1. Ensembles dénombrables

Définition 11.1

- Un ensemble A est **dénombrable** lorsqu'il existe une bijection de A sur une partie de $\mathbb{N}$;
- parmi ces ensembles dénombrables, B est **fini** lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de B sur $[\![1, n]\!]$, et dans ce cas, n est appelé **cardinal** de B.

Si un ensemble est dénombrable ou fini alors on peut le noter en extension sous la forme $\{x_i \mid i \in \mathrm{I}\}$, où $\boxed{\mathrm{I} = \mathbb{N} \text{ ou } \mathrm{I} \subset \mathbb{N}}$, avec des x_i deux à deux distincts.

Proposition 11.1

(1) Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

(2) Tout ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est dénombrable.

(3) Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

(4) L'union finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

(5) Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

2. Doubles sommes infinies

Proposition 11.2 – Le théorème de Fubini

Soit $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ un suite double de nombres complexes.

Si
- pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $\left(u_{i,j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est sommable,
- la suite $\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable,

alors
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $\left(u_{i,j}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable,
- la suite $\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est sommable,
- $$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=n} u_{i,j}\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j}.$$

(mis à jour le 17 octobre 2024)

3. Espaces probabilisés infinis

Le programme de PCSI étudie le cas où l'expérience aléatoire donne un ensemble de résultats fini de la forme $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\} = \{x_i \mid i \in \mathrm{I}\}$, où $\mathrm{I} = [\![1\,;\,n]\!]$.
En PC nous allons étendre tous ces résultats au cas où l'ensemble des résultats est infini dénombrable, de la forme $\Omega = \{x_i \mid i \in \mathrm{I}\}$, où $\boxed{\mathrm{I} = \mathbb{N} \text{ ou } \mathrm{I} = \mathbb{N}^*}$.

3.1. Tribu d'événements

Définition 11.2 – Tribu d'événements, espace probabilisable

Soit Ω un ensemble, on appelle **tribu** sur Ω tout ensemble $\mathscr{A}$ de parties de Ω ($\mathscr{A} \subset \mathrm{P}(\Omega)$), qui contient Ω et qui est stable par passage au complémentaire et par réunion finie ou dénombrable, autrement dit tout ensemble qui vérifie les conditions suivantes :

- $\Omega \in \mathscr{A}$,
- pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}^{\mathrm{C}} = \Omega \setminus \mathrm{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin \mathrm{A}\}$ appartient à $\mathscr{A}$,
- pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{A}$, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathscr{A}$,
- pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ appartient à $\mathscr{A}$.

Les éléments de $\mathscr{A}$ sont alors appelés **événements**,
et on dit que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un **espace probabilisable**.

Exemples 11.1. Soit Ω un ensemble.

- $\{\varnothing, \Omega\}$ est la tribu triviale ;
- lorsque Ω est un ensemble fini ou dénombrable, $\mathscr{P}(\Omega)$ est la **tribu pleine**, c'est celle qu'on utilisera la plupart du temps ;
- $\left\{\varnothing, \mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}, \Omega\right\}$ est la tribu engendrée par une partie non vide A.

Remarque 11.1 Si $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements,

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n = \left\{x \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x \in \mathrm{A}_n\right\}, \qquad \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n = \left\{x \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N},\ x \in \mathrm{A}_n\right\},$$

Exercice 11.1. Monsieur et le Roi lancent un dé à tour de rôle en commençant par le Roi, le premier qui obtient un chiffre pair a gagné.
Écrire les événements $A =$« le jeu ne s'arrête jamais », et $B =$« le Roi gagne la partie », en fonction des événements $P_i =$« le $i^{\text{ème}}$ lancer donne un chiffre pair ».

Proposition 11.3

Une tribu contient $\varnothing$, et est stable par intersection finie ou dénombrable.

3.2. Variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Définition 11.3

On appelle **variable aléatoire discrète** sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $X : \Omega \to E$ telle que :

- $X(\Omega)$ est une partie finie ou infinie dénombrable de E,
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'image réciproque $X^{-1}(\{x\})$ est un événement de $\mathscr{A}$, on le note $(X = x)$, ou parfois $\{X = x\}$.

Remarque 11.2 En général, l'énoncé d'un exercice définit l'univers et la variable aléatoire par des phrases, comme dans : « *dans le jeu de Monsieur et du Roi, on note X le rang du lancer où le jeu s'arrête, et on pose $X = 0$ dans le cas où le jeu ne s'arrête jamais* ».

3.3. Probabilité

Définition 11.4 – Probabilité, espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable, on appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ qui vérifie les propriétés :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- La σ-**additivité :** pour toute famille d'événements dénombrable $(A_i)_{i\in I}$,

$$\text{si les } A_i \text{ sont } \textbf{deux à deux incompatibles}\text{, alors } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé**.

Définition 11.5 – Distribution de probabilité

En notant $\Omega = \{\omega_i \mid i \in \mathrm{I}\}$, si $(p_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une suite sommable de réels positifs de somme 1, alors on définit une probabilité sur Ω en posant pour tout $i \in \mathrm{I}$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.
La suite des couples $((\omega_i, p_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est alors appelée **distribution de probabilité**, et pour tout événement $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$: $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \sum_{\omega\in\mathrm{A}} \mathbb{P}(\{\omega\})$.

Exemples 11.2.

- Existe-t-il une probabilité uniforme sur une partie infinie dénombrable quelconque ?

  Non car la seule suite (infinie) constante et sommable est la suite nulle, mais sa somme vaut 0 et non 1.

- Que penser de l'énoncé « on considère la probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\mathbb{P}(n) = \frac{1}{n}$ » ?

  Hu hu hu ! Cet énoncé est ridicule car la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable ce qui rend impossible l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(n) = 1$.

- Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(n) = \frac{a}{n^2}$ définit une probabilité sur $\Omega = \mathbb{N}^*$.

  La suite $\left(\left(n, \frac{a}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité si, et seulement si, la suite de terme général $\frac{a}{n^2}$ est sommable, ce qui est bien le cas, et de somme 1, ce pour quoi il faut et il suffit que $a = \frac{6}{\pi^2}$.

Exercice 11.2 – Oral CCINP. Mme Contraire et M. Jaury observent un panneau qui va afficher un entier $n \in \mathbb{N}^*$ avec la probabilité $\frac{a}{2^n}$, et Mme Contraire *(dont on connaît l'humeur folâtre)* affirme « si l'entier est impair c'est moi qui gagne ! ».
Que vaut a ? Quelle probabilité a-t-elle de gagner ?

Proposition 11.4 – La formule des probabilités composées *(pour rappel)*

Soit $(\mathrm{A}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) \times \mathbb{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{\mathrm{A}_1\cap\cdots\cap\mathrm{A}_{n-1}}(\mathrm{A}_n).$$

Proposition 11.5 – Continuités croissante et décroissante

Continuité croissante (*resp.* décroissante) d'une probabilité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (*resp.* décroissante) d'événements, c'est-à-dire si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n\subset A_{n+1}$ (*resp.* $A_{n+1}\subset A_n$), alors

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)\quad(\textit{resp.}\ \ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)\,).$$

Sous-additivité d'une probabilité : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n).$$

Corollaire 11.6 – Le résultat qu'on utilise en pratique !

Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)=\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\Big)\quad\text{et}\quad\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)=\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\Big).$$

Exemples 11.3. La probabilité que le jeu entre le Roi et Monsieur ne s'arrête jamais est

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{P}_i\right)=\lim_{i\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i}\overline{P}_k\right)=\lim_{i\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=0$$

Définition 11.6 – Événement quasi-certain, événement négligeable, système quasi-complet d'événements

- Si $\mathbb{P}(A)=1$ on dit que A est **presque sûr** ou **quasi-certain** ;
- si $\mathbb{P}(A)=0$, A est dit **négligeable** ou **quasi-impossible** ;
- on appelle système **quasi-complet** d'événements toute famille $(a_i)_{i\in I}$ d'événements telle que
  - $\forall(i,j)\in I^2$, $(i\neq j)\Rightarrow(A_i\cap A_j=\varnothing)$ (les A_i sont 2 à 2 incompatibles),
  - $\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)=1$.

Exemple 11.4. L'événement A =« ne jamais obtenir pile lors de lancers successifs d'une pièce équilibrée » est négligeable, car $A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i$ (en notant F_i =« le i^e lancer donne Face ») donc par continuité décroissante

$$\boxed{\mathbb{P}(A)} = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N} F_i\right) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(F_i) \quad \textit{(en supposant les lancers indépendants)}$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^N \quad \textit{(car la pièce est équilibrée)} \quad \boxed{=0}.$$

Proposition 11.7 – La formule des probabilités totales dans le cas général

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements de probabilités non-nulles, alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B \mid A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B).$$

La formule des probabilités totales est probablement la formule la plus importante du cours de probabilités.

Exercice 11.3 – Suite de l'exercice 11.2.
M. Jaury *(qui peut aussi être un sacré polisson)*, propose de choisir au hasard entre 0 et n (que le panneau vient d'afficher) un entier, et de ne jauger que la parité de ce dernier. La probabilité de victoire de Mme Contraire reste-t-elle la même ?

Proposition 11.8 – Formule de Bayes

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements et B un événement, alors pour tout $k \in I$:

$$\mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}.$$

$(= \mathbb{P}(B)$ *probabilités totales*$)$

Remarque 11.3 – Loi d'une variable en passant par des inégalités

En supposant que $X(\Omega) = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, où les x_k forment une suite croissante :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(X > x_{k-1}) - \mathbb{P}(X > x_k) = \mathbb{P}(X \leqslant x_k) - \mathbb{P}(X \leqslant x_{k-1}),$$
$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(X \geqslant x_k) - \mathbb{P}(X \geqslant x_{k+1}) = \mathbb{P}(X < x_{k+1}) - \mathbb{P}(X < x_k).$$

4. Lois de probabilité usuelles infinies

Méthode 11.1 – Rappel : « donner la loi de probabilité de la variable X »
consiste à donner les deux caractéristiques suivantes :

- l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs de X ;
- la probabilité $\mathbb{P}(X=x)$ de chaque valeur $x \in X(\Omega)$.

Définition 11.7 – Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$, on dit que X suit une **loi géométrique de paramètre** p, on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, lorsque

$$X(\Omega)=\mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}.$$

Remarque 11.4 Lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli **indépendantes** dans lequel le succès n'a pas une probabilité nulle, le rang d'apparition X du premier succès, ou nombre d'épreuves nécessaires pour la réalisation du premier succès, suit une loi géométrique. On admet que X est une variable aléatoire car la probabilité que le succès n'apparaisse jamais est nulle.
Ne pas la confondre avec le nombre Z d'échecs avant le premier succès, qui ressemble à la loi géométrique : $Z(\Omega)=\mathbb{N}$, et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z=k)=p(1-p)^k$.

Exercice 11.4 – loi sans mémoire.

1. Montrer que si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X>k)=(1-p)^k$, et X est sans mémoire, autrement dit pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$: $\mathbb{P}_{(X>\ell)}(X>k+\ell)=\mathbb{P}(X>k)$.
2. Réciproquement, montrer que si X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sans mémoire, autrement dit telle que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}(X>k)>0, \text{ et } \mathbb{P}_{(X>\ell)}(X>k+\ell)=\mathbb{P}(X>k),$$

alors X suit une loi géométrique.

Définition 11.8 – Loi de Poisson

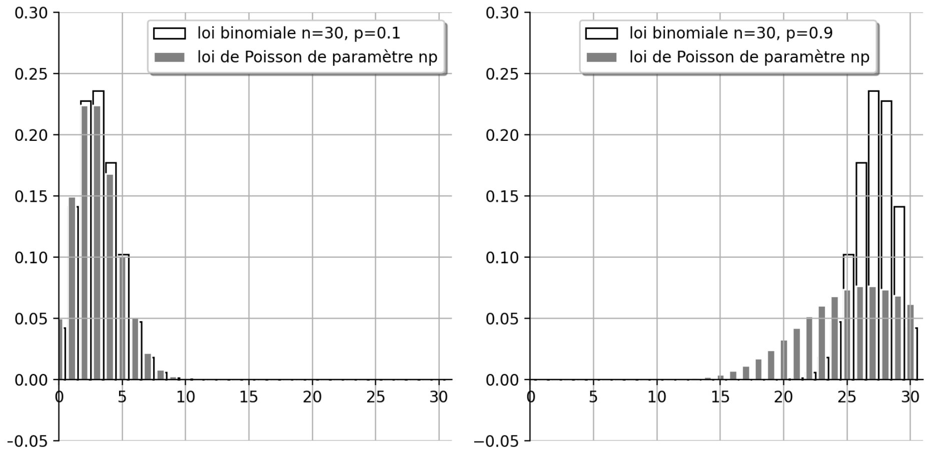
Soit λ un reél strictement positif, on dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ, on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, lorsque

$$X(\Omega)=\mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Remarques 11.5 Une loi de Poisson modélise le nombre d'apparitions d'un événement rare au cours d'un laps de temps, elle décrit le nombre, durant un laps de temps fixé, de véhicules franchissant un poste de péage pendant une période fixée ; de défauts dont est affecté un objet qui est fabriqué en série ; de connexions à un serveur ; de mutations en biologie ; de désintégrations d'atomes dans un gramme d'atomes ; etc.

Exercice 11.5 – convergence en loi de la loi binomiale vers la loi de Poisson.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathscr{B}(n, p_n)$, avec $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

On interprète ce résultat en considérant que lorsque p est petit par rapport à n, généralement lorsque $p \leqslant 0{,}1$, $n \geqslant 30$, et $np < 15$ (ces chiffres varient un peu selon les auteurs), *la loi de Poisson $\mathscr{P}(np)$ fournit une approximation acceptable de $\mathscr{B}(n,p)$.*



Proposition 11.9 – Somme de lois de Poisson

Si X et Y sont **indépendantes**, et suivent respectivement les lois de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$, alors $X+Y$ suit $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

Exercice 11.6. Soient X et Y deux variables indépendantes qui suivent respectivement les lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. Quelle est la loi de $X+Y$?
Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$.

Une preuve de la proposition 11.1 *énoncé*

(1) S'il existe une bijection v entre A et une partie I de $\mathbb{N}$, alors pour toute partie B de A, $v_{|\mathrm{B}}$ est une bijection entre B et $v(\mathrm{B}) \subset \mathrm{I} \subset \mathbb{N}$.

(2) S'il existe une bijection u entre A et B, et une bijection v entre B et une partie I de $\mathbb{N}$, alors $v \circ u$ est une bijection entre A et I.

(3) Si A et B sont dénombrables, alors il existe une bijection φ (*resp.* ψ) entre A (resp B) et $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$ (*resp.* $\mathrm{J} \subset \mathbb{N}$).

Alors l'application $(a, b) \mapsto (\varphi(a), \psi(b))$ est une bijection de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$, puis l'application qui à tout $(i, j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$ associe $\frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ est injective, donc établit une bijection entre $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ et une partie de $\mathbb{N}$.

On généralise par récurrence à un nombre fini quelconque d'ensembles.

(4) l'application qui à tout entier p de $\mathbb{Z}$ associe $2p$ si p est positif, et $-2p-1$ si p est strictement négatif, est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est en bijection avec $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, car $x \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, il existe un couple unique $(n, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que n et d sont premiers entre eux, et $x = \frac{n}{d}$.

Une correction de l'exercice 11.1 *énoncé*

$$\mathrm{A} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{\mathrm{P}}_i,$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} &= \mathrm{P}_1 \cup \left(\overline{\mathrm{P}_1} \cap \overline{\mathrm{P}_2} \cap \mathrm{P}_3\right) \cup \left(\overline{\mathrm{P}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{P}_4} \cap \mathrm{P}_5\right) \cup \cdots \\
&= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{2k} \overline{\mathrm{P}}_i \quad \cap \mathrm{P}_{2k+1} \right)
\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 11.3 *énoncé*

$\varnothing$ est le complémentaire de Ω, et si $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'une tribu, alors $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ est encore dans la tribu, en vertu des lois de De Morgan que je rappelle ci-dessous :

$$\overline{\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i} = \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \overline{\mathrm{A}_i} \text{ et } \overline{\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \overline{\mathrm{A}_i}.$$

La proposition en est la conséquence directe car une tribu est stable par réunion dénombrable et passage au complémentaire.

Une correction de l'exercice 11.2 *énoncé*

➟ Pour que la distribution de probabilité donnée soit valide, il faut et il suffit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{2^n} = 1$.

Or $\frac{a}{2^n} = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ en reconnaissant la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) &= a \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \textit{(attention ! La somme commence à 1 !)}\\ &= a \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{a}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{a}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = a.\end{aligned}$$

donc a doit être égal à 1.

➟ Notons A l'événement « Mme Contraire gagne ».

> *L'erreur classique ici est de penser que A est l'événement « l'entier est $2k+1$, donc $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2^{2k+1}}$ ».*
> *Qui est cet entier k ? Est-ce une valeur particulière ? Dans ce cas $\mathbb{P}(A)$ vaut-il $\frac{1}{2^5}$ ou $\frac{1}{2^{2025}}$? Mais l'événement A ne dépend pas d'un entier k, pourquoi sa probabilité le ferait ?*
> *On a confondu ici l'ensemble des entiers impairs avec un suel entier impair, fut-il quelconque.*

Mme Contraire gagne si et seulement si l'entier qui apparaît est impair, donc

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{2k+1\}.$$

Ces événements étant deux à deux incompatibles, on a par σ-additivité de la probabilité

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(2k+1)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1}}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 11.4 *énoncé*

Par récurrence, en remarquant que si $\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}) \neq 0$, alors pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, par croissance de la probabilité, $(A_1 \cap\cdots\cap A_{n-1}) \subset (A_1 \cap\cdots\cap A_i)$ entraîne que $\mathbb{P}(A_1 \cap\cdots\cap A_i) > \mathbb{P}(A_1 \cap\cdots\cap A_{n-1}) > 0$.
Le nœud de la preuve est

$$\mathbb{P}(A_1 \cap\cdots\cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1 \cap\cdots\cap A_n) \times \mathbb{P}(A_{n+1} \mid (A_1 \cap\cdots\cap A_{n-1})),$$

et on connaît $\mathbb{P}(A_1 \cap\cdots\cap A_n)$ par récurrence.

Une preuve de la proposition 11.7 *énoncé*

$B = B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$, et comme cette réunion est disjointe, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(B\cap A_i) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Une correction de l'exercice 11.3 *énoncé*

Ici la probabilité d'obtenir un entier entre 0 et n dépend de la parité de n, et bien évidemment de la valeur de n.
En notant I l'événement « l'entier final est impair », pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{2k}(I) = \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$ et $\mathbb{P}_{2k+1}(I) = \frac{k+1}{2k+2} = \frac{1}{2}$.
Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales sur le système complet des événements « n », on a

$$\mathbb{P}(I) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(n) \times \mathbb{P}_n(I),$$

et en séparant la somme en deux *(on peut car il s'agit de la somme d'une suite sommable)*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{I}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(2k) \times \mathbb{P}_{2k}(\mathrm{I}) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(2k+1) \times \mathbb{P}_{2k+1}(\mathrm{I}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{2^{2k}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times \left(\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) - 1\right) \quad \textit{(d'après le développement en série entière de argth que l'on verra plus tard)} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\ln(3) \simeq 0{,}45,
\end{aligned}$$

M. Jaury a donc bien floué Mme Contraires, ce filou !

Une preuve de la proposition 11.8

énoncé

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$, puis on applique la formule des probabilités totales.

Une correction de l'exercice 11.4

énoncé

(1) Supposons que X suit $\mathscr{G}(p)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{X} > k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k+1}^{+\infty} (\mathrm{X} = n)\right) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n) \\
&= \sum_{n=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \\
&= p(1-p)^k \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n = p(1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k.
\end{aligned}$$

Pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X>\ell)}(X>k+\ell) &= \frac{P\big((X>\ell)\cap(X>k+\ell)\big)}{\mathbb{P}(X>\ell)} = \frac{P\big((X>k+\ell)\big)}{\mathbb{P}(X>\ell)}\\ &= \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^{\ell}} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X>k).\end{aligned}$$

(2) Supposons que

$$\forall(k,\ell)\in\mathbb{N}^2,\ \ \mathbb{P}_{(X>\ell)}(X>k+\ell)=\mathbb{P}(X>k).$$

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{(X>n)}(X>n+1)=\mathbb{P}(X>1),$$

mais aussi

$$\mathbb{P}_{(X>n)}(X>n+1) = \frac{P\big((X>n)\cap(X>n+1)\big)}{\mathbb{P}(X>n)} = \frac{P\big(X>n+1\big)}{\mathbb{P}(X>n)}$$

donc $\mathbb{P}(X>n+1)=\mathbb{P}(X>1)\,\mathbb{P}(X>n)$, et par récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ \mathbb{P}(X>n)=\mathbb{P}(X>1)^n\,\mathbb{P}(X>0)=\mathbb{P}(X>1)^n$$

car $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{P}(X>0)=1$.
Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(X>n-1)-\mathbb{P}(X>n) &= \mathbb{P}(X>1)^{n-1}-\mathbb{P}(X>1)^n\\ &= \mathbb{P}(X>1)^{n-1}(1-\mathbb{P}(X>1))\\ &= p(1-p)^{n-1}\ \ \textit{(en posant } p=\mathbb{P}(X>1)\textit{)}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 11.5

énoncé

Soit $k\in\mathbb{N}$, alors pour tout $n\geqslant k$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n=k) &= \binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\times p_n^k(1-p_n)^{n-k}\\ &= \frac{(1-p_n)^n}{k!}\times\frac{n!}{(n-k)!}\times\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k,\end{aligned}$$

or

- on sait que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$, c'est-à-dire $p_n = \frac{\lambda}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc

$$\ln(1-p_n) = \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$$

d'où

$$n\ln(1-p_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -\lambda,$$

et

$$(1-p_n)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-p_n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{e}^{-\lambda}\,;$$

- p_n tend vers 0, donc $1-p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, et

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-k)!} \times \left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k &= n(n-1)\cdots(n-k+1) \times p_n^k \times \frac{1}{(1-p_n)^k} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n^k \times p_n^k \times 1 = (np_n)^k \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \lambda^k.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \times \lambda^k \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une preuve de la proposition 11.9 *énoncé*

La variable $X+Y$ est aussi à valeurs dans $\mathbb{N}$, et pour tout $t \in]-1\,;1[$,

$$\begin{aligned}
G_{X+Y}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y=n)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=n-x) \right) t^n \quad \textit{(en appliquant la remarque \textbf{??})} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \right) t^n \quad \textit{(car } \mathbb{P}(Y=n-k)=0 \textit{ pour } k>n\textit{)} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n)t^n \right) \quad \textit{(en reconnaissant le produit de Cauchy)} \\
&= G_X(t) \times G_Y(t).
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 11.6 *énoncé*

D'après la proposition ci-dessus, $X+Y$ suit $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P_{(X+Y=n)}(X=k) &= \frac{\mathbb{P}\big((X=k)\cap(X+Y=n)\big)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbb{P}\big((X=k)\cap(Y=n-k)\big)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=k)\times\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \quad \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{).}
\end{aligned}$$

Dans le cas où $k>n$, alors $n-k \notin \mathbb{N}$, donc $\mathbb{P}(Y=n-k)=0$, d'où $P_{(X+Y=n)}(X=k)=0$.
Dans le cas où $k \in [\![0\,;n]\!]$

$$\begin{aligned}
P_{(X+Y=n)}(X=k) &= \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\,\frac{e^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{e^{-\lambda}e^{-\mu}}{e^{-(\lambda+\mu)}} \times \frac{\lambda^k \times \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Donc la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.