Notations – Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et sauf mention contraire u est un endomorphisme de E, λ un scalaire de $\mathbb{K}$, n un entier strictement positif, et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Résultats préliminaires

Remarques 12.1

(1) $\mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = \lambda x\}$, autrement dit :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathrm{E}, \quad x \in \mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \Longleftrightarrow u(x) = \lambda x.}$$

On constatera aussi l'égalité $\mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Ker}(\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E} - u)$.

(2) L'homothétie de E de rapport λ est l'endomorphisme $x \in \mathrm{E} \mapsto \lambda x$.

Proposition 12.1 – Injectivité en dimension quelconque

L'endomorphisme $u-\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ n'est pas injectif si, et seulement si, il existe un vecteur x ***non nul*** dans E tel que $u(x) = \lambda x$.

Proposition 12.2 – En dimension finie

Dans le cas où E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, on note M la matrice de u dans une base quelconque de E. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) $u-\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ n'est pas injectif ;

(ii) $u-\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ n'est pas bijectif ;

(iii) il existe x **non nul** dans E tel que $u(x) = \lambda x$;

(iv) $\mathrm{rg}(u-\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \leqslant n-1$;

(v) $(\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_n)$ n'est pas inversible ;

(vi) $\det(\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_n) = 0$;

(vii) il existe une colonne X **non nulle** dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{MX} = \lambda\,\mathrm{X}$;

(viii) $\mathrm{rg}(\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_n) \leqslant n-1$.

Proposition 12.3 – Droite stable par un endomorphisme

Une droite vectorielle D de E est stable par u si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{D} \subset \mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$. Dans ce cas, l'endomorphisme de D induit par u est l'homothétie vectorielle de rapport λ.

Exercice 12.1 – Ne pas confondre inconnues et paramètres !
Résoudre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ l'équation $\lambda^4 x = \lambda x$.

2. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice

2.1. Cas général

Définition 12.1 – Éléments propres d'un endomorphisme

(1) On dit que λ est une **valeur propre** de u lorsqu'il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.

(2) Tout vecteur **non nul** x de E qui vérifie $u(x) = \lambda x$ est alors appelé **vecteur propre** de u **associé à la valeur propre** λ.

(3) Si λ est valeur propre de u, on appelle **sous-espace propre** de u associé au scalaire λ le sous-espace vectoriel de E noté $\mathrm{E}_\lambda(u)$ et défini par

$$\mathrm{E}_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = \lambda x\}.$$

(4) On appelle **spectre dans $\mathbb{K}$ de l'endomorphisme** u l'ensemble noté $\mathrm{Sp}_\mathbb{K}(u)$ des valeurs propres de u dans $\mathbb{K}$.

Remarque 12.2 Bien observer qu'un vecteur propre est par définition non nul !
Le scalaire λ est valeur propre de u si, et seulement si, $u - \lambda\, \mathrm{id}_\mathrm{E}$ n'est pas injectif.

Méthode 12.1 – Pour trouver les valeurs propres de u : on peut résoudre, selon les valeurs du **paramètre** λ, **l'équation aux éléments propres** $(\mathrm{E}_\lambda) : u(x) = \lambda x$, qui équivaut à $(u - \lambda\, \mathrm{id}_\mathrm{E})(x) = 0_\mathrm{E}$, d'**inconnue** x.

- Les valeurs propres de u sont alors les scalaires λ pour lesquels cette équation a des solutions non-nulles ;
- dans ce cas les solutions non nulles sont les vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ, et l'ensemble des solutions est le sous-espace propre associé $\mathrm{E}_\lambda(u)$.

Exemple 12.1. La dérivation $\mathrm{D} : f \mapsto \mathrm{D}(f) = f'$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Tout réel λ est valeur propre de D, et $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{D}) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $f_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$.

Exercices 12.2.

Montrer que $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ qui n'a pas de valeur propre.	Vérifier que tout scalaire est valeur propre de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, et préciser son sous-espace propre associé.	Déterminer les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$: $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_2 - \mathrm{M}$.

Proposition 12.4

(1) Les sous-espaces propres de u, associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, sont en somme directe.

(2) Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Remarques 12.3

- → 0 est valeur propre de u si, et seulement si, u n'est pas injectif.
- → $E_\lambda(u)$ contient d'une part le vecteur nul et d'autre part tous les vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ.
- → Le vecteur x est un vecteur propre de u si, et seulement si, $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite vectorielle stable par u.
- → Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par u et l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ induit par u est l'homothétie de rapport λ.
- → Si $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.
- → Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme de F induit par u sont aussi valeurs propres et vecteurs propres de u.

Exemple 12.2 – Valeurs propres dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Soit l'endomorphisme $u : (x, y) \mapsto (-y, x)$ de $\mathbb{K}^2$. Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X = (x, y) \in \mathbb{K}^2$,

$$u(X) = \lambda(X) \Longleftrightarrow (\cdots) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\lambda^2+1)x & = 0 \\ \quad y & = -\lambda x \end{cases}$$

donc :

- si $\lambda \in \mathbb{R}$: $u(X) = \lambda(X) \Longleftrightarrow X = (0,0)$, donc λ n'est pas valeur propre de u. Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \varnothing$.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}$:

  si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$,
  $$u(X) = \lambda(X) \Longleftrightarrow X = (0,0),$$
  donc λ n'est pas valeur propre de u ;

  si $\lambda \in \{\pm i\}$,
  $$u(X) = \lambda X \Longleftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix},$$
  donc λ est valeur propre de u avec $E_\lambda(u) = \mathrm{Vect}((1, -\lambda))$.

  Par conséquent $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u) = \{\pm i\}$.

Proposition 12.5

Si les endomorphismes u et v commutent, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

2.2. Polynômes d'endomorphismes et valeurs propres

Exercice 12.3. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
Montrer que si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Proposition 12.6 – Polynôme annulateur et valeurs propres

Si un polynôme P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P, autrement dit le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P.

Exercice 12.4. Quelles sont les seules valeurs propres possibles d'un endomorphisme nilpotent ? D'un projecteur ? D'une symétrie ?

2.3. Cas de la dimension finie

Dans toute la suite l'espace vectoriel E ***est de dimension finie****, et on pose* $\boxed{n = \dim(E)}$.

Proposition 12.7 – Éléments propres en dimension finie

(1) λ est valeur propre de u si, et seulement si, $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif. Dans ce cas $\dim(E_\lambda(u))$ est appelée **ordre de multiplicité géométrique** de λ, on le note d_λ, et grâce au théorème du rang :
$$d_\lambda = n - \mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E).$$

(2) Le nombre de valeurs propres de u est majoré par n.

(3) La somme des ordres de multiplicité géométrique est majorée par n :
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} d_\lambda \leqslant n.$$

Exercice 12.5. Soient A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient $AB - BA = B$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^kA = kB^k$, et en déduire que B est nilpotente.

2.4. Éléments propres d'une matrice carrée

Définition 12.2 – Élements propres d'une matrice

Les éléments propres (valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres) d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé à cette matrice.

(1) λ est **valeur propre** de M lorsqu'il existe $X \in \mathbb{K}^n$ **non nul** tel que $MX = \lambda X$.

(2) dans ce cas X est un **vecteur propre** de M, associé à la valeur propre λ, et le **sous-espace propre associé** à la valeur propre λ est alors

$$E_\lambda(M) = \operatorname{Ker}(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid MX = \lambda X\},$$

Ici aussi $d_\lambda = \dim(E_\lambda(M))$ est **l'ordre de multiplicité géométrique** de λ, et grâce au théorème du rang : $d_\lambda = n - \operatorname{rg}(M - \lambda I_n)$.

Le spectre d'une matrice est l'ensemble de ses valeurs propres.

Remarques 12.4

λ est valeur propre de M si, et seulement si, $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible ;

$M - \lambda I_n$ est inversible si, et seulement si, λ n'est pas valeur propre de M.

- M est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de M.
  Si $\operatorname{rg}(M) = r < n$ alors 0 est valeur propre de M d'ordre de multiplicité géométrique $n - r$.
- Si M est inversible alors

$$\operatorname{Sp}\left(M^{-1}\right) = \left\{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(M)\right\}.$$

- Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres.
- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses termes diagonaux.
- Si les sommes des coefficients de chaque ligne de M sont toutes égales à λ, alors λ est valeur propre de M, et $(1,1,\ldots,1)$ est un vecteur propre associé.

Exercice 12.6 – (Extrait d'oral CCINP).
Soit $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont -1 n'est pas valeur propre. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$U = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}.$$

Proposition 12.8 – Lien entre éléments propres de matrices et endomorphismes

Pour toute base $\mathscr{B}$ de E,

(1) λ est valeur propre de l'endomorphisme u si, et seulement si, λ est valeur propre de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

(2) $x \in \mathrm{E}$ est vecteur propre de l'endomorphisme u si, et seulement si, la colonne de ses coordonnées $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ est vecteur propre de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Méthode 12.2

- Pour trouver les valeurs propres de M (*resp.* de u tel que $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$), on peut résoudre selon les valeurs de λ l'équation aux éléments propres $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$, qui équivaut au système homogène $(\mathrm{M} - \lambda\mathrm{I}_n)\mathrm{X} = 0$.

  Les valeurs propres de M (*resp.* de u) sont les scalaires λ pour lesquels le système a des solutions non-nulles, et dans ce cas, $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M})$ est l'ensemble des solutions du système $(\mathrm{M}-\lambda\mathrm{I}_n)\mathrm{X} = 0$ (*resp.* on obtient $\mathrm{E}_\lambda(u)$ en interprétant ces solutions comme coordonnées dans la base $\mathscr{B}$).
- Pour chacune de ses valeurs propres λ, le rang de $\mathrm{M} - \lambda\mathrm{I}_n$ nous donne la dimension de E_λ grâce au théorème du rang. On sait alors combien de vecteurs propres linéairement indépendants on doit trouver pour avoir une base de E_λ.

Exercice 12.7. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme $\Phi : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_2 - \mathrm{M}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 12.8.
Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, montrer que les sous-espaces propres de la matrice ci-contre sont des droites vectorielles :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

3. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Proposition 12.9

L'application $x \mapsto \det(x\mathrm{I}_n - \mathrm{M})$ est une fonction polynomiale de degré n, **unitaire**, c'est-à-dire de coefficient dominant 1, et pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\det(x\mathrm{I}_n - \mathrm{M}) = x^n - \mathrm{tr}(\mathrm{M})\, x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(\mathrm{M}).$$

Définition 12.3 – Polynôme caractéristique

On appelle **polynôme caractéristique** de u (*resp.* de M), le polynôme

$$\chi_u(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{X}\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} - u) \quad (\textit{resp. } \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{X}\,\mathrm{I}_n - \mathrm{M})).$$

Remarques 12.5

- Pour $\mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} - m_{1,1} & -m_{1,2} & \cdots & \cdots & -m_{1,n} \\ -m_{2,1} & \mathrm{X} - m_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -m_{n-1,n} \\ -m_{n,1} & \cdots & \cdots & -m_{n,n-1} & \mathrm{X} - m_{n,n} \end{vmatrix}$.
- Si $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \mathrm{B}$ alors $\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{P} = \mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{B}$, donc :
  - deux matrices semblables ont le polynôme caractéristique,
  - et le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est celui de sa matrice dans n'importe laquelle base.
- Par multilinéarité du déterminant : $\det(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{M}) = (-1)^n \det(\mathrm{M} - \mathrm{X}\mathrm{I}_n)$.
- Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique.
- Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire (et en particulier diagonale) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de termes diagonaux $(a_1, \ldots, a_n)$ est $(\mathrm{X} - a_1) \times \cdots \times (\mathrm{X} - a_n)$.

Exercice 12.9.

1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
2. Retrouver ce résultat en reconnaissant l'endomorphisme canoniquement associé à $\frac{1}{3}\mathrm{A}$.

Exercice 12.10. Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$, montrer que la matrice de l'exercice 12.8 a pour polynôme caractéristique $\mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$.

4. Valeurs propres et polynôme caractéristique

Dans toute la suite, le symbole $\square$ pourra être remplacé par l'endomorphisme u de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ ou la matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 12.10 – Valeurs propres et polynôme caractéristique

Les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique.

Exercice 12.11. Montrer que tout endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire admet une droite vectorielle, et un hyperplan vectoriel, stable.

Proposition 12.11 – Trace, déterminant, et valeurs propres

Si $\chi_\square$ est scindé sur $\mathbb{K}$, autrement dit s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\chi_\square(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\mathrm{X} - \lambda_p)^{m_p}, \text{ avec } m_1 + \cdots + m_p = n,$$

alors
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de $\square$,
- $\det(\square) = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_p^{m_p} = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{m_k}$,
- $\mathrm{tr}(\square) = m_1\lambda_1 + \cdots + m_p\lambda_p = \sum_{k=1}^{p} m_k \lambda_k$.

Remarque 12.6 Dire que $\chi_\square$ est scindé sur $\mathbb{K}$ est une manière savante de dire que $\square$ a toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.
Donc la proposition 12.11 ci-dessus est toujours vraie dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exemple 12.3. Si $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\chi_\mathrm{M}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 2)$.

Le spectre réel de M est $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(\mathrm{M}) = \{1\}$ où l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 est $m_1 = 1$.
On constate que $\det(\mathrm{M}) = 2 \neq 1^{m_1}$ et que $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 3 \neq m_1 \times 1$, ainsi les relations entre la trace, le déterminant, et les valeurs propres de la proposition 12.11 sont fausses si on se contente de travailler dans $\mathbb{R}$, car χ_M n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$.

En revanche dans $\mathbb{C}$,
$\chi_\mathrm{M}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-1-i)(\mathrm{X}-1+i)$ est scindé, $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{M}) = \{1, 1+i, 1-i\}$, et on a bien

$$\det(\mathrm{M}) = 2 = 1 \times (1+i) \times (1-i),$$
$$\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 3 = 1 + (1+i) + (1-i).$$

5. Ordre de multiplicité algébrique d'une valeur propre

Remarque 12.7 – rappel, ordre de multiplicité de la racine d'un polynôme
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors les affirmations ci-dessous sont équivalentes :

(i) a est racine d'ordre m_a de P (où $m_a \in \mathbb{N}$) ;

(ii) $(X-a)^{m_a}$ divise P mais pas $(X-a)^{m_a+1}$, autrement dit m_a est la plus grande puissance de $(X-a)$ par laquelle on peut diviser P ;

(iii) il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)^{m_a} Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$;

(iv) a est racine des polynômes $P, P', \ldots, P^{(m_a-1)}$ mais pas de $P^{(m_a)}$;

(v) l'entier m_a est la puissance de $(X-a)$ dans la décomposition (de Gauss ou de d'Alembert) de P.

Définition 12.4 – Ordre de multiplicité algébrique d'une valeur propre

On appelle **ordre de multiplicité algébrique de la valeur propre** λ de $\square$ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de $\chi_\square$, on le note m_λ.

Exemple 12.4. On a vu que $\chi_A = (X-3)(X+3)^2$ est le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, donc 3 et -3 sont valeurs propres de A d'ordres de multiplicité algébriques respectifs 1 et 2.

Remarques 12.8 – Décomposition du polynôme caractéristique

- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, donc on sait que le polynôme caractéristique se factorise, dans $\mathbb{C}$, sous la forme $\chi_\square(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\square)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$.
- Si les racines d'un polynôme annulateur de $\square$ sont $\mu_1, \ldots, \mu_p$, alors on sait que $\mathrm{Sp}(\square) \subset \{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$, donc le polynôme caractéristique de $\square$ se factorise sous la forme :

$$\chi_\square = (X-\mu_1)^{m_1} \times \cdots \times (X-\mu_p)^{m_p},$$

  où les m_i sont des entiers naturels qui peuvent être nuls dans le cas où ils ne correspondent pas à une véritable valeur propre de $\square$.
  Dans ce cas, on peut aussi affirmer que :
  - la somme des m_i est égale au degré de $\chi_\square$ que l'on connaît selon $\square$,
  - $\chi_\square$ étant scindé, la trace de $\square$ est égale à la somme des racines de $\chi_\square$ (en comptant chacune autant de fois que son ordre de multiplicité !).

Remarques 12.9

(1) Si un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ou une matrice à coefficients réels, ont une valeur propre complexe μ, alors $\overline{\mu}$ est aussi valeur propre, de mêmes ordres de multiplicité géométrique et algébrique.

(2) Les matrices semblables, ou transposées l'une de l'autre, ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité algébriques et géométriques.

Exercice 12.12. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Proposition 12.12 – Comparaison des ordres de multiplicité

L'ordre de multiplicité géométrique est majoré par l'ordre de multiplicité algébrique :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\square), \quad 1 \leqslant d_\lambda \leqslant m_\lambda.$$

Exemple 12.5. La matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a pour polynôme caractéristique $(X-1)^3$, donc pour unique valeur propre 1 d'ordre de multiplicité 3, mais grâce au théorème du rang

$$\dim(E_1(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 3 - \mathrm{rg}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1.$$

Remarque 12.10 – Cas d'une valeur propre simple
Si λ est une valeur propre simple, c'est-à-dire d'ordre de multiplicité algébrique $m_\lambda = 1$, alors son ordre de multiplicité géométrique est aussi 1, autrement dit son sous-espace propre associé E_λ est une droite vectorielle.

Proposition 12.13 – Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique de $\square$ est un polynôme annulateur de $\square$, autrement dit $\chi_\square(\square) = 0$.

Exercice 12.13.

1. Montrer que si une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une seule valeur propre λ, alors $M - \lambda I_n$ est nilpotente.
2. Montrer que toute matrice triangulaire stricte (autrement dit triangulaire de diagonale nulle) est nilpotente.

Exercice 12.14.

1. Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$ et $C \neq 0_n$. Montrez que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A) \times C = C \times P(B)$.
2. Montrez que A et B ont au moins une valeur propre en commun.
3. Réciproquement, si A et B ont une valeur propre en commun, montrez qu'il existe une matrice $C \neq 0_n$ telle que $AC = CB$.

6. Diagonalisation en dimension finie

6.1. Définitions

On continue à supposer que $\dim(E) = n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 12.5 – Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

L'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u, que l'on appelle **base propre de** u (c'est-à-dire une base de E dans laquelle u a une matrice diagonale).

Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Remarques 12.11

- $u \in \mathscr{L}(E)$ (*resp.* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est diagonalisable lorsque E (*resp.* $\mathbb{K}^n$) est somme directe des sous-espaces propres de $\square$: $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\square)} E_\lambda(\square)$.
- Si u est diagonalisable, alors sa matrice dans une base de vecteurs propres est la matrice diagonale dont les termes de la diagonale sont les valeurs propres de u répétées autant de fois que leur multiplicité algébrique.
- Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable et vérifie $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0,1\}$ (*resp.* $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$) si, et seulement si, u est un projecteur (*resp.* une symétrie) de E.

Proposition 12.14 – Matrice diagonalisable

Une matrice est diagonalisable *(dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*)* si, et seulement si, elle est semblable à une matrice diagonale *(*$D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$*, via une matrice* $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$*)*.

Remarque 12.12 – Diagonaliser une matrice : si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ aux ordres de multiplicité respectifs $m_1, \dots, m_p$, alors

$$M = P \times \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix} \times P^{-1},$$

où P est la matrice dont les colonnes forment une base adaptée à $E_{\lambda_1}(M) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(M)$.

6.2. Conditions nécessaires et suffisantes

Proposition 12.15 – Caractérisations d'un endomorphisme et d'une matrice diagonalisable

On rappelle que $\dim(E) = n$, et que $\square$ désigne un endomorphisme de E ou une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\square$ est diagonalisable *(dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\square$ est une matrice)*;

(ii) la somme des ordres de multiplicité géométrique (c'est-à-dire des dimensions des sous-espaces propres) de $\square$ vaut n :

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\square)} \dim\left(E_\lambda(\square)\right).$$

(iii)
- le polynôme caractéristique de $\square$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$,
- l'ordre de multiplicité géométrique de chacune des valeurs propres (c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre associé) est égal à l'ordre de multiplicité algébrique.

Exercice 12.15. Soient a et b deux réels distincts.
Déterminer l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice ci-dessous est diagonalisable.

$$\begin{pmatrix} a & x & y & z \\ 0 & b & z & -y \\ 0 & 0 & a & x \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Exemple 12.6 – Un cas classique de non diagonalisabilité.

Si $\begin{cases} \chi_u(x) = \cdots \times (X-\lambda)^{m_\lambda} \times \cdots, \\ \dim(E_\lambda(u)) < m_\lambda, \end{cases}$ alors u n'est pas diagonalisable.

Par exemple, la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\chi_C = (X-1)^2(X+2)$, ainsi 1 est une valeur propre d'ordre de multiplicité $m_1 = 2$.
Mais $\operatorname{rg}(C - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 2$, donc $\dim(E_1(M)) = 3 - \operatorname{rg}(C - I_n) = 1 < 2 = m_1$, donc C n'est pas diagonalisable.

Exercice 12.16.
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$ et $\{-1,1\} \subset \operatorname{Sp}(A)$. Prouver que A est diagonalisable.

Proposition 12.16 – Caractérisation par un polynôme annulateur

- Un endomorphisme $\square$ (*resp.* une matrice $\square$) est diagonalisable si et seulement si $\square$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- Dans ce cas, $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\square)} (X-\lambda)$ est un polynôme annulateur de $\square$.

Exercice 12.17. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, mais pas $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.18. Montrer qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet une seule valeur propre λ est diagonalisable si, et seulement si, elle est égale à λI_n.

6.3. Conditions suffisantes

Proposition 12.17 – Une condition suffisante de diagonalisabilité

(On rappelle que $\square$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ou un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n.)
Si $\square$ possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors :

- $\square$ est diagonalisable,
- et tous ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Remarque 12.13 Cette condition est équivalente au fait que □ a un polynôme caractéristique scindé à racines simples.

Exercice 12.19. On suppose que la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres deux à deux distinctes.
Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commute avec A est diagonalisable dans une même base de vecteurs propres.

Remarque 12.14 – le théorème spectral
On verra dans un prochain chapitre le **théorème spectral**, ou aussi **théorème fondamental de l'algèbre**, qui affirme que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Proposition 12.18

Si u est diagonalisable, alors pour tout sous-espace vectoriel F stable par u, l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur F est aussi diagonalisable.

6.4. Applications classiques de la diagonalisation

Remarque 12.15 – Puissances d'une matrice diagonalisable :
Dans le cas où M est semblable à la matrice diagonale D, sous la forme $M = P \times D \times P^{-1}$, on peut calculer les puissances de M grâce à la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ M^n = P \times D^n \times P^{-1},$$

qu'on établit par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12.20. Diagonaliser $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et en déduire ses puissances.

Exercice 12.21 – Une suite récurrente.
Calculer en fonction de n, u_0, u_1 et u_2 le terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

Exercice 12.22 – Une équation matricielle. Résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

On pourra diagonaliser le second membre vers une matrice D et étudier la forme nécessaire des matrices Y telles que $Y^2 = D$.

7. Trigonalisation.

Définition 12.6 – Endomorphismes trigonalisables

L'endomorphisme u est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Définition 12.7 – Matrice trigonalisable

Une matrice est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 12.19 – Autre définition d'une matrice trigonalisable

La matrice M est trigonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.

Proposition 12.20 – Caractérisation d'un endomorphisme trigonalisable

L'endomorphisme u (*resp.* la matrice M) est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Remarque 12.16 En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Exercice 12.23. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{P}(u)) = \{\, \mathrm{P}(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \,\}$.

Remarque 12.17 – Un résultat hors-programme

Dans le cas où le polynôme caractéristique de u (*resp.* M) est $(\mathrm{X}-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\mathrm{X}-\lambda_p)^{m_p}$, il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice (*resp.* M est semblable à) une matrice triangulaire supérieure T dont les termes diagonaux sont les valeurs propres λ_i répétées chacune m_i fois.

Les preuves et les solutions

Une preuve de la proposition 12.1 *énoncé*

L'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{id}_E$ n'est pas injectif si, et seulement si, son noyau n'est pas réduit au vecteur nul, autrement dit si, et seulement si, il existe $x \neq 0_E$ qui vérifie $(u - \lambda \operatorname{id}_E)(x) = 0_E$, ce qui équivaut à $u(x) = \lambda x$.

Une preuve de la proposition 12.3 *énoncé*

Soit D une droite vectorielle de E, il existe un vecteur non nul a de E tel que $D = \operatorname{Vect}(a)$.

- Si D est stable par u, alors en particulier $u(a) \in D = \operatorname{Vect}(a)$, donc il existe un scalaire λ tel que $u(a) = \lambda a$. Par conséquent, pour tout $x \in D = \operatorname{Vect}(a)$, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu a$, et alors par linéarité de u,

$$u(x) = u(\mu a) = \mu u(a) = \mu(\lambda a) = \lambda(\mu a) = \lambda x$$

  autrement dit $x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$.
- Réciproquement, si $D \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$, alors pour tout $x \in D$, $u(x) = \lambda x$ est encore dans D, donc D est stable par u.

Une correction de l'exercice 12.1 *énoncé*

Notons (e) l'équation $\lambda^4 x = \lambda x$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in E$,

$$(e) \Longleftrightarrow \left(\lambda^4 - \lambda\right) x = 0_E.$$

Or

$$\lambda^4 - \lambda = \lambda(\lambda^3 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - j)(\lambda - j^2)$$

car $1, j, j^2$ sont les racines cubiques de l'unité, avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = \overline{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
Ainsi

- si $\lambda \in \{0, 1, j, j^2\}$, alors

$$(e) \Longleftrightarrow 0\, x = 0_E$$

  ce qui est vrai pour tout $x \in E$.
  Donc pour $\lambda \in \{0, 1, j, j^2\}$, l'ensemble des solutions de (e) est E.
- Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, j, j^2\}$, alors $\lambda^4 - \lambda \neq 0$, donc en multipliant par $\frac{1}{\lambda^4 - \lambda}$, on obtient

$$(e) \Longleftrightarrow x = 0_E.$$

  Ainsi pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, j, j^2\}$, l'ensemble des solutions est $\{0_E\}$.

Une correction de l'exercice 12.2 *énoncé*

(1) Je vous laisse vérifier que $P \mapsto XP$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, que l'on va appeler φ.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, l'équation aux éléments propres $\varphi(P) = \lambda P$ donne $XP = \lambda P$. Or $\deg(XP) = \deg(P) + 1$, et $\deg(\lambda P) \leqslant \deg(P)$, donc $\varphi(P) = \lambda P$ entraîne $\deg(P) + 1 \leqslant \deg(P)$, ce qui n'est possible que si $\deg(P) = -\infty$, c'est-à-dire si P est le polynôme nul.
Ainsi u n'a donc aucune valeur propre.

(2) Notons Φ l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, je laisse le lecteur montrer que c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'équation aux éléments propres $\Phi(u) = \lambda u$ se résout par

$$\begin{aligned}
\Phi(u) = \lambda u &\iff (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \lambda (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \lambda u_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \lambda^n u_0 \\
&\iff u = u_0 (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&\iff u \in \mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}})
\end{aligned}$$

donc λ est valeur propre de Φ et $E_\lambda(\Phi) = \mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
(\Phi - \lambda\,\mathrm{id})(M) &= \mathrm{Tr}(M) I_2 - M - \lambda M \\
&= \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d - \lambda a & -b \\ -c & a - \lambda d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation aux éléments propres donne

$$\begin{aligned}
(\Phi - \lambda\,\mathrm{id})(M) = 0_2 &\iff \begin{pmatrix} d - \lambda a & -(\lambda+1)b \\ -(\lambda+1)c & a - \lambda d \end{pmatrix} = 0_2 \\
&\iff \begin{cases} \lambda a \qquad\qquad\qquad\qquad - d = 0 \\ \qquad (\lambda+1)b = 0 \\ \qquad\qquad (\lambda+1)c = 0 \\ a \qquad\qquad\qquad\qquad - \lambda d = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \lambda L_4}{\iff} \begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad -(\lambda^2 - 1)d = 0 \\ \qquad (\lambda+1)b = 0 \\ \qquad\qquad (\lambda+1)c = 0 \\ a \qquad\qquad\qquad\qquad - \lambda d = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

- si $\lambda \notin \{-1,1\}$, alors

$$(\Phi - \lambda \,\mathrm{id})(M) = 0_2 \iff a = b = c = d = 0 \iff M = 0_2,$$

donc λ n'est pas une valeur propre de ϕ ;

- si $\lambda = 1$,

$$(\Phi - \mathrm{id})(M) = 0_2 \iff \begin{cases} 2b = 0 \\ 2c = 0 \\ a - d = 0 \end{cases} \iff M = aI_2,$$

donc 1 est valeur propre de ϕ, et $E_1(\phi) = \mathrm{Vect}(I_2)$;

- si $\lambda = -1$, de même

$$\begin{aligned}(\Phi + \mathrm{id})(M) = 0 &\iff a = -d \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &\iff M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc -1 est valeur propre de ϕ, et

$$E_{-1}(\phi) = \mathrm{Ker}(\Phi + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Le spectre de ϕ dans $\mathbb{C}$ est donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\phi) = \{\pm 1\}$.

Une preuve de la proposition 12.4 *énoncé*

(1)
- Tout sous-espace vectoriel est à lui tout seul en somme directe, même si ça parait un peu stupide.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est en somme directe.

  Prenons alors une famille de $p+1$ sous-espaces propres $(E_1, \ldots, E_{p+1})$ de u associés respectivement aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$, et prenons $p+1$ vecteurs $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in E_1 \times \cdots \times E_{p+1}$ qui vérifient

$$\sum_{k=1}^{p+1} x_k = 0_E,$$

alors en composant par u :

$$u\left(\sum_{k=1}^{p+1} x_k\right) = 0_E$$

$$\text{c'est-à-dire } \sum_{k=1}^{p+1} u(x_k) = 0_E$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k = 0_E \ \textit{(car les } x_k \textit{ sont vecteurs propres).}$$

On multiplie par $-\lambda_{p+1}$ l'égalité de départ, et on ajoute la dernière égalité, et on obtient

$$\sum_{k=1}^{p+1} (\lambda_k - \lambda_{p+1}) x_k = 0_E$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_{p+1}) x_k = 0_E.$$

On reconnaît là une somme nulle des vecteurs $(\lambda_k - \lambda_1)x_1, \dots, (\lambda_k - \lambda_p)x_p$, qui sont dans des sous-espaces propres qui par hypothèse de récurrence sont en somme libre. Donc les vecteurs sont tous nuls, et comme $\lambda_k \neq \lambda_{p+1}$, on conclut que $x_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Il reste alors $x_{p+1} = 0_E$, ce qui achève la preuve.

(2) On sait que des vecteurs non nuls pris respectivement dans des sous-espaces vectoriels en somme directe forment une famille libre, d'où le résultat.

Mais si ça ne vous suffit pas, en voici une preuve directe.

- Soit x un vecteur propre de u, alors $x \neq 0_E$ par définition d'une vecteur propre, donc la famille (x) est libre.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

  Prenons alors une famille de $p+1$ vecteurs propres $(x_1, \dots, x_{p+1})$ de u associés respectivement aux valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$, et prenons $p+1$ scalaires $(a_1, \dots, a_{p+1})$ qui vérifient

$$\sum_{k=1}^{p+1} a_k x_k = 0_E,$$

alors en composant par u :

$$u\left(\sum_{k=1}^{p+1} a_k x_k\right) = 0_E$$

$$\text{c'est-à-dire } \sum_{k=1}^{p+1} a_k u(x_k) = 0_E$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{p+1} a_k \lambda_k x_k = 0_E \ \textit{(car les } x_k \textit{ sont vecteurs propres).}$$

On multiplie par $-\lambda_{p+1}$ l'égalité de départ, et on ajoute la dernière égalité, et on obtient

$$\sum_{k=1}^{p+1} a_k(\lambda_k - \lambda_{p+1})x_k = 0_E$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{p} a_k(\lambda_k - \lambda_{p+1})x_k = 0_E.$$

On reconnaît là une combinaison linéaire nulle des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$, qui par hypothèse de récurrence forment une famille libre, donc les coefficients $a_k(\lambda_k - \lambda_{p+1})$ sont nuls pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, et comme $\lambda_k \neq \lambda_{p+1}$, on conclut que $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
Il reste alors $a_{p+1}x_{p+1} = 0_E$, qui donne $a_{p+1} = 0_E$ car $x_{p+1} \neq 0_E$, et achève la preuve.

Une preuve de la proposition 12.5 *énoncé*

Supposons que $u \circ v = v \circ u$.
Soit λ une valeur propre de u, montrer que le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par v.
Prenons x dans $E_\lambda(u)$, montrons que $v(x) \in E_\lambda(u)$, et pour cela montrons que $u(v(x)) = \lambda v(x)$:

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) \\ &= v(\lambda x) \ \textit{(car } x \in E_\lambda(u)\textit{)} \\ &= \lambda v(x) \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 12.3 *énoncé*

Si $u(x) = \lambda x$, alors par récurrence, $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(u)(x) &= \left(a_0 \,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + a_1 u + \cdots + a_p u^p\right)(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_p u^p(x) \\ &= a_0 x + a_1 \lambda x + \cdots + a_p \lambda^p x = \left(a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_p \lambda^p\right) x = \mathrm{P}(\lambda) x. \end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 12.6 *énoncé*

Supposons que $\mathrm{P}(u)$ est l'endomorphisme nul, et prenons λ une valeur propre de u, avec x un vecteur propre associé.
Alors le résultat de l'exercice précédent nous donne $\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$, donc $\mathrm{P}(\lambda)x = 0_{\mathrm{E}}$. Et comme $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ par définition d'un vecteur propre, on conclut que $\mathrm{P}(\lambda) = 0$.

Une correction de l'exercice 12.4 *énoncé*

Si u est nilpotent, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = \theta_{\mathrm{E}}$, donc X^p est un polynôme annulateur de u, la seule racine de ce polynôme est 0, donc la seule valeur propre possible de u est 0.
De même, on remarque que $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$ et $\mathrm{X}^2 - 1$ sont des polynômes annulateurs respectifs d'un projecteur et d'une symétrie, et on a vu que les valeurs propres d'un projecteur sont 0 et 1, tandis que les valeurs propres d'une symétrie sont -1 et 1.

Une preuve de la proposition 12.7 *énoncé*

(1) Ce résultat est la conséquence directe du fait qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si, et seulement si, il est injectif. L'égalité est une simple application du théorème du rang.

(2) On rappelle que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel E qui est de dimension n.

Supposons que u admette au moins $n+1$ valeurs propres, alors on peut trouver au moins un vecteur propre associé à chacune des ces valeurs propres, et d'après la proposition 12.4, la famille de ces vecteurs propres est une famille libre de cardinal $n+1$, ce qui est impossible dans un espace vectoriel de dimension n.

(3) Posons $\mathrm{Sp}(u) = \left\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\right\}$, alors on sait d'après la proposition 12.4 que les sous-espaces propres $\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe, ce dont on déduit que

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)) = \sum_{i=1}^{p} d_{\lambda_i}.$$

Or comme les $\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ est aussi un sous-espace vectoriel de E, donc $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)\right) \leqslant \dim(E)$.

Ceci revient à $\sum_{i=1}^{p} d_{\lambda_i} \leqslant n$, qui est le résultat voulu.

Une correction de l'exercice 12.5

énoncé

(1) Par récurrence sur k avec pour passer du rang k au rang $k+1$:

$$\begin{aligned} AB^{k+1} - B^{k+1}A &= (AB^k)B - B^k(BA) = (kB^k + B^kA)B - B^k(AB - B) \\ &= kB^{k+1} + B^{k+1} = (k+1)B^k. \end{aligned}$$

(2) En considérant l'endomorphisme $\Phi : M \mapsto AM - MA$, le résultat de la question précédente s'interprète de la forme

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Phi(B^k) = kB^k.$$

Si la matrice B n'est pas nilpotente, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k \neq 0_n$, donc d'après l'égalité ci-dessus, k est valeur propre de Φ. On en déduit alors que Φ admet une infinité de valeurs propres, ce qui est impossible, car Φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie.

Par conséquent, B est nilpotente.

Une correction de l'exercice 12.6

énoncé

- Si une telle matrice A existe, alors

$$\begin{aligned} U = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} &\Longleftrightarrow U(I_n + A) = I_n - A \Longleftrightarrow A + UA = I_n - U \\ &\Longleftrightarrow (I_n + U)A = I_n - U \\ &\Longleftrightarrow A = (I_n + U)^{-1}(I_n - U). \end{aligned}$$

- Or on sait que -1 n'est pas valeur propre de U, donc que $U - (-1)I_n = I_n + U$ est inversible, donc $(I_n + U)^{-1}$ existe, ainsi que la matrice $A = (I_n + U)^{-1}(I_n - U)$, et par les équivalences précédentes,

$$U = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} \Longleftrightarrow A = (I_n + U)^{-1}(I_n - U).$$

Une preuve de la proposition 12.8 — énoncé

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et M sa matrice dans la base $\mathscr{B}$: $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{M}$. Soit λ un scalaire.

(1) ➟ Si λ est une valeur propre de u alors il existe un vecteur non nul $x \in \mathrm{E}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Par conséquent les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des ces deux vecteurs sont égales, autrement dit $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(u(x)) = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda x)$, ce qui revient à $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$, en notant $\mathrm{X} = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

Et comme $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, on sait que $\mathrm{X} \neq 0$, donc on peut déduire de $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$ que λ est une valeur propre de M.

➟ Réciproquement, si λ est une valeur propre de M, alors il existe une colonne non nulle X telle que $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$. Prenons alors le vecteur $x \in \mathrm{E}$ dont la colonne de coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ est X, alors $\mathrm{X} = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

Par conséquent,

$$\mathrm{MX} = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \times \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(u(x))$$

or $\lambda\mathrm{X} = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda\, x)$, donc $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$ entraîne que $u(x) = \lambda x$.

Or $\mathrm{X} \neq 0$, donc $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, d'où λ est une valeur propre de u.

(2) Le second point a été prouvé dans la démonstration ci-dessus.

Une correction de l'exercice 12.7 — énoncé

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Phi - \lambda\,\mathrm{id}$ a pour matrice, dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(\Phi - \lambda\,\mathrm{id}) &= \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(\Phi) - \lambda \mathrm{I}_4 \\
&= \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \lambda \mathrm{L}_4 \\ \quad \mathrm{L}_2 \longleftrightarrow \mathrm{L}_1 \\ \\ \\ \end{array} \\
&\underset{\text{lignes}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc

➟ Si $\lambda \notin \{-1,1\}$, alors $\operatorname{rg}(\Phi - \mathrm{id}) = 4$, donc $\Phi - \lambda\,\mathrm{id}$ est un endomorphisme bijectif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, ce qui prouve que λ n'est pas valeur propre de Φ.

➟ Si $\lambda = 1$, alors $\operatorname{rg}(\Phi - \mathrm{id}) = 3$, donc $\Phi - \mathrm{id}$ n'est pas bijectif, ce qui prouve que 1 est valeur propre de Φ.

Puis par la formule du rang

$$\dim(E_1(\Phi) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})) - \operatorname{rg}(\Phi - \mathrm{id}) = 4 - 3 = 1.$$

On remarque que $I_2 \in \operatorname{Ker}(\Phi - \mathrm{id})$, donc $E_1(\Phi) = \operatorname{Vect}(I_2)$;

➟ Si $\lambda = -1$, alors $\operatorname{rg}(\Phi + \mathrm{id}) = 1$, et $\Phi - \mathrm{id}$ n'est pas bijectif, donc -1 est valeur propre de Φ.
La formule du rang nous donne

$$\dim(\operatorname{Ker}(\Phi + \mathrm{id})) = 4 - 1 = 3.$$

On remarque que $E_{1,1} - E_{2,2}$, $E_{1,2}$, et $E_{2,1}$ sont dans $E_{-1}(\Phi)$ et forment une famille libre, donc une base de $E_{-1}(\Phi)$.

Une correction de l'exercice 12.8

énoncé

➟ Quelque soit $\lambda \in \mathbb{K}$, les $n-1$ premières colonnes de $M - \lambda I_n$ forment une famille libre, donc $\operatorname{rg}(M - \lambda I_n) \geqslant n - 1$, d'où par le théorème du rang

$$\dim(\operatorname{Ker}(M - \lambda I_n)) \leqslant 1.$$

➟ Or si λ est une valeur propre de M, par définition $\dim(\operatorname{Ker}(M - \lambda I_n)) \geqslant 1$.

➟ On peut donc conclure que $\dim(\operatorname{Ker}(M - \lambda I_n)) = 1$.

Une preuve de la proposition 12.9

énoncé

➟ Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et $x \in \mathbb{K}$. Le terme constant de $P(x) = \det(xI_n - M)$ est $P(0) = \det(-M) = (-1)^n \det(M)$.

➟ Pour prouver le reste de la proposition, on a d'abord besoin de prouver par récurrence sur n le lemme ci-dessous :

> Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(XA - B) \in \mathbb{K}_n[X]$.

Au rang $n = 1$, c'est évident, et si ce résultat est vrai au rang $n-1$, alors prenons deux matrices $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, B = \left(b_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En développant par rapport à la première colonne :

$$\det(XA - B) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(b_{i,1}X - a_{i,1})\Delta_{i,1}.$$

Mais par hypothèse de récurrence, chaque mineur $\Delta_{i,1}$ est dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, donc chaque terme $(b_{i,1}X - a_{i,1})\Delta_{i,1}$ est dans $\mathbb{K}_n[X]$, et $\det(XA - B)$ aussi, et la preuve par récurrence est achevée.

➟ On va à présent prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour toute matrice $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(xI_n - M) = x^n - \operatorname{Tr}(M)X^{n-1} + \cdots$.

- Au rang $n = 1$, si $M = (m_{1,1})$, alors $\det(xI_1 - M) = x - m_{1,1} = x^1 - \operatorname{Tr}(M)x^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geqslant 2$, supposons que la propriété est vraie au rang $n-1$, et prenons $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et $x \in \mathbb{K}$.

  En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\det(xI_n - M) &= \begin{vmatrix} x - m_{1,1} & -m_{1,2} \cdots\cdots & -m_{1,n} \\ -m_{2,1} & x - m_{2,2} \cdots\cdots & -m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n,1} & -m_{n,2} \cdots\cdots & x - m_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n}(-m_{i,n})\Delta_{i,n} + (-1)^{n+n}(x - m_{n,n})\Delta_{n,n} \\ &= (x - m_{n,n})\Delta_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n}(-m_{i,n})\Delta_{i,n}.\end{aligned}$$

  Or

  → pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, le mineur $\Delta_{i,n}$ a pour dernière ligne $(-m_{n,1}, \ldots, -m_{n,n-1})$, constante par rapport à x, donc le développement de ce mineur par rapport à la dernière ligne donnera la combinaison linéaire

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1+j}(-m_{n,j})\Delta'_{n,j},$$

  et par le lemme, les déterminants $\Delta'_{n,j}$ sont de la forme $\det(xA - B)$ avec $A, B \in \mathscr{M}_{n-2}(\mathbb{K})$, donc sont de degré au plus $n-2$ par rapport à x. Ainsi la partie

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n}(-m_{i,n})\Delta_{i,n}$$

  est elle-même de degré au plus $n-2$ par rapport à x.

  → Dans le terme $(x - m_{n,n})\Delta_{n,n}$, on reconnaît que $\Delta_{n,n}$ est $\det(xI_{n-1} - M')$, où $M' = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$. Ainsi par hypothèse de récurrence,

$$\Delta_{n,n} = x^{n-1} - \operatorname{Tr}(M')x^{n-2} + \cdots = x^{n-1} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}\right) x^{n-2} + \cdots$$

Où les $\cdots$ sont des termes de degré au plus $n-3$.
Donc

$$\begin{aligned}(x-m_{n,n})\Delta_{n,n} &= (x-m_{n,n})\left(x^{n-1}-\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}\right)x^{n-2}+\cdots\right)\\ &= x^n - x\times\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}\right)x^{n-2} - m_{n,n}x^{n-1}+\cdots\\ &= x^n-\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}\right)x^{n-1}+\cdots\\ &= x^n-\mathrm{Tr}(\mathrm{M})x^{n-1}+\cdots\end{aligned}$$

où cette fois les $\cdots$ sont des termes de degré au plus $n-2$.

On en déduit que

$$\det(x\mathrm{I}_n-\mathrm{M}) = x^n-\mathrm{Tr}(\mathrm{M})x^{n-1}+\cdots$$

ce qui achève la preuve !

Une correction de l'exercice 12.9 *énoncé*

1. Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{XI}_3-\mathrm{A}) &= \begin{vmatrix}\mathrm{X}+2 & 2 & -1\\ 2 & \mathrm{X}-1 & 2\\ -1 & 2 & \mathrm{X}+2\end{vmatrix}\\ &\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix}\mathrm{X}+3 & \mathrm{X}+3 & \mathrm{X}+3\\ 2 & \mathrm{X}-1 & 2\\ -1 & 2 & \mathrm{X}+2\end{vmatrix} \quad \textit{(opération classique lorsque la somme des lignes (ou colonnes) donne une ligne constante).}\\ &= (\mathrm{X}+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & \mathrm{X}-1 & 2\\ -1 & 2 & \mathrm{X}+2\end{vmatrix}\\ &\underset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1\\ C_3\leftarrow C_3-C_1}}{=} (\mathrm{X}+3)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & \mathrm{X}-3 & 0\\ -1 & 3 & \mathrm{X}+3\end{vmatrix}\\ &= (\mathrm{X}+3)^2(\mathrm{X}-3).\end{aligned}$$

2. Un produit matriciel de bébé donne $\left(\frac{1}{3}\mathrm{A}\right)^2 = \mathrm{I}_3$, donc $\frac{1}{3}\mathrm{A}$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.

On en déduit que $\operatorname{Ker}(\frac{1}{3}A - I_3) \oplus \operatorname{Ker}(\frac{1}{3}A + I_3) = \mathbb{R}^3$, autrement dit

$$\operatorname{Ker}(A - 3I_3) \oplus \operatorname{Ker}(A + 3I_3) = \mathbb{R}^3.$$

Il est limpide que $A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc par le théorème du rang que $\operatorname{Ker}(A + 3I_3)$ est de dimension 2, puis par complémentarité des dimensions de sous-espaces vectoriels supplémentaires que $\operatorname{Ker}(A - 3I_3)$ est de dimension 1.
Ainsi dans une base adaptée à $\operatorname{Ker}(A - 3I_3) \oplus \operatorname{Ker}(A + 3I_3) = \mathbb{R}_2[X]$, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

donc son polynôme caractéristique est $(X-3)^2(X+3)$.

Une correction de l'exercice 12.10 *énoncé*

Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Première méthode : on développe par rapport à la première ligne, et on obtient

$$\chi_M(x) = x \times \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & x & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{1+n}(+a_0) \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

on reconnaît dans le premier mineur le polynôme caractéristique de la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$

ci-dessous :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On n'a alors plus qu'à **procéder par récurrence**, pour affirmer grâce à l'hypothèse de récurrence que

$$\begin{aligned}\chi_M(x) &= x \times (x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1) + (-1)^{n+1} a_0 (-1)^{n-1} \\ &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Deuxième méthode : on développe par rapport à la dernière colonne, ce qui donne

$$\chi_M(x) = (-1)^{1+n} a_0 \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+n} a_1 \left|\begin{array}{c|cccc} x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & -1 & x & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{array}\right|$$

$$+ (-1)^{3+n} a_2 \left|\begin{array}{cc|cccc} x & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & -1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{array}\right| + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+n}(x + a_{n-1}) \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

autrement dit

$$\chi_M(x)=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n}a_{i-1}\left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} x & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{matrix} & 0_{i-1,n-i} \\ \hline 0_{n-i,i-1} & \begin{matrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & x\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{matrix} \end{array}\right|$$

$$+(-1)^{n+n}(x+a_{n-1})\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

ce qui donne, grâce au calcul du déterminant des matrices diagonales par blocs,

$$\begin{aligned}\chi_M(x)&=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n}a_{i-1}\times x^{i-1}\times(-1)^{n-i}+(x+a_{n-1})\times x^{n-1}\\&=\sum_{i=1}^{n-1}a_{i-1}x^{i-1}+a_{n-1}x^{n-1}+x^n\\&=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Troisième méthode : on peut aussi effectuer la succession d'opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + xL_{i+1}$ avec i allant de $n-1$ à 1 dans cet ordre, on obtient ainsi

$$\chi_M(x)=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(x)\\ -1 & \ddots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-2}+a_{n-1}x+x^2\\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

puis en développant par rapport à la première ligne

$$\chi_M(x)=(-1)^{n+1}P(x)\times(-1)^{n-1}=P(x).$$

Une preuve de la proposition 12.10 *énoncé*

Le scalaire λ est valeur propre de $\square$ si, et seulement si, $\square - \lambda\,\mathrm{id}_E$ (ou $\square - \lambda I_n$) n'est pas inversible, ce qui est vrai si, et seulement si, $\det(\square - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0$, autrement dit$\chi_\square(\lambda) = 0$.

Une correction de l'exercice 12.11 *énoncé*

- On a vu dans la proposition 12.3 qu'une droite vectorielle D est stable par u si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $D \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$, ce qui revient à ce que λ est une valeur propre de u.

  Par conséquent, on va se contenter de prouver que le polynôme caractéristique de u admet une racine réelle.
- Si on note $2n+1$ la dimension de E, alors, d'après la proposition 12.9, le polynôme caractéristique χ_u est de la forme $\chi_u = X^{2n+1} + \cdots$.

  Méthode algébrique : si ce polynôme, à coefficients réels, n'a pas de racine réelle, alors sa décomposition de Gauss, autrement dit sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire un produit de polynômes de la forme

  $$X^2 - 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(z)X + |z|^2 = (X-z)(X-\overline{z}), \text{ où } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

  Par conséquent son degré, étant la somme des degrés des polynômes de sa factorisation, est pair, ce qui contredit l'énoncé, c.q.f.d.

  Par l'analyse : on en déduit que $\chi_u(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^{2n+1}$, donc $\chi_u(x) \xrightarrow[x\longrightarrow-\infty]{} -\infty$ et $\chi_u(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, donc comme l'application polynomiale $x \mapsto \chi_u(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit grâce au théorème des valeurs intermédiaires que $\chi_u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc que 0 est une valeur de χ_u, autrement dit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_u(\lambda) = 0$, c.q.f.d.
- Donc u admet une valeur propre réelle λ, et toute droite vectorielle incluse dans $E_\lambda(u)$ est stable par u.

  Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)) \geqslant 1$, alors par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)) \leqslant n-1$ (en notant $n = \dim(E)$), donc il existe un hyperplan de E qui contient $\mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$, que l'on peut noter H.

  Alors pour tout $x \in H$,

  $$u(x) = (u - \lambda\,\mathrm{id}_E + \lambda\,\mathrm{id}_E)(x) = (u - \lambda\,\mathrm{id}_E)(x) + \lambda x.$$

  Or
  - $(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)(x) \in \mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \subset H$, donc $(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)(x) \in H$;
  - $x \in H$ donc par stabilité par combinaison linéaire, $\lambda x \in H$;

  d'où $u(x) \in H$, ce qui permet de conclure que H est stable par u.

Une preuve de la proposition 12.11 *énoncé*

Supposons que $\chi_\square$ est scindé sur $\mathbb{K}$, autrement dit s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\chi_\square(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}, \text{ avec } m_1 + \cdots + m_p = n,$$

Alors :

- les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de $\square$, donc les valeurs propres de $\square$ sont $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.
- $\det(\square) = \det(0 \times I_n - \square) = \chi_\square(0)$, donc

$$\begin{aligned}\det(\square) &= (0 - \lambda_1)^{m_1} \cdots (0 - \lambda_p)^{m_p} = (-\lambda_1)^{m_1} \cdots (-\lambda_p)^{m_p} \\ &= (-1)^{m_1 + \cdots + m_p} \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_p^{m_p} \\ &= \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{m_k}.\end{aligned}$$

- On sait aussi que la trace de $\square$ est l'opposé du coefficient de X^{n-1} dans le développement du polynôme caractéristique $\chi_\square(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$, c'est-à-dire $m_1\lambda_1 + \cdots + m_p\lambda_p$.

Une correction de l'exercice 12.12 *énoncé*

En observant la première colonne de B, on remarque que

$$\operatorname{rg}(B - 2I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

donc par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(B - 2I_3)) = 2$, ce qui prouve que 2 est valeur propre de A d'ordre de multiplicité géométrique 2.
Mais

$$\operatorname{rg}(A - 2I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 + 4L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

donc encore par le théorème du rang, 2 est valeur propre de A, mais l'ordre de multiplicité géométrique de 2 est 1.
Donc A et B ne sont pas semblables.

Une preuve de la proposition 12.12 *énoncé*

Soit λ une valeur propre de u.

- Par définition, le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est de dimension au moins 1. Notons r cette dimension.
- Pour tout $x \in E_{\lambda(u)}$ on a $u(x) = \lambda x$, donc dans une base de E adaptée à $E_\lambda(u)$ la matrice de u est de la forme :

$$\left|\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & & 0 & B \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & \\ \hline & & 0_{n-r,r} & & D \end{array}\right| = \begin{vmatrix} \lambda I_r & B \\ 0_{n-r,r} & D \end{vmatrix}.$$

On en déduit, grâce au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, que le polynôme caractéristique de u est

$$\begin{vmatrix} (X-\lambda)I_r & -B \\ 0_{n-r,r} & XI_{n-r} - D \end{vmatrix} = (X-\lambda)^r \times \det\left(XI_{n-r} - D\right).$$

Ainsi $(X-\lambda)^r$ divise χ_u.
Or par définition, l'ordre de multiplicité algébrique m_λ de λ est la plus grande puissance de $X-\lambda$ par laquelle on peut diviser $\chi_\square$, donc $r \leqslant m_\lambda$.

Une correction de l'exercice 12.13 *énoncé*

1. Si une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une seule valeur propre λ, alors son polynôme caractéristique est $\chi_M = (X-\lambda)^n$, donc par le théorème de Cayley-Hamilton $(M-\lambda I_n)^n = 0_n$, C.Q.F.D.
2. Une matrice triangulaire a pour valeurs propres ses termes diagonaux, donc une matrice triangulaire stricte T a pour unique valeur propre 0. Le résultat de la question précédente permet donc d'affirmer que $T = T - 0I_n$ est nilpotente.

Une correction de l'exercice 12.14 *énoncé*

1. On montre d'abord par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $A^kC = CB^k$, avec au cœur de la preuve

$$\begin{aligned} A^{k+1}C &= A^k(AC) = A^k(CB) \text{ \textit{(par hypothèse)}} \\ &= \left(A^kC\right)B \text{ \textit{(par associativité du produit matriciel)}} \\ &= \left(CB^k\right)B \text{ \textit{(par hypothèse de récurrence)}} \\ &= CB^{k+1}. \end{aligned}$$

Puis pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$\begin{aligned} P(A) \times C &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right) C = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(A^k C\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(CB^k\right) = C\left(\sum_{k=0}^{n} a_k B^k\right) \text{ \textit{(par linéarité à gauche du produit matriciel)}} \\ &= C \times P(B), \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

2. Si un produit AB de matrices est inversible, alors $\det(AB) \neq 0$.
Or $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, donc $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) \neq 0$, ce qui prouve que A et B sont inversibles.
On peut généraliser ce résultat à un nombre quelconque de facteurs par récurrence.

3. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0_n$.
Appliquons le résultat de la première question en prenant pour polynôme le polynôme caractéristique de A :

$$0_n = 0_n \times C = \chi_A(A)C = C\chi_A(B).$$

Or dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique (comme tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$) de A est scindé, et il se décompose sous la forme

$$\chi_A(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}.$$

On en déduit que

$$C \times \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda} = 0_n.$$

Si A et B n'ont aucune valeur propre commune, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, la matrice $B - \lambda I_n$ est inversible, donc le produit $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda}$ reste une matrice inversible.

Ainsi en multipliant à droite par l'inverse de cette matrice, on obtient $C = 0$, ce qui contredit une hypothèse de l'énoncé.

4. Soit λ une valeur propre commune à A et à B.

Une preuve de la proposition 12.14 *énoncé*

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme u canoniquement associé est diagonalisable, autrement dit s'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ de vecteurs propres de u. Dans cette base la matrice D de u est alors diagonale, et les matrices M et D sont diagonales puisqu'elles représentent u.

Une preuve de la proposition 12.15 *énoncé*

Soit u un endomorphisme de E.

$(i) \Rightarrow (ii)$: on sait déjà (prop 12.4) que les sous-espaces propres de u sont en somme directe, donc si u est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u. Alors les vecteurs propres étant dans les sous-espaces propres, on a $\mathcal{B} \subset \bigcup_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, d'où

$$E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \subset \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) \subset E, \text{ donc } E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u), \text{ C.Q.F.D}$$

$(i) \Leftarrow (ii)$: réciproquement, si l'espace vectoriel E est somme directe de ses sous-espaces propres, c'est-à-dire si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, alors toute base de E adaptée à cette somme directe est une base de vecteurs propres de u, par définition des sous-espaces propres, donc u est diagonalisable.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$: on vient de voir que u est diagonalisable si, et seulement si, les sous-espaces propres de E sont supplémentaires dans E, mais les sous-espaces propres de u étant en somme directe, ceci équivaut *(voir le point (2) du corollaire 4.8 nommé « caractérisation de supplémentaires en dimension finie »)* à

$$n = \dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)). \text{ C.Q.F.D.}$$

$(i) \Rightarrow (iv)$: si u est diagonalisable, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale de diagonale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (les λ_i n'étant pas forcément deux à deux distinctes), ainsi le polynôme caractéristique de u qui est aussi le polynôme caractéristique de cette matrice est $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, donc est un polynôme scindé.

On en déduit grâce à la proposition 12.11 que, en notant m_i les ordres de multiplicité, $\sum_{i=1}^{n} m_i = n$. Or on a vu au-dessus que

$$n = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u))$$

donc en faisant la différence

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i - \dim(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u))) = 0.$$

Mais on sait d'après la proposition 12.12 que pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\dim(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)) \leqslant m_i$, donc chacun des termes de la somme $\sum_{i=1}^{n} (m_i - \dim(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)))$ est positif, ainsi, pour que cette somme soit nulle, il est nécessaire que tous les termes de cette somme soient nuls, ce qui nous donne l'égalité voulue entre les ordres de multiplicité et les dimensions des sous-espaces propres.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ si le polynôme caractéristique est scindé, alors par la proposition 12.11 la somme des ordres de multiplicité vaut n :

$$n = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Mais aussi, si ces ordres sont égaux aux dimensions des sous-espaces propres, alors on en déduit que

$$n = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)),\ \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 12.15 *énoncé*

Nommons M cette matrice.

(1) Le polynôme caractéristique de M est $(\mathrm{X}-a)^2(\mathrm{X}-b)^2$, donc M admet comme valeurs propres a et b, toutes deux d'ordre de multiplicité 2.
   On peut déjà en déduire que les sous-espaces propres $\mathrm{E}_a(\mathrm{M})$ et $\mathrm{E}_b(\mathrm{M})$ sont de dimension au plus égale à 2.
   Or M est diagonalisable si, et seulement si, $\dim(\mathrm{E}_a(\mathrm{M}))+\dim(\mathrm{E}_b(\mathrm{M})) = 4$, ce qui revient par conséquent à $\dim(\mathrm{E}_a(\mathrm{M})) = \dim(\mathrm{E}_b(\mathrm{M})) = 2$.
   Et ceci est vrai, grâce à la formule du rang, si, et seulement si, $\mathrm{rg}(\mathrm{M}-a\mathrm{I}_4) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}-b\mathrm{I}_4) = 2$.

(2) Or

$$\mathrm{M}-a\mathrm{I}_4=\begin{pmatrix}0 & x & y & z\\ 0 & b-a & z & -y\\ 0 & 0 & 0 & x\\ 0 & 0 & 0 & b-a\end{pmatrix}\begin{matrix}\mathrm{L}_1\longleftrightarrow\mathrm{L}_2\\ \\ \mathrm{L}_3\longleftrightarrow\mathrm{L}_4\\ \end{matrix}$$

$$\underset{\mathrm{L}}{\sim}\begin{pmatrix}0 & b-a & z & -y\\ 0 & x & y & z\\ 0 & 0 & 0 & b-a\\ 0 & 0 & 0 & x\end{pmatrix}\begin{matrix}\mathrm{L}_2\leftarrow(b-a)\mathrm{L}_2-x\mathrm{L}_1\\ \\ \mathrm{L}_4\leftarrow(b-a)\mathrm{L}_4-x\mathrm{L}_3\end{matrix}$$

$$\underset{\mathrm{L}}{\sim}\begin{pmatrix}0 & b-a & z & -y\\ 0 & 0 & (b-a)y-xz & (b-a)z+xy\\ 0 & 0 & 0 & b-a\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

donc comme $b-a\neq 0$,

$$\operatorname{rg}(\mathrm{M}-a\mathrm{I}_4)=2\iff(b-a)y-xz=0.$$

(3) Le même calcul sur $\mathrm{M}-b\mathrm{I}_4$ donne exactement la même condition,

(4) donc on peut conclure que

$$\boxed{\mathrm{M}\text{ est diagonalisable si, et seulement si, }(b-a)y-xz=0.}$$

Une correction de l'exercice 12.16 *énoncé*

Si A inversible, alors $\mathrm{A}^2=\mathrm{I}_3$, donc A est la matrice d'une symétrie, et par conséquent A est diagonalisable.
Si A n'est pas inversible, alors 0 est valeur propre de A, et comme 1 et -1 le sont aussi, donc A, qui est dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, est diagonalisable.

Une correction de l'exercice 12.17 *énoncé*

(1) La première matrice, que l'on baptisera A, est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses termes diagonaux 1 et 2.
Or par un simple produit par blocs :

$$(\mathrm{A}-\mathrm{I}_4)(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_4)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0_4$$

Ainsi $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda) = (X-1)(X-2)$ annule A, donc elle diagonalisable.

(2) La deuxième matrice, que nous appelerons B car notre fantaisie ne connaît point de limite, a pour polynôme caractéristique

$$X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2.$$

Donc $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} (X-\lambda) = (X-1)(X-2)$, et

$$(B - I_3)(B - 2I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0_3,$$

donc B n'est pas diagonalisable.

Une correction de l'exercice 12.18 *énoncé*

Déjà si une matrice est égale à λI_n, alors elle est diagonale, donc extrêmement diagonalisable.

Montrons la réciproque.

Première méthode : si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une seule valeur propre λ et est diagonalisable, alors elle est semblable à λI_n, autrement dit elle s'écrit sous la forme $M = P^{-1}(\lambda I_n)P$, ce qui donne

$$M = \lambda P^{-1} I_n P = \lambda I_n.$$

Deuxième méthode : si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une seule valeur propre λ et est diagonalisable, alors le polynôme $X - \lambda$ annule M, ce qui donne $M - \lambda I_n = 0_n$, autrement dit $M = \lambda I_n$.

Si une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une seule valeur propre λ, alors son polynôme caractéristique est $\chi_M = (X-\lambda)^n$, donc par le théorème de Cayley-Hamilton $(M - \lambda I_n)^n = 0_n$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 12.19 *énoncé*

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui possède n valeurs propres deux à deux distinctes, et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commute avec A.

On confondra les matrices et leurs endomorphismes canoniquement associés.

Première méthode : comme $AB = BA$, on sait par la proposition 12.5 que les sous-espaces propres de A sont stables par B.

Or A admet n valeurs propres deux à deux distinctes, donc on sait que, d'une par A est diagonalisable, et d'autre part que ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles, que l'on note $\text{Vect}(e_i)$ pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$.

Ainsi pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $Be_i \in \text{Vect}(e_i)$, d'où il existe λ_i tel que $Be_i = \lambda_i e_i$, ce qui prouve que e_i est aussi vecteur propre de B, et donc que A partage avec B sa base de vecteurs propres.

Deuxième méthode : ➟ La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres deux à deux distinctes, donc elle est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont tous des droites vectorielles.

➟ Soit X un vecteur propre de A, alors $AX = \lambda X$, λ étant une valeur propre de A. D'où

$$\begin{aligned} BAX &= B(\lambda X) = \lambda BX, \\ \text{et } BAX &= ABX = A(BX) \ \textit{(car } AB = BA\textit{)} \end{aligned},$$

ainsi BX est aussi dans $E_\lambda(A)$. Or $X \neq 0$, et ce sous-espace vectoriel est une droite vectorielle, donc $E_\lambda(A) = \text{Vect}(X)$. Par conséquent, $BX \in \text{Vect}(X)$, autrement dit il existe μ tel que $BX = \mu X$, ce qui prouve que X est aussi un vecteur propre de B.

➟ Ainsi la base de vecteurs propres de A est aussi une base de vecteurs propres de B, et B est aussi diagonalisable.

Une preuve de la proposition 12.18 *énoncé*

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, notons $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F (en passant, on pose $\dim(F) = k$). Notons aussi $\tilde{u}$ l'endomorphisme de F induit par u.

(1) Supposons que u est diagonalisable, alors il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Le théorème de la base incomplète affirme que toute famille libre de E peut être complétée en une base de E à l'aide de vecteurs d'une autre base de E : complétons donc la base $(e_1, \dots, e_k)$ de F en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ de E, où $e_{k+1}, \dots, e_n$ sont des vecteurs propres de u.

Notons $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$. Pour tout $i \in [\![k, n+1]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$, donc $u(e_i) \in G$, et par conséquent *(rappelons au passage que* $u(\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)) = \text{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n))$*)*, on obtient $u(G) \subset G$, donc G est aussi stable par u.

> *Ce point est un exercice intéressant : montrer que tout sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme diagonalisable u possède un supplémentaire stable par u.*

(2) Les sous-espaces vectoriels G et F sont supplémentaires dans E : considérons alors le projecteur p sur F parallèlement à G, et le projecteur $q = \text{id}_E - p$ sur G parallèlement à F.

Pour tout vecteur propre x de u associé à la valeur propre λ, $x = p(x) + q(x)$, puis

$$u(x) = \lambda x = \lambda(p(x) + q(x)) = \lambda p(x) + \lambda q(x)$$
$$\text{et } \ u(x) = u(p(x) + q(x)) = u(p(x)) + u(q(x))$$

or $(\lambda p(x), \lambda q(x)) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$, et par stabilité de F et G par u, $(u(p(x)), u(q(x))) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$, donc par unicité des projetés, on en déduit que $u(p(x)) = \lambda p(x)$, et comme $p(x)$ est dans F, par définition de $\tilde{u}$, $\tilde{u}(p(x)) = \lambda p(x)$.

Ceci nous permet de conclure que si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors $p(x)$ est soit le vecteur nul, soit un vecteur propre de $\tilde{u}$.

(3) Prenons derechef une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. Alors $(p(x_1), \ldots, p(x_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{F}$.

C'est un résultat général encore dû au fait que

$$\mathrm{Im}(p) = p(\mathrm{E}) = p\left(\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)\right) = \mathrm{Vect}(p(x_1), \ldots, p(x_n)).$$

On peut donc en extraire une base de F, encore grâce au théorème de la base incomplète, formée de vecteurs non nuls (c'est le minimum pour être dans une base) de la forme $p(x)$ où x est vecteur propre de u, donc de vecteurs propres de $\tilde{u}$, ce qui prouve que $\tilde{u}$ est diagonalisable.

Une correction de l'exercice 12.20

énoncé

On fait attention au facteur $\frac{1}{2}$ au moment du calcul du polynôme caractéristique.

$$\chi_{\mathrm{A}}(x) = \det(x\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = \frac{1}{2^3} \begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 \\ -1 & 2x & 0 \\ -1 & -1 & 2x-2 \end{vmatrix}$$
$$= (\ldots) = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

On résout, pour chaque valeur de $\lambda \in \left\{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$, le système $(A - \lambda I_3)X = 0$. On obtient que les valeurs propres de A sont 1, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, avec

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$E_{\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right),$$

$$\text{et } E_{-\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

On en déduit que $P^{-1}AP = D$, où

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$, puis après avoir calculé

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

un calcul rébarbatif nous donne finalement

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^n}{2^{n+1}} & \frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}} & 0 \\ \frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}} & \frac{1+(-1)^n}{2^{n+1}} & 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il va sans dire que nous avons vérifié que ce résultat donne bien I_3 pour $n = 0$, et A pour $n = 1$.

Une correction de l'exercice 12.21

énoncé

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi en notant $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on montre par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \mathrm{M}^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

- Le polynôme caractéristique de M est, sans trop de peine, le polynôme $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2$, dont on remarque à l'œil nu, que 1 est racine, puis après après factorisation,

$$\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2).$$

ainsi les valeurs propres de M sont 1, -1 et 2.
On peut déjà conclure que la matrice M est diagonalisable, car elle a trois valeurs propres distinctes (et ses sous-espaces propres sont de plus des droites vectorielles).
Elle est donc de la forme $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{P} \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont des vecteurs propres respectifs des valeurs propres 1, -1 et 2.
On résout tour à tour les systèmes homogènes $(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0$, $(\mathrm{M} + \mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0$ et $(\mathrm{M} - 2\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0$, ou bien on se contente de trouver pour chacun une solution non nulle, et on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_1(\mathrm{M}) &= \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right), \\ \mathrm{E}_{-1}(\mathrm{M}) &= \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right), \\ \text{et } \ \mathrm{E}_2(\mathrm{M}) &= \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{M} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}, \text{ où } \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{M}^n = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$$

avec, après calcul par la méthode de son choix,

$$\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Enfin, un calcul fastidieux donne finalement

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} \times \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_0\left(\frac{(-1)^n}{3} - \frac{2^n}{3} + 1\right) + u_1\left(-\frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2}\right) + u_2\left(\frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ u_0\left(-\frac{(-1)^n}{3} - \frac{2}{3}2^n + 1\right) + u_1\left(\frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2}\right) + u_2\left(-\frac{(-1)^n}{6} + \frac{2}{3}2^n - \frac{1}{2}\right) \\ u_0\left(\frac{(-1)^n}{3} - \frac{4}{3}2^n + 1\right) + u_1\left(-\frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2}\right) + u_2\left(\frac{(-1)^n}{6} + \frac{4}{3}2^n - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

d'où l'on n'a plus qu'à identifier la première coordonnée pour obtenir :

$$u_n = \frac{1}{2}(2u_0 + u_1 - u_2) + \frac{1}{6}(2u_0 - 3u_1 + u_2)(-1)^n - \frac{1}{3}(u_0 - u_2)2^n.$$

Une correction de l'exercice 12.22

énoncé

Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, et (E) l'équation $\mathrm{X}^2 = \mathrm{A}$ que l'on veut résoudre.

Remarquons que $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ce qui fait que l'équation $\mathrm{X}^2 = \mathrm{A}$, prise telle quelle, a 9 inconnues réelles.
La technique usuelle dans ce genre d'exercice est de se ramener à un travail sur une matrice diagonale via une diagonalisation, ce qui va réduire le nombre d'inconnues.

(1) Tâchons de diagonaliser la matrice A.

➟ Son polynôme caractéristique est

$$\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^3 - 5\mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X} - 4 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)^2.$$

Donc les valeurs propres de A sont 1 avec pour ordre de multiplicité algébrique 1, et 2 avec pour ordre de multiplicité algébrique 2.

➟ La résolution des équations $(A - I_3)X = 0$ et $(A - 2I_3)X = 0$ nous donne

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right).$$

➟ Ainsi A est diagonalisable (car son polynôme caractéristique est scindé et les ordres de multiplicité algébriques et géométriques sont égaux pour chaque valeur propre) sous la forme :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}_{=P} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=D} \times P^{-1}.$$

(2) De plus, si $X^2 = A$, alors

$$AX = X^2 \times X = X^3 = X \times X^2 = XA,$$

donc X commute avec A, ainsi on sait que les sous-espaces propres de A sont stables par X, autrement dit, en notant $\mathscr{B}$ la base (X_1, X_2, X_3) formée des vecteurs propres de A, qui sont aussi les colonnes de la matrice P, et en confondant les matrices X et A avec leurs endomorphismes canoniquement associés, on a

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(X) = \left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{array}\right)$$

ce qui revient à la formule de changement de bases :

$$P^{-1} \times X \times P = \left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{array}\right).$$

Si la matrice A avait possédé 3 valeurs propres deux à deux distinctes, la matrice $P^{-1}XP$ aurait été diagonale, ce qui aurait ramené le problème initial à 3 inconnues !
Ici il nous reste 5 inconnues, c'est mieux que 9, mais ça reste lourd.

(3) Ainsi

> *En posant $Y = P^{-1}XP$, on va alors se ramener à l'équation matricielle plus simple $Y^2 = D$, et après résolution, on finit par retrouver les solutions de l'équation initiale avec $X = PYP^{-1}$.*

$$
\begin{aligned}
(E) : X^2 = A &\iff X^2 = PDP^{-1} \iff P^{-1}X^2P = D \\
&\iff (P^{-1}XP)^2 = D \\
&\iff \left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{array}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\iff \left(\begin{array}{c|cc} a^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b^2+cd & c(b+e) \\ 0 & d(b+e) & dc+e^2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} a & = \pm 1 \\ b^2+cd & = 2 \\ dc+e^2 & = 2 \\ c(b+e) & = 0 \\ d(b+e) & = 0 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} a & = \pm 1 \\ b^2+cd & = 2 \\ e^2-b^2 & = 0 \\ c(b+e) & = 0 \\ d(b+e) & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a & = \pm 1 \\ b^2+cd & = 2 \\ (e-b)(b+e) & = 0 \\ c(b+e) & = 0 \\ d(b+e) & = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

On va séparer les cas :

→ Si $b+e \neq 0$, alors on peut simplifier par $b+e$ dans les 3 dernières équations :

$$
(E) : X^2 = A \iff \begin{cases} a & = \pm 1 \\ b^2 & = 2 \\ b & = e \\ c & = 0 \\ d & = 0 \end{cases} \iff X = \pm P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}
$$

(ce qui fait déjà 4 solutions).

→ Si $b+e=0$, alors

$$(\mathrm{E}) : \mathrm{X}^2 = \mathrm{A} \iff \left\{ \begin{array}{ll} a & = \pm 1 \\ b^2+cd & = 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} a & = \pm 1 \\ cd & \leqslant 2 \\ b=-e & = \pm\sqrt{2-cd} \end{array} \right.$$

$$\iff \mathrm{X} = \pm \mathrm{P} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2-cd} & c \\ 0 & d & -\sqrt{2-cd} \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \text{ avec } cd \leqslant 2.$$

(4) Donc l'ensemble des solutions dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est

$$\left\{ \pm \mathrm{P} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1},\ \pm \mathrm{P} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2-cd} & c \\ 0 & d & -\sqrt{2-cd} \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \;\middle|\; (c,d) \in \mathbb{R}^2, cd \leqslant 2 \right\}$$

(5) Pour les personnes pointilleuses qui veulent vraiment les solutions, la méthode de Gauss-Jordan qui transforme $\left(\mathrm{P} \mid \mathrm{I}_3\right)$ en $\left(\mathrm{I}_3 \mid \mathrm{P}^{-1}\right)$ par des opérations **sur les lignes**, donne

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et il n'y a plus qu'à effectuer les produits matriciels dans l'ensemble des solutions ci-dessus.

Une correction de l'exercice 12.23 *énoncé*

➟ *Première méthode :* on sait que u est de toutes façons trigonalisable (puisqu'on est dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel), donc il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle u a pour matrice une matrice M triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont les valeurs propres λ de u.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice de u^k dans la base $\mathscr{B}$ est M^k *(le produit matriciel est fait pour ça !)*, et par linéarité de $u \mapsto \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$,la matrice de $\mathrm{P}(u)$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\mathrm{P}(\mathrm{M})$.

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice M^k est encore triangulaire supérieure, et ses termes diagonaux sont les termes diagonaux de M élevés à la puissance k, autrement dit les λ^k.

En effet, si A et B sont triangulaires supérieures, alors pour tout $(i, j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$

$$\begin{aligned}(A \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}(B)_{k,j} \\ &= \sum_{k=i}^{j} (A)_{i,k}(B)_{k,j} \quad \begin{array}{l}\textit{(car } (A)_{i,k} = 0 \textit{ pour } k < i \\ \textit{et } (B)_{k,j} = 0 \textit{ pour } k > j\textit{)}\end{array} \\ &= \begin{cases} 0 & \textit{si } i > j \\ (A)_{i,i}(B)_{i,i} & \textit{si } i = j \\ \text{(on s'en fiche} & \textit{si } i < j\textit{).}\end{cases}\end{aligned}$$

donc $A \times B$ est encore triangulaire supérieure, et ses termes diagonaux sont les produits terme à terme des termes diagonaux de A et B.
Le résultat sur M^k se prouve alors par récurrence.

Ainsi par combinaison linéaire, pour tout $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, la matrice $P(M)$ est aussi triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = P(\lambda)$.

On en déduit que les valeurs propres de u^k sont les termes diagonaux de M^k, c'est-à-dire les puissances k des valeurs propres de u, C.Q.F.D.

- *Deuxième méthode :*
  - si λ est une valeur propre de u, alors on a vu dans l'exercice 12.3 que $P(\lambda)$ est encore valeur propre de $P(u)$.
    Donc

$$\mathrm{Sp}(P(u)) \supset \{ P(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \}.$$

  - Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
    Notons $\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ le polynôme caractéristique de u, et montrons que le polynôme $Q(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - P(\lambda))^{m_\lambda}$ annule $P(u)$.
    Alors on pourra affirmer l'inclusion voulue car on sait que le spectre de $P(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur Q, ensemble qui est justement $\{ P(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \}$.
    Montrer que le polynôme $Q(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - P(\lambda))^{m_\lambda}$ annule $P(u)$ revient à montrer que

$$Q(P(u)) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (P(u) - P(\lambda))^{m_\lambda} = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

autrement dit que $Q(P(X)) = \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} (P(X) - P(\lambda))^{m_\lambda}$ est un polynôme annulateur de u.
Or le polynôme $P(X) - P(\lambda)$ a pour racine λ, donc il est divisible par $X - \lambda$. Notons alors Q_λ le quotient de $P(X) - P(\lambda)$ par $X - \lambda$.
Alors

$$\begin{aligned} Q(P(X)) &= \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} (P(X) - P(\lambda))^{m_\lambda} = \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} [(X-\lambda)Q_\lambda(X)]^{m_\lambda} \\ &= \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda} \times \underbrace{\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} Q_\lambda(X)^{m_\lambda}}_{=S(X)} \\ &= \chi_u(X) \times S(X), \end{aligned}$$

ainsi, comme le théorème de Cayley-Hamilton nous donne $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on obtient :

$$Q(u^k) = \chi_u(u) \circ S(u) = 0_{\mathscr{L}(E)} \circ S(u), \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On vient donc d'établir que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$.