{ ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{cases}$

Proposition 10.22 – La formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Exercice 10.16. Donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\binom{2n}{n}$.

Une correction de l'exercice 10.1

énoncé

(1)

$$\int_1^X \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_1^X = X\ln(X) - X + 1 = X(\ln(X) - 1) + 1$$
$$\xrightarrow[X \longrightarrow +\infty]{} +\infty$$

donc $\int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{d}t$ diverge.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n \neq i$ et pour tout $X \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^X e^{-(n-i)t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n-i}e^{-(n-i)t}\right]_0^X = \frac{1}{n-i}\left(1 - e^{-(n-i)X}\right).$$

Or

$$e^{-(n-i)X} = e^{-nX} \times e^{iX},$$

donc

$$\begin{aligned}\left|e^{-(n-i)X}\right| &= \left|e^{-nX}\right| \\ &= e^{-nX} \xrightarrow[X \longrightarrow +\infty]{} 0 \ \ (car\ -n < 0),\end{aligned}$$

d'où $e^{-(n-i)X} \xrightarrow[X \longrightarrow +\infty]{} 0$, et par conséquent

$$\int_0^X e^{-(n-i)t}\mathrm{d}t \xrightarrow[X \longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{n-i},$$

autrement dit l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-(n-i)t}\mathrm{d}t$ converge, et a pour valeur

$$\int_0^{+\infty} e^{-(n-i)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{n-i}.$$

Une preuve de la proposition 10.1 *énoncé*

Soit $X \geqslant 1$,

$$\text{si } \alpha = 1,\ \int_1^X \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^X = \ln(X) \xrightarrow[X\longrightarrow+\infty]{} +\infty$$

$$\text{si } \alpha \neq 1,\ \int_1^X \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(-\alpha+1)t^{\alpha-1}}\right]_1^X = \frac{1}{(-\alpha+1)}\left(\frac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right)$$

$$\xrightarrow[X\longrightarrow+\infty]{} +\infty \text{ pour } \alpha < 1\,;$$

$$\xrightarrow[X\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1} \text{ pour } \alpha > 1.$$

Une preuve de la proposition 10.2 *énoncé*

Soit $X \geqslant 0$,

- si $\alpha = 0$,

$$\int_0^X e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \int_0^X 1\,\mathrm{d}t = X \xrightarrow[X\longrightarrow+\infty]{} +\infty$$

  donc $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
- si $\alpha \neq 0$,

$$\int_0^X e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \int_0^X 1\,\mathrm{d}t = X \xrightarrow[X\longrightarrow+\infty]{} +\infty$$

$$\int_0^X e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right]_0^X = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha X}\right)$$

donc la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ dépend de la convergence de la fonction $F : X \longmapsto e^{-\alpha X}$ quand $X \to +\infty$.

- Tout d'abord

$$|F(X)| = \left|e^{-\alpha X}\right| = \left|e^{-\mathbb{R}e(\alpha)X - i\,\mathrm{Im}(\alpha)X}\right| = \left|e^{-\mathbb{R}e(\alpha)X}\right| \times \left|e^{-i\,\mathrm{Im}(\alpha)X}\right| = e^{-\mathbb{R}e(\alpha)X},$$

- donc, si $\mathbb{R}e(\alpha) > 0$,

$$|F(X)| \xrightarrow[X\longrightarrow+\infty]{} 0$$

  d'où la convergence de l'intégrale, qui vaut alors $\frac{1}{\alpha}$;

- si $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha) < 0$,

$$|F(X)| \xrightarrow[X \longrightarrow +\infty]{} +\infty$$

d'où la divergence de l'intégrale ;

- si $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha) = 0$,

$$\begin{cases} \text{➜ } F(2n\frac{\pi}{\theta}) = e^{-i2n\pi} = 1 \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1, \\ \text{➜ } F((2n+1)\frac{\pi}{\theta}) = e^{-i(2n+1)\pi} = -1 \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} -1, \\ \text{➜ donc F n'a pas de limite en } +\infty \text{ (voir la méthode 3.4),} \end{cases}$$

d'où la divergence de l'intégrale.

Une correction de l'exercice 10.2 *énoncé*

Soit f continue par morceaux sur $[0\ ;+\infty[$. Supposons que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

- Dans le cas où $\ell > 0$, par définition de la limite, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $f(x) > \frac{\ell}{2}$.

  Ainsi pour tout $X \geqslant A$, par croissance de l'intégrale

$$\int_A^X f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_A^X \frac{\ell}{2}\mathrm{d}t = \frac{\ell}{2}(X - A),$$

  donc comme $\frac{\ell}{2}(X-A) \xrightarrow[X \longrightarrow +\infty]{} +\infty$, on en déduit par comparaison que $\int_A^X f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[X \longrightarrow +\infty]{} +\infty$, donc que $\int_A^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge, et a fortiori que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge aussi.
- Dans le cas où $\ell < 0$, alors $-f$ tend vers $-\ell > 0$, donc d'après le cas précédent, l'intégrale de $-f$ diverge, donc celle de f aussi.

Une preuve de la proposition 10.3 *énoncé*

Soit $0 < \varepsilon \leqslant 1$,

$$\text{si } \alpha = 1,\ \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_{\varepsilon}^{1} = -\ln(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\text{si } \alpha \neq 1,\ \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{} \frac{1}{1-\alpha} \text{ pour } \alpha < 1\,;$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{} +\infty \text{ pour } \alpha > 1.$$

Une preuve de la proposition 10.4 *énoncé*

$$\int_{\varepsilon}^{1} \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_{\varepsilon}^{1} = -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{} -1.$$

Une correction de l'exercice 10.3 *énoncé*

- La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$, donc (proposition 10.2) $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
- D'autre part la fonction f est paire donc (voir la remarque 10.7) donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)$ converge aussi, et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) = 2\int_0^{+\infty} f(t) = 2.$$

Une preuve de la proposition 10.5 *énoncé*

Supposons que f est continue par morceaux sur $]a\,;b[$, prenons γ quelconque dans $]a\,;b[$, et F une primitive sur $]a\,;b[$ de f.

- Grâce au théorème fondamental de l'analyse, on sait que $\varphi : x \mapsto \int_{\gamma}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $]a\,;b[$, et qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \mathrm{F} + \mathrm{C}$.
- Ainsi F a une limite finie en a ou en b si, et seulement si φ aussi.

  Or par la définition 10.4, la convergence de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ revient à ce que $\varphi : x \mapsto$

$\int_{\gamma}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ admette une limite finie en b, et $(-\varphi) : x \mapsto \int_{x}^{\gamma} f(t)\mathrm{d}t$ admette une limite finie en a.
Donc on a bien prouvé que $\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie en a à droite et en b en gauche.

- Enfin, si F admet aussi une limite finie aux bornes de $]a\,;\,b[$, alors

$$\int_{c}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C} \xrightarrow[x\longrightarrow b]{} \lim_{x\to b} \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$$

or par la définition 10.2,

$$\int_{c}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_{c}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

donc

$$\int_{c}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}.$$

De même

$$\int_{a}^{c} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_{x}^{c} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} (-\varphi(x)) = \lim_{x\to a} (-(\mathrm{F}(x)+\mathrm{C})) = -(\lim_{x\to a} \mathrm{F}(x)) - \mathrm{C}.$$

Mais encore par la définition 10.4 :

$$\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{c} f(t)\mathrm{d}t + \int_{c}^{b} f(t)\mathrm{d}t,$$

donc

$$\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t \left(= \lim_{x\to b} \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}\right) + \left(-(\lim_{x\to a} \mathrm{F}(x)) - \mathrm{C}\right) = \lim_{x\to b} \mathrm{F}(x) - \lim_{x\to a} \mathrm{F}(x), \quad \text{C.Q.F.D.}$$

- Réciproquement, si $\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ converge, on suit le même raisonnement avec $\mathrm{F} = \varphi - \mathrm{C}$, et on obtient bien que

$$\lim_{x\to b} \mathrm{F}(x) - \lim_{x\to a} \mathrm{F}(x) = \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 10.4 *énoncé*

- La fonction $t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$ est continue sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -1[$, $]-1\ ;\ 1[$, et $]1\ ;\ +\infty[$, donc par le théorème fondamental de l'analyse elle admet des primitives sur chacun de ces intervalles.
  On reconnaît à peu de choses près la dérivée de $t \mapsto \ln\left|1-t^2\right|$, mais la dérivée de celle-ci est plus exactement $t \mapsto \frac{-2t}{1-t^2}$, donc une primitive sur $]-1\ ;\ 1[$ de $t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$ est $\mathrm{F} : t \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$.
- Pour tout $t \in]-1\ ;\ 1[$,

$$\mathrm{F}(t) = -\frac{1}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\ln(1+t)$$

  tend vers l'infini quand t tend vers 1 et vers -1, donc l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{t}{1-t^2}\mathrm{d}\,t$ diverge.

Une correction de l'exercice 10.5 *énoncé*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{e}^{-nt}\sin(t) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-nt} \times \mathrm{e}^{it}\right) = \mathrm{e}^{-(n-i)t},$$

or on a vu dans l'exercice 10.1 que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n-i)t}\mathrm{d}\,t$ converge et vaut $\frac{1}{n-i}$, donc on peut conclure que $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}\sin(t)\mathrm{d}\,t$ converge, et vaut

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}\sin(t)\mathrm{d}\,t = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{n-i}\right) = \frac{1}{1+n^2}.$$

Une correction de l'exercice 10.6 *énoncé*

On sait que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$, donc par la définition 10.4, pour tout réel x, $\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t$ et $\int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t$ convergent, et par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t \quad \textit{(par parité de } t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\textit{)}\end{aligned} .$$

Or la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on sait grâce au théorème fondamental de l'analyse que $x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ est dérivable de dérivée $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$, donc $x \mapsto \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} + \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ est aussi dérivable de dérivée $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Une preuve de la proposition 10.10

énoncé

Soit f et φ telles que

- $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux ;
- $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ est
  - bijective,
  - strictement croissante (*resp.* décroissante),
  - de classe $\mathscr{C}^1$,

,

Résultats préliminaires : ➟ notons F une primitive de f sur $]a\,;\,b[$ (on est assuré de l'existence de F grâce au théorème fondamental de l'analyse).

Alors φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha\,;\,\beta[$ à valeurs dans $]a\,;\,b[$, et F est dérivable sur $]a\,;\,b[$, donc par composition, $\mathrm{F} \circ \varphi$ est dérivable sur $]\alpha\,;\,\beta[$, de dérivée

$$(\mathrm{F} \circ \varphi)' : u \mapsto \mathrm{F}'(\varphi(u)) \times \varphi'(u) = f(\varphi(u)) \times \varphi'(u),$$

autrement dit $\boxed{\mathrm{F} \circ \varphi \text{ est une primitive de } u \mapsto f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) \text{ sur }]\alpha\,;\,\beta[}$.

➟ D'autre part, φ est strictement croissante et continue (car $\mathscr{C}^1$) sur $]\alpha\,;\,\beta[$, donc φ établit une bijection entre $]\alpha\,;\,\beta[$ et $\varphi(]\alpha\,;\,\beta[)$, et par le théorème des valeurs intermédiaires et la croissance de φ :

$$\varphi(]\alpha\,;\,\beta[) = \left]\lim_{\alpha} \varphi\,;\,\lim_{\beta} \varphi\right[.$$

Ainsi comme d'après les hypothèses, φ établit une bijection entre $]\alpha\,;\,\beta[$ et $]a\,;\,b[$, on en déduit que

$$\varphi(]\alpha\,;\,\beta[) =]a\,;\,b[,$$

d'où $\boxed{\lim_{\alpha} \varphi = a \text{ et } \lim_{\beta} \varphi = b}$.

Enfin, d'après le théorème de la bijection continue, φ^{-1} est aussi continue et strictement croissante comme φ, donc pour les mêmes raisons qu'au-dessus, $\boxed{\lim_{a} \varphi^{-1} = \alpha \text{ et } \lim_{b} \varphi^{-1} = \beta}$.

Preuve de la proposition : ➟ si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge alors (avec la proposition 10.5) F a des limites finies en a et b, donc par composition des limites $F\circ\varphi$ a des limites finies en α et β, d'où par la proposition 10.5, $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\mathrm{d}u$ converge.

➟ Réciproquement, si $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\mathrm{d}u$ converge, alors avec la proposition 10.5 $F\circ\varphi$ a des limites finies en α et β, donc par composition des limites $F=(F\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}$ a des limites finies en a et b, d'où par la proposition 10.5 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Une preuve de la proposition 10.11 *énoncé*

En effet on se ramène à des intégrales de Riemann en 0 de la forme $\int_0^A \frac{1}{u^\alpha}\mathrm{d}u$ en posant $u=b-t$ dans la première intégrale et $u=a-t$ dans la seconde.

Une correction de l'exercice 10.7 *énoncé*

On veut poser $u=\sqrt{1+x^2}$, que l'on retourne en $x=\sqrt{u^2-1}$.
L'application $u\mapsto\sqrt{u^2-1}$, de $]1\,;+\infty[$ dans $]0\,;+\infty[$ est de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante et bijective, donc ce changement de variables est licite.
Il donne $\mathrm{d}x=\frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}}\mathrm{d}u=\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\mathrm{d}u$, d'où $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ et

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\times\frac{1}{u}\times\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\mathrm{d}u=\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u$$

sont de même nature.
Or $\frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{1+u}\right)$, donc $u\mapsto\frac{1}{u^2-1}$ admet pour primitive $F:u\mapsto\frac{1}{2}(\ln|u-1|-\ln|u+1|)$ sur $]1\,;+\infty[$. Or cette primitive n'a pas de limite finie en 1, ce qui revient à dire que $\int_x^2\frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u=F(2)-F(x)$ n'a pas de limite finie en 1. Par conséquent $\int_1^2\frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u$ diverge, donc $\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u$ diverge, d'où finalement $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ diverge.
Remarque : avec le critère d'équivalence,

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x}$$

et $x\mapsto\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$, donc $x\mapsto\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ non plus, et comme cette fonction est de positive , l'intégrale $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ diverge, donc a fortiori $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ diverge aussi.

Une correction de l'exercice 10.8 *énoncé*

1. Ces deux intégrales sont la partie réelle et la partie imaginaire de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} \mathrm{d}\, t$, donc elles convergent si, et seulement si, cette intégrale converge.
   On pose $u'(t) = e^{it}$, d'où $u(t) = -ie^{it}$, et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ donc $v'(t) = \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}$.
   Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1\ ;+\infty[$, et
   $$|u(t) \times v(t)| = \frac{1}{t^\alpha} \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} 0,$$
   donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} \mathrm{d}\, t$ est transformée en
   $$0 - u(1) \times v(1) - i\alpha \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}\, t$$
   et cette deuxième intégrale converge absolument car $\left|\frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\right| = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ qui est intégrable sur $[1\ ;+\infty[$ car $\alpha + 1 > 1$.
   Donc par l'intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} \mathrm{d}\, t$ converge, d'où la convergence des deux intégrales de départ.
2. On pose, pour tout entier naturel n et tout $t \in]0,1]$, $f_n(t) = t^n \ln t$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $]0,1]$, et de plus $f_n(t) \underset{t \to 0}{=} \mathrm{O}(\ln(t))$, or ln est intégrable sur $]0,1]$, donc par domination f_n l'est aussi.
   On pose $u(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$, alors
   - u et ln sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$,
   - par croissances comparées $u \times \ln$ tend vers 0 en 0,

   donc par intégration par parties
   $$\mathrm{I}_n = \int_0^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1} \ln t}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Une preuve de la proposition 1 *énoncé*

(1) Soit f continue par morceaux et positive sur $[a, b[$, alors l'application $\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f(t) \mathrm{d}\, t$ est croissante sur $[a\ ; b[$, car si $a \leqslant x \leqslant x' < b$, $\mathrm{F}(x') - \mathrm{F}(x) = \int_x^{x'} f(t) \mathrm{d}\, t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale (proposition 5.5), ou bien parce que F est une primitive d'une

fonction positive.
Ainsi,

- par la définition (10.2) $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, $\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie en b ;
- par le théorème de la convergence monotone, comme F est croissante :* F a une limite finie en b si, et seulement si, elle est majorée, et dans ce cas, la limite est la borne supérieure, d'où $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to b} \mathrm{F}(x) = \sup\limits_{x\in[a\,;\,b[} (\mathrm{F}(x))$, et dans le cas contraire $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\longrightarrow b]{} +\infty$.

(2) Soit f continue par morceaux et positive sur $]a\ ;\ b]$, alors l'application $\mathrm{F} : x \mapsto \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ est décroissante sur $]a\ ;\ b]$.
Ainsi,

- par la définition (10.3) $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, $\mathrm{F} : x \mapsto \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie en a ;
- par le théorème de la convergence monotone, comme F est décroissante : F a une limite finie en a si, et seulement si, elle est majorée, et dans ce cas, sa limite est la borne supérieure, d'où $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{F}(x) = \sup\limits_{x\in]a\,;\,b]} (\mathrm{F}(x))$, et dans le cas contraire $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\longrightarrow a]{} +\infty$.

(3) Soient f et g continues par morceaux sur I, telles que $\forall x \in \mathrm{I},\ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, et $\int_\mathrm{I} g$ converge.
Soit $c \in \mathrm{I}$.

- Pour tout $x \in \mathrm{I}$ avec $x \geqslant c$, par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_c^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_c^x g(t)\mathrm{d}t,$$

- comme on a supposé que $\int_\mathrm{I} g$ converge, alors $\int_c^{\sup(\mathrm{I})} g(t)\mathrm{d}t$ converge aussi avec $\int_c^{\sup(\mathrm{I})} g(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to\sup(\mathrm{I})} \int_c^x g(t)\mathrm{d}t$.

  Or comme g est positive, $x \mapsto \int_c^x g(t)\mathrm{d}t$ est croissante, donc sa limite $\int_c^{\sup(\mathrm{I})} g(t)\mathrm{d}t$ la majore,
- ainsi pour tout $x \in \mathrm{I}$ avec $x \geqslant c$,

$$0 \leqslant \int_c^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_c^{\sup(\mathrm{I})} g(t)\mathrm{d}t,$$

ce qui permet de conclure grâce au premier point de la proposition que $\int_c^{\sup(\mathrm{I})} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

- De la même manière, pour tout $x \in \mathrm{I}$ avec $x \leqslant c$,

$$0 \leqslant \int_x^c f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_x^c g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{\inf(\mathrm{I})}^c g(t)\mathrm{d}t,$$

d'où la convergence de $\int_{\inf(\mathrm{I})}^c f(t)\mathrm{d}t$ grâce au deuxième point de la proposition.

- On a donc effectivement établi la convergence de $\int_{\mathrm{I}} f$.

Une preuve de la proposition 10.14

énoncé

(i). Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I, dont l'intégrale sur I converge absolument.

- Si f est à valeurs réelles, on considère les fonctions

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f|+f) : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$f^- = \frac{1}{2}(|f|-f) : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors f^+ et f^- sont continues par morceaux sur I, positives, et $f^+ - f^- = f$, $f^+ + f^- = |f|$.

Comme on a supposé que $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, sachant que

$$0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$$
$$0 \leqslant f^- \leqslant |f|,$$

on applique le lemme qui nous donne la convergence des intégrales $\int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t$.

Puis avec $f = f^+ - f^-$, on conclut par linéarité (prop3.18) que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge aussi, et que

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b \left(f^+(t)-f^-(t)\right)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t + -\int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t\right| \quad \textit{(par l'inégalité triangulaire d'origine } |a+b| \leqslant |a|+|b|\textit{)} \\ &\textit{(attention ! } |a-b| = |a+(-b)| \leqslant |a|+|-b| = |a|+|b|\textit{)} \\ &= \int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t \quad \textit{(car } f^+ \textit{ et } f^- \textit{ sont positives, donc par positivité leurs intégrales aussi)} \\ &= \int_a^b f^+(t)+f^-(t)\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{C.Q.F.D}\end{aligned}$$

- Si f est à valeurs complexes, alors $0 \leqslant |\mathbb{R}\mathrm{e}(f(t))| \leqslant |f(t)|$ et $0 \leqslant |\mathrm{Im}(f(t))| \leqslant |f(t)|$, donc la convergence de $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ entraîne grâce au lemme que $\int_a^b |\mathbb{R}\mathrm{e}(f(t))|\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b |\mathrm{Im}(f(t))|\,\mathrm{d}t$ convergent.

> *Remarque pratique : on a même grâce au lemme que pour tout θ réel*
>
> $$\left|\mathbb{R}\mathrm{e}\left(f(t)\times \mathrm{e}^{-i\theta}\right)\right| \leqslant \left|f(t)\times \mathrm{e}^{-i\theta}\right| = |f(t)| \quad \textit{(car } \left|\mathrm{e}^{-i\theta}\right| = 1\textit{)}$$
>
> *donc l'intégrale $\int_a^b \left|\mathbb{R}\mathrm{e}(f(t)\times \mathrm{e}^{-i\theta})\right|\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b \left|\mathbb{R}\mathrm{e}(f(t)\times \mathrm{e}^{-i\theta})\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$, ce qui nous servira juste après.*

Ensuite, en appliquant le cas réel vu en premier lieu, la convergence de $\int_a^b |\mathbb{R}\mathrm{e}(f(t))|\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b |\mathrm{Im}(f(t))|\,\mathrm{d}t$ entraîne que $\int_a^b \mathbb{R}\mathrm{e}(f(t))\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \mathbb{R}\mathrm{e}(f(t))\mathrm{d}t$ convergent, et enfin avec la proposition 10.6, on conclut que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Notons θ un argument du nombre complexe $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t =$

$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \mathrm{e}^{i\theta}$, d'où $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \mathrm{e}^{-i\theta}$, puis

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| &= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|\right) \quad \textit{(car } \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \textit{ est un réel)} \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \mathrm{e}^{-i\theta}\right) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\int_a^b f(t) \times \mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_a^b \mathbb{R}\mathrm{e}\left(f(t) \times \mathrm{e}^{-i\theta}\right)\mathrm{d}t \quad \textit{(par la définition 6.4)} \\
&\leqslant \int_a^b \left|\mathbb{R}\mathrm{e}\left(f(t) \times \mathrm{e}^{-i\theta}\right)\right|\mathrm{d}t \quad \textit{(par l'inégalité de la moyenne établie pour les fonctions réelles, avec la remarque pratique)} \\
&\leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \quad \textit{(remarque pratique).} \text{ C.Q.F.D}
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 10.10 *énoncé*

(1) ➟ La fonction $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme rapport de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

➟ $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$, donc $\frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$. Ainsi lala fonction $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0\,;1]$, ce qui prouve son intégrabilité sur $]0\,;1]$.

➟ Pour tout $t \in [1\,;+\infty[$, $\left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{2}{t^2}$, or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, donc par le critère de domination, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

➟ La fonction $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ et sur $[1\,;+\infty[$, donc elle est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

(2) $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0\,;1]$, et pour tout $t \in]0\,;1]$, $\left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leqslant 1$. Or $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0\,;1]$ car continue, donc a fortiori intégrable sur $]0\,;1]$, donc par domination, $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est intégrable sur $]0\,;1]$.

Une preuve de la proposition 10.16 *énoncé*

➟ Si f est intégrable sur I, alors par définition $|f|$ aussi est intégrable sur I, mais on sait que pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$|\mathbb{R}\mathrm{e}(f)(t)| = \sqrt{\mathbb{R}\mathrm{e}(f)(t)^2} \leqslant \sqrt{\mathbb{R}\mathrm{e}(f)^2(t) + \mathrm{Im}(f)^2(t)} = |f|,$$

et de même $|\mathrm{Im}(f)| \leqslant |f|$,

donc par domination $\mathbb{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont aussi intégrables sur I.

- Rappelons que pour tous réels a et b strictement positifs, on a l'inégalité $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (je vous laisse le vérifier en élevant les deux termes au carré).
  En particulier, pour tout réel $t \in \mathrm{I}$,

$$|f(t)| = \sqrt{\mathbb{R}\mathrm{e}(f)^2(t) + \mathrm{Im}(f)^2(t)} \leqslant \sqrt{\mathbb{R}\mathrm{e}(f)^2(t)} + \sqrt{\mathrm{Im}(f)^2(t)} = |\mathbb{R}\mathrm{e}(f)(t)| + |\mathrm{Im}(f)(t)|.$$

  Donc si $\mathbb{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur I, alors $\int_{\mathrm{I}} |\mathbb{R}\mathrm{e}(f)|$ et $\int_{\mathrm{I}} |\mathrm{Im}(f)|$ convergent, donc $\int_{\mathrm{I}} |\mathbb{R}\mathrm{e}(f)| + |\mathrm{Im}(f)|$ converge aussi par linéarité.
  Comme c'est une fonction positive, on peut affirmer que $|\mathbb{R}\mathrm{e}(f)| + |\mathrm{Im}(f)|$ est intégrable sur I, et on peut enfin conclure que $|f|$ est intégrable sur I par domination.

Une correction de l'exercice 10.11 *énoncé*

Si cos est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\int_{\mathbb{R}} |\cos(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, donc par le changement de variable $x = t + \frac{\pi}{2}$, on obtient que $\int_{\mathbb{R}} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x$ converge aussi, donc que sin est intégrable.
La réciproque se prouve de la même manière, et on en déduit que cos et sin sont toutes les deux intégrables, ou qu'aucune des deux ne l'est.
Par conséquent, si elles le sont, alors la fonction $f : \theta \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}$, doit aussi l'être puisque sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. Mais $|f| = 1$, et les intégrales sur $\mathbb{R}$ des fonctions constantes non nulles ne sont pas du tout convergentes.
Donc cos et sin ne sont pas intégrables sur $\mathbb{R}$.

Une correction de l'exercice 10.12 *énoncé*

- La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$ est continue sur $]0\,;1[$;
- $\ln(1-x) + x = \ln(1-x) + \underset{x\to 1}{o}(\ln(1-x)) \underset{x\to 1}{\sim} \ln(1-x)$, donc $\frac{\ln(1-x)+x}{x^2} \underset{x\to 1}{\sim} \ln(1-x)$.
  Or $u \mapsto \ln(u)$ est intégrable sur $]0\,;1/2]$, donc en posant $u = 1-x$, $x \mapsto \ln(1-x)$ est $\boxed{\text{intégrable sur } [1/2\,;1[}$, et par équivalence, il en va de même pour $x \mapsto \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$;

- Sur $]0\ ;\ 1/2]$:

$$\frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = \frac{-x-x^2/2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x}{x^2} = \frac{-x^2/2+o(x^2)}{x^2}$$
$$\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2} = \mathrm{O}(1)$$

donc $x \mapsto \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$ est $\boxed{\text{intégrable sur }]0\ ;\ 1/2]}$.

Une correction de l'exercice 10.13 *énoncé*

Pour tous reéls α et β, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ est continue sur $[a\ ;\ +\infty[$.

(1) si $\alpha > 1$,
- $\frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$,
- $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ est intégrable sur $[a\ ;\ +\infty[$ car $\frac{\alpha+1}{2} > 1$,
- donc par domination, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ est intégrable sur $[a\ ;\ +\infty[$, d'où $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ converge.

(2) si $\alpha < 1$,
- $\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}\right)$,
- $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ n'est pas intégrable sur $[a\ ;\ +\infty[$ car $\frac{\alpha+1}{2} < 1$,
- donc par (la contraposée de la) domination, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ n'est pas intégrable sur $[a\ ;\ +\infty[$.
- Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ est positive sur $[a\ ;\ +\infty[$, donc la divergence de $\int_a^{+\infty} \left|\frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}\right| \mathrm{d}t$ entraîne que $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ diverge.

(3) si $\alpha = 1$, $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\beta}$ donne, en posant $u = \ln(t)$, $\int_{\ln(a)}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ qui est convergente si, et seulement si, $\beta > 1$.

Une correction de l'exercice 10.14 *énoncé*

On a pris pour α un réel strictement positif.

Donc, quand $x \to +\infty$, $\left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$, d'où par encadrement $\frac{\sin(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, et grâce au développement limité de $\ln(1+\square)$ quand $\square \to 0$,

$$\ln\left(1+\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right) = \frac{\sin(x)}{x^\alpha} - \frac{\sin^2(x)}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2(x)}{2x^{2\alpha}}\right)$$

Or

- *(je répète ici la solution de l'exercice 10.8)*
  - $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$ (*resp.* $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^\alpha}$) est la partie imaginaire (*resp.* la partie réelle) de $x \mapsto \frac{e^{ix}}{x^\alpha}$, donc si $\int_1^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^\alpha} dx$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ (ainsi que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx$) converge.
  - Effectuons une intégration par parties.

    On pose $\left| \begin{array}{l} u'(x) = e^{ix}, \text{ d'où } u(x) = -ie^{ix}, \\ \text{et } v(x) = \frac{1}{x^\alpha} \text{ donc } v'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}. \end{array} \right.$

    Alors
    - les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$,
    - de plus
    $$|u(x) \times v(x)| = \frac{1}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0,$$
    - l'intégrale $\int_1^{+\infty} u(x) \times v'(x) dx = i\alpha \int_1^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^{\alpha+1}} dx$ converge absolument car $\left|\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+1}}\right| = \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ est une fonction de Riemann intégrable sur $[1\,;+\infty[$ car $\alpha+1>1$.

    Donc par le théorème d'intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ (ainsi que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx$) converge.
- Pour la deuxième partie :
  - D'une part

    $$u(x) = -\frac{\sin^2(x)}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2(x)}{2x^{2\alpha}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} v(x) = -\frac{\sin^2(x)}{2x^{2\alpha}}$$

    Ainsi par le critère d'équivalence, ces deux fonctions u et v sont intégrables sur $[1\,;+\infty[$ en même temps.

    Mais v est négative, donc par équivalence la fonction u est aussi négative sur un voisinage de $+\infty$. Ainsi, l'intégrabilité de u et v sur $\mathrm{I} = [1\,;+\infty[$ revient à la convergence de $\int_\mathrm{I} u$ et de $\int_\mathrm{I} v$.

    Par conséquent, les intégrales $\int_\mathrm{I} u$ et de $\int_\mathrm{I} v$ sont de même nature.

- De plus

$$\frac{\sin^2(x)}{2x^{2\alpha}} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos(2x))}{2x^{2\alpha}} = \frac{1}{4x^{2\alpha}} - \frac{\cos(2x)}{4x^{2\alpha}},$$

or, au changement de variables $u = 2x$ près, on a vu au-dessus que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^{2\alpha}} \mathrm{d}x$ converge pour tout $\alpha > 0$, tandis que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}} \mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, $2\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha > \frac{1}{2}$.

Par conséquent, l'intégrale sur $[1\,;+\infty[$ de $x \mapsto -\frac{\sin^2(x)}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2(x)}{2x^{2\alpha}}\right)$ converge si, et seulement si, $\alpha > \frac{1}{2}$.

Rappel : si $\begin{cases} \int_I f \text{ converge,} \\ \int_I g \text{ diverge,} \end{cases}$ *alors* $\int_I (f+g)$ *diverge !*

➟ On peut enfin conclure (toujours grâce au résultat rappelé ci-dessus) que

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right) \mathrm{d}x$$

converge si, et seulement si, $\alpha > \frac{1}{2}$.

Une preuve de la proposition 10.18 *énoncé*

La preuve de ce point tient encore au critère de domination (global).
En effet, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, et f, g dans $L_1(I, \mathbb{K})$,

$$|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda| \times |f| + |\mu| \times |g|,$$

l'intégrabilité de f et g sur I signifie que les intégrales $\int_I |f|$ et $\int_I |g|$ convergent, donc par linéarité (10.7) $\int_I (|\lambda|\,|f| + |\mu|\,|g|)$ converge aussi, autrement dit la fonction positive $|\lambda|\,|f| + |\mu|\,|g|$ est intégrable sur I.
Ainsi par domination, on en déduit l'intégrabilité de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Une preuve de la proposition 10.19

énoncé

La preuve de ce résultat tient au fait que pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$,

$$|a \times b| \leqslant \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2\right).$$

Ainsi, si f et g sont de carré intégrable sur I, alors $f \times g$ aussi car $|f \times g| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$, et on applique le critère de domination.

Une preuve de la proposition 10.20

énoncé

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, et f, g dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, l'inégalité triangulaire nous donne

$$|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda| \times |f| + |\mu| \times |g|,$$

donc la fonction $\square \mapsto \square^2$ étant croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$,

$$\begin{aligned} |\lambda f + \mu g|^2 &\leqslant (|\lambda| \times |f| + |\mu| \times |g|)^2 \\ &\leqslant |\lambda|^2 \times |f|^2 + |\lambda\mu| \times |f \times g| + |\mu|^2 \times |g|^2 \end{aligned}$$

et comme $f \times g$ est intégrable sur I grâce à la proposition précédente, les trois fonctions de cette somme sont intégrables sur I, et on conclut par domination.

Une preuve de la proposition 10.21

énoncé

- Soit n_0 un entier tel que $n_0 \geqslant a + 2$ (on prend un peu de gras pour être peinard), comme ça f est définie sur $[\![n_0\ ;\ +\infty[\![$.
  Pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction f est décroissante pour tout entier $n \geqslant a$, donc

  $$\forall t \in [\![n-1\ ;\ n]\!],\ \ f(n) \leqslant f(t) \leqslant f(n-1),$$

  donc par croissance de l'intégrale, on obtient en sommant pour t de $n-1$ à n :

  $$\int_{n-1}^{n} f(n)\mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n} f(n-1)\mathrm{d}t,$$

  c'est-à-dire

  $$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n-1).$$

- Supposons que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

- Alors, f étant continue sur $[a\ ;+\infty[$ qui contient n_0-1, l'intégrale $\int_{n_0-1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge aussi, d'où par la relation de Chasles,

$$\sum_{n=n_0}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = \int_{n_0-1}^{N} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} \int_{n_0-1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

ce qui prouve que la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

- On a vu au-dessus que la série de terme général w_n converge aussi, et pour tout $n \geqslant n_0$, $f(n) = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - w_n$, donc la série de terme général $f(n)$ converge aussi.

➟ Supposons que la série $\sum f(n)$ converge.

- Alors comme $\sum w_n$ converge, la série de terme général $w_n + f(n) = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ converge aussi.
- Ainsi par définition de la convergence de cette série :

$$\int_{n_0-1}^{N} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

- Mais la fonction f est positive, donc la fonction $F : x \mapsto \int_{n_0-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est croissante, ce qui par le théorème de la limite monotone, entraîne que cette fonction admet forcément une limite L, finie ou $+\infty$.
- En particulier, par composition des limites $F(N) = \int_{n_0-1}^{N} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} L$, donc par unicité de la limite, $L = S$,
- On conclut que la fonction $x \mapsto \int_{n_0-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, ce qui prouve par définition que l'intégrale $\int_{n_0-1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, donc que $\int_{a}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge car f est continue sur $[a\ ;+\infty[$.

Une correction de l'exercice 10.15

énoncé

➟ Si $\alpha < 0$, ou si $\alpha = 0$ et $\beta \leqslant 0$, alors la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^\beta}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou bien est constante égale à 1, donc cette fonction est minorée par la fonction constante $x \mapsto 1$ qui n'est pas intégrable sur $[2\ ;+\infty[$, donc par comparaison φ

n'est pas non plus intégrable sur $[2\,;+\infty[$ *(autrement dit $\int_2^{+\infty}|\varphi|$ diverge)*, et comme elle est positive sur cet intervalle *(la valeur absolue ne change rien à l'affaire)* son intégrale $\int_2^{+\infty}\varphi$ diverge.

- Si $\alpha>0$, ou si $\alpha=0$ et $\beta>0$, alors la fonction $f : t\mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ est dérivable sur $[2\,;+\infty[$, de dérivée

$$t\mapsto\begin{cases} -\alpha\frac{\left(\ln(t)+\frac{\beta}{\alpha}\right)}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta+1}(t)} & \text{si } \alpha\neq 0,\\ -\frac{n}{t\ln^{n+1}(t)} & \text{si } \alpha=0.\end{cases}$$

négative dès que $t\geqslant e^{-\frac{\beta}{\alpha}}$ ou $t>1$.
Donc f est décroissante au moins sur un intervalle $[a\,;+\infty[$, où $a\geqslant 2$.
Comme elle est aussi continue et positive sur un tel intervalle, on peut appliquer le théorème de comparaison série-intégrale, et en déduire que l'intégrale $\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ et la série $\sum\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ sont de même nature, ce qui donne la conclusion voulue si on se réfère à la solution de cet exercice.

Une correction de l'exercice 10.16

énoncé

Grâce à la formule de Stirling qui nous donne $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, on obtient

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{(2n)}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}=\frac{2\sqrt{\pi n}\left(\frac{(2n)}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\times\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\times\left(\frac{2n}{e}\times\frac{e}{n}\right)^{2n}=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}=\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$