Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont des applications d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ (non vide, ni réduit à un point), à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Sans autre indication, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera dans tout ce chapitre une suite de fonctions définies sur I

1. Norme infini, ou norme uniforme d'une fonction bornée

Définition 13.1 – Fonction bornée sur un intervalle

La fonction f est **bornée sur l'intervalle** I lorsqu'elle est majorée et minorée sur I, autrement dit lorsqu'il existe un réel M qui majore $|f|$, c'est-à-dire

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |f(x)| \leqslant \mathrm{M}.$$

Proposition 13.1 – Espace vectoriel des fonctions bornées

L'ensemble des fonctions définies et bornées sur l'intervalle I est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des applications de I dans $\mathbb{K}$. On le note $\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K})$.

Définition 13.2 – La norme de la convergence uniforme

Pour toute application f définie, et bornée sur un intervalle I, on note

$$\left\|f\right\|_\infty^{\mathrm{I}} = \sup_{x\in\mathrm{I}}\left|f(x)\right| = \sup_{\mathrm{I}}\left|f\right|.$$

et on appelle ce réel **norme uniforme de f sur** I ou encore **norme infini de f sur** I.

Exemples 13.1.

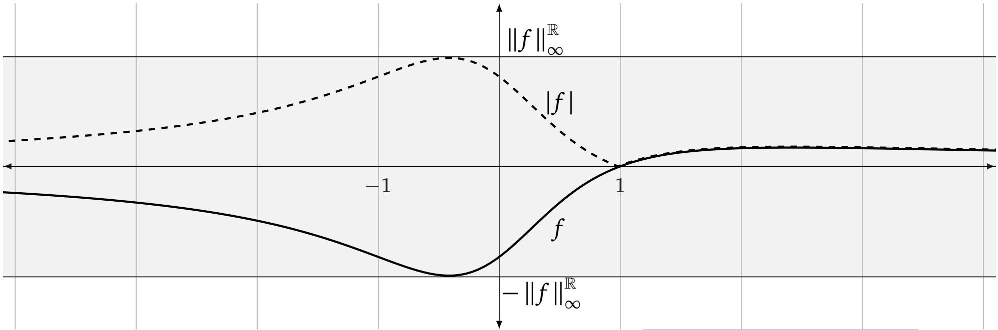
- $\|\arctan\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{\pi}{2}$;
- pour $f_n : t \mapsto t^n$, $\|f_n\|_\infty^{[0\,;1]} = 1$.
- L'étude des variations de $f : x \mapsto x^2\ln(x)$ donne $\|f\|_\infty^{]0\,;1]} = \left|f(\mathrm{e}^{-1/2})\right| = \frac{1}{2\mathrm{e}}$;

Méthode 13.1 – Calcul de la norme infini :
la méthode la plus souvent utilisée lorsque cette norme ne saute pas aux yeux est l'étude des variations de la fonction.

Exercice 13.1. Montrer que $x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et donner sa norme infini.

Remarque 13.1 – Explication graphique

Tous les points (d'abscisse dans I) de la courbe de f sont dans le « tube » centrée sur l'axe des abscisses de rayon $\|f\|_\infty^{\mathrm{I}}$.
Le graphique ci-dessous illustre le cas de la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$:



$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) \simeq 0{,}21$, $\quad \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f(x)\right| \simeq 1{,}21$, $\quad \boxed{\|f\|_\infty^{\mathbb{R}} \neq \sup\limits_{x\in[0\,;+\infty[} f(x).}$

Remarque 13.2 – Les méfaits de l'élève Chaprot

Ce garnement OUBLIE très souvent LA VALEUR ABSOLUE, alors il écrit $\|f\|_\infty^{\mathrm{I}} = \sup\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$.
Du coup ÇA ÉNERVE son prof de maths qui se roule par terre en pleurant de rage.

Exemples 13.2.

Le théorème des bornes atteintes : si f est une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, alors elle est bornée et atteint ses bornes, d'où en particulier l'existence de $\|f\|_\infty^{[a\,;b]}$;

L'inégalité des accroissements finis : si f est dérivable de dérivée bornée sur I, alors

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2,\ \ |f(y) - f(x)| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty^{\mathrm{I}} \times |y-x|.$$

Remarque 13.3 – Majoration de la norme infini

Pour un réel α indépendant de x,

$$\|f\|_\infty^{\mathrm{I}} \leqslant \alpha \Longleftrightarrow \forall x \in \mathrm{I},\ \ |f(x)| \leqslant \alpha.$$

2. Convergences d'une suite de fonctions

2.1. Convergence simple (ou convergence point par point) d'une suite de fonctions

Définition 13.3 – Convergence simple d'une suite de fonctions

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I lorsque pour tout x de I, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,
(autrement dit : $\forall x \in \mathrm{I},\ f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(x)$*, où* $f(x)\in\mathbb{K}$*.)*
Dans ce cas, on définit la **limite simple sur** I de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on la note $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$) comme la fonction

$$\lim_{n\to+\infty} f_n : x \mapsto \lim_{n\to+\infty}\big(f_n(x)\big).$$

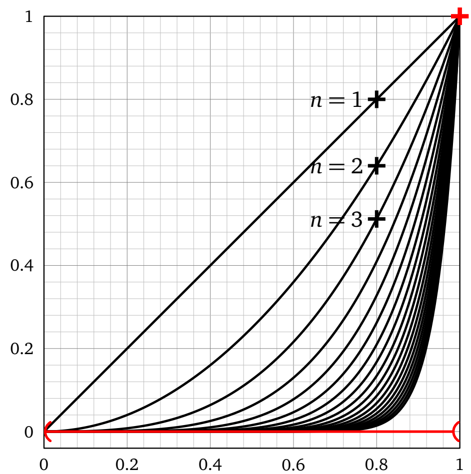
Remarque 13.4 – Une définition plus formelle
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I lorsque

$$\forall x\in\mathrm{I},\ \exists f(x)\in\mathbb{K},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists n_x\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_x \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Exemples 13.3.

(1) La suite des fonctions $f_n : t \mapsto t^n$ converge simplement sur $[0\,;1[$ vers la fonction nulle, et sur $\mathrm{I}=[0\,;1]$ vers la fonction

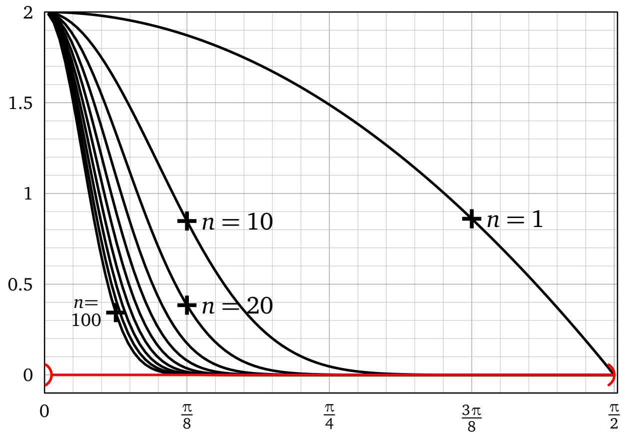
$$t\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } t\in[0\,;1[\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$



(2) La suite des fonctions

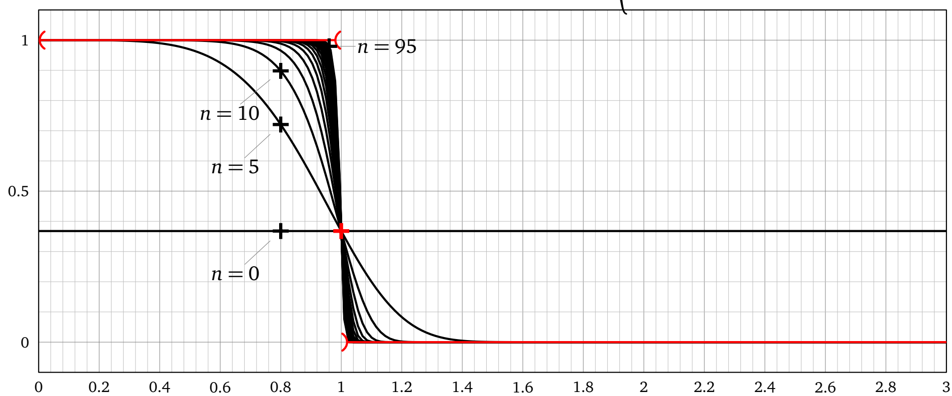
$$x \mapsto \frac{x^2 \cos^n(x)}{1 - \cos(x)}$$

converge simplement sur $\mathrm{I} =]0 \,;\, \pi/2]$ vers la fonction nulle.



(3) La suite des fonctions $x \mapsto e^{-x^n}$ converge simplement sur $\mathrm{I} = [0 \,;\, +\infty[$ vers la fonction :

$$t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0 \,;\, 1[, \\ 1/e & \text{si } t = 1, \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$



Méthode 13.2 – Pour étudier la convergence simple sur un intervalle I d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit de **fixer un x quelconque** dans I, et pour ce réel x, étudier la limite de $f_n(x)$ **quand n tend vers** $+\infty$.

On peut aussi comprendre qu'il s'agit d'étudier la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs du paramètre x dans I.

Exercice 13.2. Étudier la convergence simple de la suite des fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto nxe^{-nx^2}$.

2.2. Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 13.4 – Convergence uniforme d'une suite de fonctions

(1) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I lorsqu'il existe une fonction f définie sur I telle que :

- il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n - f$ est bornée sur I ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^{\mathrm{I}} = 0$.

(2) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément **sur tout segment de** I lorsqu'il existe une fonction f définie sur I telle que, pour tout segment $[a\,;\,b] \subset \mathrm{I}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a\,;\,b]$.

La fonction f est alors appelée **limite uniforme sur** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 13.4. La suite des fonctions $f_n : x \mapsto x\mathrm{e}^{-n^2x}$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$ vers la fonction nulle. En effet, l'étude des variations de f_n montre que

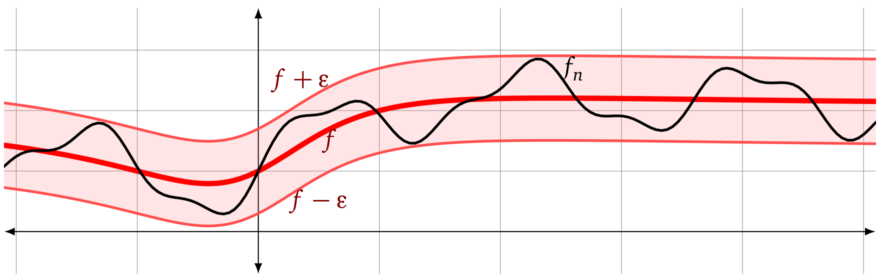
$$\|f_n - 0\|_\infty^{[0\,;+\infty[} = \|f_n\|_\infty^{[0\,;+\infty[} = f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}n^2} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Remarque 13.5 – Une définition plus formelle

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I lorsqu'il existe une fonction f définie sur I telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow \forall x \in \mathrm{I}, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Graphiquement, pour tout $\varepsilon > 0$, les courbes de toutes les fonctions f_n à partir d'un certain rang n_0 sont dans la « bande » de rayon ε centrée sur la courbe de f :



Proposition 13.2 – La convergence uniforme entraîne la convergence simple

Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I, et la limite uniforme est la limite simple $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

Exemple 13.5. La suite des fonctions $f_n : t \mapsto t^n$

- → converge simplement sur $\mathrm{I} = [0\,;\,1[$ vers la fonction nulle ;
- → ne converge pas uniformément sur $\mathrm{I} = [0\,;\,1[$ car sa limite simple est la fonction nulle, et $\|f_n - 0\|_\infty^{[0\,;\,1[} = 1$ ne tend pas vers 0 ;
- → converge uniformément sur tout segment de $\mathrm{I} = [0\,;\,1[$ car pour tout $[a\,;\,b] \subset \mathrm{I}$,

$$\|f_n - 0\|_\infty^{[a\,;\,b]} = b^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Remarque 13.6 – La réciproque est fausse !
La suite des fonctions $t \mapsto t^n$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0\,;\,1[$.

Méthode 13.3 – Pour étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- ➠ on commence par étudier la convergence simple sur I de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- ➠ et en notant f la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut au choix :
  - (i) calculer $\|f_n - f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, souvent en étudiant les variations de $f_n - f$ sur I, et étudier sa limite quand $n \to +\infty$;
  - (ii) ou montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $\|f_n - f\|_\infty^{\mathrm{I}} \leqslant \alpha_n$, où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs qui tend vers 0, pour cela, on majore, **pour tout** $x \in \mathrm{I}$, $|f_n(x) - f(x)|$ par un réel α_n **indépendant de** x ;
  - (iii) ou construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels de I telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tend pas vers 0, et dans ce cas pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$ qui par encadrement (ou sa contrapposée) ne peut pas tendre vers 0, donc il n'y a pas convergence uniforme sur I.

Exercice 13.3.
Étudier les différentes convergences sur $\mathrm{I} =]0\,;\,\pi/2]$ de la suite des fonctions

$$g_n : x \mapsto \frac{x^2 \cos^n(x)}{1 - \cos(x)}.$$

3. Convergences d'une série de fonctions

3.1. Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 13.5 – Convergence simple d'une série de fonctions

La série $\sum f_n$ **converge simplement sur** I lorsque pour tout $x \in \mathrm{I}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

Dans ce cas, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, définie sur I, est appelée **fonction somme sur** I de la série $\sum f_n$, et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Remarque 13.7 – Les séries sont des suites déguisées

La série $\sum f_n$ **converge simplement sur** I lorsque la suite des fonctions sommes partielles $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n$ converge simplement sur I.

Exemples 13.6.

(1) La série $\sum x^n$ des fonctions $x \mapsto x^n$ converge simplement sur $]-1\,;1[$ vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, et la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ des fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exponentielle.

(2) **La fonction ζ de Riemann, la fonction η de Dirichlet.**
La série $\sum \frac{1}{n^x}$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ converge simplement sur $]1\,;+\infty[$. Sa fonction somme est donc définie sur $]1\,;+\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
La série alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ des fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge simplement, d'après le critère de Leibniz, sur $]0\,;+\infty[$. Sa fonction somme est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

Exercice 13.4.

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\cos x)^n \sin(nx)}{n}$ est définie et π-périodique sur $\mathbb{R}$.

3.2. Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 13.6 – Convergence uniforme d'une série de fonctions

La série $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I (*resp.* sur tout segment de I) lorsque la suite des fonctions sommes partielles $\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (*resp.* sur tout segment de I).

Proposition 13.3 – Caractérisation par le reste

La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I lorsque la suite de ses restes $(R_N)_{N\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle, autrement dit lorsque :

- les fonctions R_N sont bornées sur I à partir d'un certain rang,
- $\lim\limits_{N\to+\infty} \|R_N\|_\infty^I = 0$.

Remarques 13.8 Comme pour les suites de fonctions, la convergence uniforme d'une série de fonctions sur un intervalle, ou sur tout segment d'un intervalle entraîne la convergence simple sur cet intervalle.

Exemple 13.7 – Convergence uniforme de la série géométrique.

- Pour la série géométrique, pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $x \in]-1\,;1[$,

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n = \frac{x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow[x\longrightarrow 1]{<} +\infty,$$

  donc R_N n'est même pas bornée sur $]-1\,;1[$, et par conséquent la série de fonctions $\sum x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1\,;1[$.
- En revanche, pour tout segment $[a\,;b] \subset]-1\,;1[$, en notant $\alpha = \max(|a|,|b|)$, on a $[a\,;b] \subset [-\alpha\,;\alpha]$, et

$$\|R_N\|_\infty^{[a\,;b]} \leqslant \|R_N\|_\infty^{[-\alpha,;\alpha]} = \frac{\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} 0 \ \ (car\ 0 \leqslant \alpha < 1)$$

  donc la série de fonctions $\sum x^n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1\,;1[$.

Exercice 13.5 – Convergence uniforme de la série de Riemann.
Montrer que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1\,;\,+\infty[$, mais converge uniformément sur tout segment de $]1\,;\,+\infty[$.

Remarque 13.9 – Cas particulier des séries alternées
On rappelle que le critère spécial, pour une série alternée $\sum(-1)^n |u_n|$ telle que $(|u_n|)$ converge vers 0 en décroissant, nous dit que $\sum u_n$ converge, mais surtout nous donne une majoration du reste

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, |\mathrm{R_N}| = \left| \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \left| u_{\mathrm{N}+1} \right|.$$

Exemple 13.8 – La fonction η de Dirichlet.
Grâce au critère spécial des séries alternées, on sait que pour tous $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$|\mathrm{R_N}(x)| = \left| \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \right| \leqslant \left| \frac{(-1)^{\mathrm{N}+1}}{(\mathrm{N}+1)^x} \right| = \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^x}$$

donc comme $x \mapsto \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^x}$ est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a pour tout $a > 0$,

$$\|\mathrm{R_N}\|_\infty^{[a\,;+\infty[} \leqslant \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^a} \xrightarrow[\mathrm{N}\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la série de Riemann alternée sur $[a\,;\,+\infty[$, donc sur tout segment $[a\,;\,b]$ de $]0\,;\,+\infty[$, car $[a\,;\,b] \subset [a\,;\,+\infty[$.

3.3. Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 13.7 – Convergence normale d'une série de fonctions

On dit que la série $\sum f_n$, de fonctions définies sur I, est **normalement convergente sur** I (*resp.* **sur tout segment de** I) lorsque :

- les f_n sont bornées sur I,
- la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty^{\mathrm{I}}$ (*resp.* $\sum \|f_n\|_\infty^{[a\,;\,b]}$ pour tout segment $[a\ ;\ b] \subset \mathrm{I}$) est convergente.

Exemple 13.9 – Convergence normale des séries de Riemann et Dirichlet.
En notant $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = \mathrm{e}^{-\ln(n)\,x}$ et $v_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-\ln(n)\,x}$,

$$\|u_n\|_\infty^{]1\,;\,+\infty[} = \|v_n\|_\infty^{]1\,;\,+\infty[} = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \|u_n\|_\infty^{[a\,;\,b]} = \|u_n\|_\infty^{[a\,;\,b]} = \frac{1}{n^a},$$

donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne convergent pas normalement sur $]1\ ;\ +\infty[$, mais convergent normalement sur tout segment de $]1\ ;\ +\infty[$.

Méthode 13.4 – Pour étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur I,on peut :

(i) calculer $\|f_n\|_\infty^{\mathrm{I}} = \sup\limits_{x\in\mathrm{I}} |f_n(x)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le plus souvent grâce aux variations de f_n sur I, et étudier la convergence de la série $\sum \|f_n\|_\infty$.

(ii) fixer n et montrer que $\|f_n\|_\infty^{\mathrm{I}} \leqslant \alpha_n$, où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable, autrement dit, les α_n étant positifs, telle que la série $\sum \alpha_n$ est convergente (on parle de convergence dominée) ;

(iii) construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans I telle que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge, et conclure que la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I : en effet, dans ce cas pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x_n)| \leqslant \|f_n\|_\infty^{\mathrm{I}}$, donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty^{\mathrm{I}}$ diverge.

Exercice 13.6.
Montrer que la série des $x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-nx}$ converge normalement sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Exemples 13.10.

(1) La série $\sum f_n$ des fonctions $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$, donc $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{n^2}$, d'où par domination la série à termes positifs $\sum \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.

(2) La série $\sum h_n$ des fonctions $h_n : x \mapsto nx^n(1-x)$ ne converge normalement sur $[0\,;1]$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1-\frac{1}{n} \in [0\,;1]$ et $h_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e}^{-1}$, donc $\|h_n\|_\infty^{[0\,;1]}$ ne peut pas tendre vers 0, et $\sum \|h_n\|_\infty^{[0\,;1]}$ diverge grossièrement.

(3) La série $\sum x^n$ des fonctions $u_n : x \mapsto x^n$ converge simplement sur $]-1\,;1[$, mais pas normalement sur $\mathrm{I} =]-1\,;1[$, car $\|u_n\|_\infty^{\mathrm{I}} = 1$.
En revanche, la série converge normalement sur tout segment $[-\alpha\,;\alpha] \subset \mathrm{I}$, car $\|u_n\|_\infty^{[-\alpha\,;\alpha]} \leqslant \alpha^n$, et $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série géométrique sommable car $\alpha \in [0\,;1[$.

Proposition 13.4 – La convergence normale entraîne les convergences simple et uniforme

Si $\sum f_n$ converge normalement sur un intervalle, alors elle converge uniformément, et a fortiori simplement, sur cet intervalle.

Remarque 13.10 La convergence uniforme, bien que théoriquement moins exigeante, est souvent plus difficile à établir que la convergence normale, en particulier parce qu'il est souvent compliqué de manipuler le reste d'une série. Par conséquent, on va souvent établir la convergence normale pour conclure la convergence uniforme.

Exercice 13.7. Montrer que la série des fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ ne converge pas normalement mais converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

4. Régularité de la limite d'une suite de fonctions

4.1. Continuité de la limite

Proposition 13.5 – Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue sur I,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I,

alors la fonction limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est une fonction continue sur I.

Corollaire 13.6 – Interversion de limites

Dans les conditions de la proposition précédente, pour tout $a \in \mathrm{I}$,

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Remarque 13.11 La convergence uniforme est essentielle :
la fonction $t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0 ; 1[\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$ n'est pas continue sur $[0 ; 1]$, bien que limite simple sur $[0 ; 1]$ de la suite des fonctions $t \mapsto t^n$, qui sont continues sur $[0 ; 1]$.

Exercice 13.8. Montrer que la suite des fonctions $g_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^n}$ ne converge pas uniformément sur $[0 ; +\infty[$.

Corollaire 13.7 – Convergence uniforme sur tout segment

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue sur I,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur **tout segment de** I,

alors la fonction limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est une fonction continue sur I.

Remarque 13.12 – Plus généralement : si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'intervalle I_k, et $\mathrm{I} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_k$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est continue sur I.

4.2. Interversion limite ⟷ intégrale sur un segment

Proposition 13.8 – Cas d'une suite de fonctions continues sur un segment

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue sur le segment** $[a\,;\,b]$,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;\,b]$ (vers $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$),

alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \displaystyle\int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$.

Exemple 13.11 – De l'importance de la convergence uniforme.
Pour tout $t \in [0\,;\,1[$, par croissances comparées $\lim\limits_{n\to+\infty}(nt^n) = 0$, et

$$\boxed{\int_0^1 \lim_{n\to+\infty}(nt^n)\,\mathrm{d}t} = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0 \boxed{\neq} 1 = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t\right) = \boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 nt^n\,\mathrm{d}t\right)}.$$

Exercice 13.9. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^1 x(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx})\mathrm{d}x\right)$.

4.3. Interversion limite⟷intégrale sur un intervalle quelconque

Proposition 13.9 – Le théorème de convergence dominée

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I ;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
- la fonction limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I ;
- **(hypothèse de domination)** il existe une fonction φ **intégrable** sur I, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathrm{I}$: $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors
- les fonctions f_n, ainsi que $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, sont intégrables sur I,
- et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \displaystyle\int_{\mathrm{I}}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$.

Remarque 13.13
La condition de domination : « pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathrm{I}$: $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ »
signifie que toutes les courbes sur I des fonctions $|f_n|$ sont en dessous de la courbe de φ *(et au dessus de l'axe des abscisses, bien sûr)*.

Exemples 13.12. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x/n}}{1+x^2}\,dx\right) = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-x/n}}{1+x^2}\right)dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$,

par le théorème de convergence dominée car
- $\forall x\in[0\,;+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|\frac{e^{-x/n}}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$,
- $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 13.10. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n(\theta)\,d\theta=0$.

Remarque 13.14 Bien noter que l'hypothèse de domination exige de majorer, sur l'intervalle I, toutes les fonctions $|f_n|$ par une fonction intégrable sur I **indépendante de** n.

Exercice 13.11 – Oral CCINP MP.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $u_n : t\longmapsto\frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}u_n(t)dt$.

4.4. Dérivabilité de la limite

Proposition 13.10 – Caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction limite

Si
- pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I,
- la suite des dérivées $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors
- la fonction limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
- et $\displaystyle\left(\lim_{n\to+\infty}f_n\right)'=\lim_{n\to+\infty}\left(f_n'\right)$.

Exercice 13.12 – (**). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
Montrer que si la suite des dérivées $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, et que la suite des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I, alors la suite des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Remarque 13.15 Dans la proposition suivante, le résultat établi dans l'exercice ci-dessus implique, par récurrence, que les conditions

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I,
- la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,

entraînent que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Proposition 13.11 – Généralisation aux fonctions de classe supérieure

Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I,
- la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors
- la fonction limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- et pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(f_n^{(j)}\right)$.

Corollaire 13.12 – Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la fonction limite

si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I,
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors
- la fonction limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I,
- et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(f_n^{(j)}\right)$.

5. Régularité de la somme d'une série de fonctions

Remarques 13.16 – Utilisation de la convergence normale

On a vu que la convergence normale entraîne la convergence uniforme, donc dans les énoncés qui suivent, on pourra remplacer la convergence uniforme par la convergence normale, qui est souvent plus simple à établir que la convergence uniforme.

5.1. Continuité de la somme

Proposition 13.13 – Théorème de la double-limite

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet en a une limite finie ℓ_n,
- la série $\sum f_n$ converge uniformément sur l'intervalle I dont a est un élément ou une borne, éventuellement infinie,

alors
- la série $\sum \ell_n$ converge,
- et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$, autrement dit $\displaystyle\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$.

Corollaire 13.14 – Continuité de la somme d'une série de fonctions

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction **continue sur** I,
- la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la fonction somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est encore continue sur I.

Exemple 13.13. Des exemples 13.8 et 13.9, on peut déduire que les fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet sont continues sur respectivement $]1\,;+\infty[$ et $]0\,;+\infty[$.

Exercice 13.13. Montrer que la fonction $x \mapsto \sum^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Méthode 13.5 – Pour montrer qu'une série ne converge pas uniformément sur I.
On peut remarquer que la somme d'une série de fonctions continues sur I n'est pas continue en un point de I, on peut alors conclure par contraposée du corollaire 13.14 que la convergence uniforme sur I n'est pas possible.
Par exemple, la série des fonctions continues $x \mapsto nx^n(1-x)$ converge simplement sur $\mathrm{I} = [0\,;1]$, mais sa somme $x \mapsto \frac{x}{1-x}$ n'est pas continue en 1, donc la série ne converge pas uniformément sur $[0\,;1]$.

Exercice 13.14. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$.

5.2. Interversion somme⟷intégrale sur un segment

Proposition 13.15 – Intégration terme à terme sur un segment

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction **continue sur le segment** $[a\,;\,b]$,
- la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a\,;\,b]$,

alors
- la série $\sum \left(\int_a^b f_n\right)$ converge,
- $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) \mathrm{d}\,t\right)$.

Exercice 13.15. Calculer $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-int}}{2+\mathrm{e}^{it}} \mathrm{d}\,t$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

5.3. Interversion somme⟷intégrale sur un intervalle quelconque

Corollaire 13.16 – Interversion de somme et intégrale : le théorème de convergence dominée pour les séries

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur l'intervalle I.

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I,
- sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est aussi continue par morceaux sur I ;
- **(domination des sommes partielles)** il existe une fonction φ **intégrable** sur I, telle que pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathrm{I}$:
$$\left|\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t)\,;$$

alors
- les f_n, ainsi que la somme S, sont intégrables sur I,
- $\int_{\mathrm{I}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathrm{I}} f_n(t) \mathrm{d}t\right)$.

Exercice 13.16. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$. *(Indication : que vaut* $\int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}\,t$ *?)*

Remarque 13.17 Quand toutes les fonctions f_n sont positives, et quand la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I, alors on peut prendre cette fonction S comme fonction dominante.

Exercice 13.17.
Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2 \ln(t)}{t^2-1} \mathrm{d}\, t$. *(On commencera par exprimer* I *à l'aide d'une somme, puis on calculera cette somme.)*

Proposition 13.17 – Intégration terme à terme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur I.

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I ;
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I ;
- la série $\sum \int_I |f_n|$ est convergente ;

alors
- la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I,
- $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) \mathrm{d}\, t \right)$.

Ce théorème a des conditions a priori plus exigeantes, mais c'est souvent celui-ci qui est utilisé pour intégrer terme à terme.

Exercice 13.18. Refaire l'exercice 13.17 avec le théorème d'intégration terme à terme.

Exemple 13.14 – D'inefficacité du théorème d'intégration terme à terme.
Vérifier que le théorème d'intégration terme à terme est mis en échec dans l'exercice 13.16.

5.4. Dérivation terme à terme

Proposition 13.18 – Dérivation terme à terme (pour les séries de fonctions)

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I ;

alors
- la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
- et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Exercice 13.19 – (suite de l'exercice 13.4).

1. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\cos x)^n \sin(nx)}{n}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;\,\pi[$.
2. Donner une expression de f' puis f sur $]0\,;\,\pi[$, puis sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 13.19 – Généralisation aux fonctions de classe supérieure

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$ la série des dérivées successives $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- la série des dérivées successives $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I ;

alors
- la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- et pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Corollaire 13.20 – Cas d'une somme de classe $\mathscr{C}^\infty$

si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I,
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série des dérivées $\sum f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors
- la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I,
- et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Exemples 13.15.

(1) **La formule du binôme négatif** : par dérivées successives de la série géométrique, on montre que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1\,;1[$,
$$\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}.$$

(2) La fonction ζ de Riemann est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$, avec
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ \forall x > 1,\ \ \zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^k}{n^x}.$$

(Au cœur de la preuve de ce résultat il y a, en notant $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = \mathrm{e}^{-\ln(n)x}$, le fait que pour tout segment $[a\,;b] \subset]1\,;+\infty[$,
$$\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty^{[a\,;b]} = \sup_{x\in[a\,;b]} \left|\frac{(-1)^k(\ln(n))^k}{n^x}\right| = \frac{(\ln(n))^k}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}}\right),$$
technique déjà utilisée dans les intégrales de Bertrand)

Exercice 13.20.

Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$.

Corollaire 13.21

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $\mathrm{e}_\alpha : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} = \exp(\alpha t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivées successives :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ (\mathrm{e}_\alpha)^{(k)} : t \mapsto \alpha^k \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Une correction de l'exercice 13.1 *énoncé*

Notons f la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$.
C'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, f est donc définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

➟ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et tend vers 0 en $\pm\infty$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

> *Ce résultat qui paraît évident n'est pourtant pas un résultat du cours. Il se prouve en disant que*
>
> - $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$ *donc en appliquant la définition de la limite avec* $\varepsilon = 1$, *il existe un réel* A *et un réel* B *tels que* $|f(x)| \leqslant 1$ *pour* $x \geqslant \mathrm{A}$, *et* $x \leqslant \mathrm{B}$, *donc* f *est bornée sur* $]-\infty\,;\mathrm{B}]$, *ainsi que sur* $[\mathrm{A}\,;+\infty[$;
> - *la fonction* f *est continue sur le segment* $[\mathrm{A}\,;\mathrm{B}]$, *donc par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée sur* $[\mathrm{A}\,;\mathrm{B}]$.
>
> *On peut conclure que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

➟ Pour tout réel x,

$$f'(x) = -\frac{x^2-2x-1}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{(x-\sqrt{2}-1)(x+\sqrt{2}-1)}{\left(x^2+1\right)^2},$$

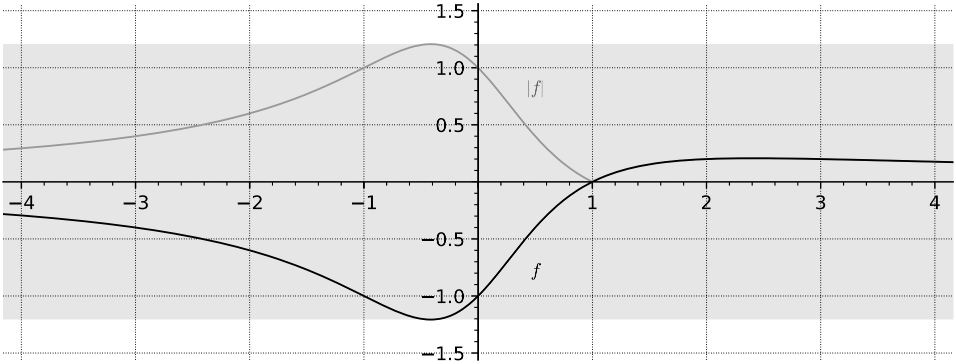
d'où, sachant que

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x} \xrightarrow[x\longrightarrow\pm\infty]{} 0,$$

on peut tracer le tableau des variations suivant

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$		$+$		$+$		$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$	$\searrow$	0
Variations de $\lvert f\rvert$	0	$\nearrow$	$+\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$	$\searrow$	0

Donc $\|f\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$.



Une correction de l'exercice 13.2

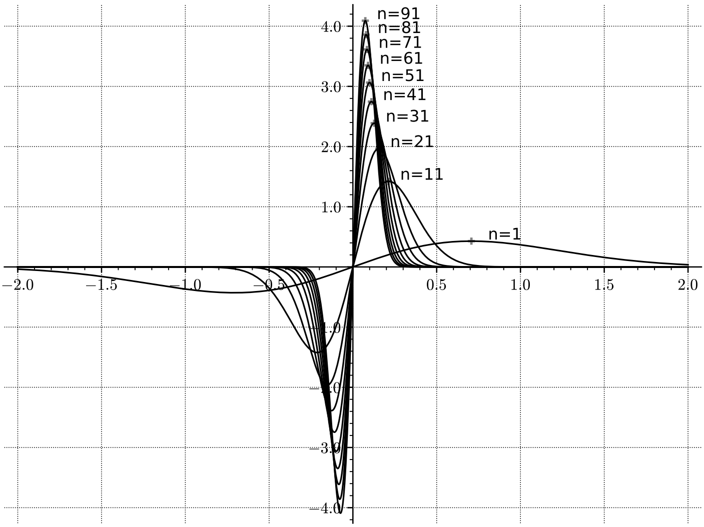
énoncé

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto n\,x\mathrm{e}^{-n\,x^2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

- si $x = 0$, $u_n(0) = 0 \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$;
- si $x \neq 0$, $x^2 > 0$, donc par croissances comparées

$$u_n(x) = x \times n\mathrm{e}^{(-x^2)\,n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.



Une preuve de la proposition 13.2 *énoncé*

Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, et montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I.

Soit $x \in \mathrm{I}$, alors

selon que x est à l'intérieur de I ou bien à une extrémité de I on peut toujours trouver un segment K de la forme $[x-\varepsilon\ ;\ x+\varepsilon]$, ou $[x\ ;\ x+\varepsilon]$, ou $[x-\varepsilon\ ;\ x]$, tel que $x \in \mathrm{K} \subset \mathrm{I}$.
Mais on sait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K, notons ainsi f la limite.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathrm{K}} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty^{\mathrm{K}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 13.3 *énoncé*

- On a vu dans l'exemple 13.3 que cette suite de fonctions converge simplement sur $\mathrm{I} =]0\ ;\ \pi/2]$ vers la fonction nulle.
- Il semble, au vu de sa représentation graphique, que $\|g_n\|_\infty^{\mathrm{I}} = 2$, ce qui entraîne qu'il n'y a pas convergence uniforme sur ce même intervalle puisque la norme infini ne tend pas vers 0. Mais un dessin n'est pas une preuve mathématique.

  On pressent que ce qui gêne la convergence uniforme sur l'intervalle I est le voisinage de 0, posons donc $x_n = \frac{1}{n}$ qui définit une suite de réels de I qui tend vers 0.

  Ainsi
$$g(x_n) = \frac{x_n^2 \cos^n(x_n)}{1-\cos(x_n)} = \frac{1}{n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \times \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$
  Or grâce au développement limité de cos en 0 :
$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),$$
  donc
$$\frac{1}{n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2,$$
  et grâce à $\ln(1+\square) \underset{\square\to 0}{\sim} \square$
$$n \times \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{1}{2n^2}\right) = -\frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
  donc par continuité de l'exponentielle :
$$\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^0 = 1.$$
  On obtient que $g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, et comme $\|g_n\|_\infty^{\mathrm{I}} \geqslant g(x_n)$, on en déduit par la contraposée du prolongement des inégalités larges à la limite que $\|g_n\|_\infty^{\mathrm{I}}$ ne peut pas tendre vers 0.
- En revanche, cette suite de fonctions converge uniformément sur tout segment de $\mathrm{I} =]0\ ;\ \pi/2]$.

  En effet, pour tout segment $[a\ ;\ b] \subset]0\ ;\ \pi/2]$, la fonction cos est décroissante sur I, donc a fortiori sur $[a\ ;\ b]$, donc
$$\forall x \in [a\ ;\ b],\ 0 \leqslant (\cos(x))^n \leqslant (\cos(a))^n$$
$$\text{et } 0 < \frac{1}{1-\cos(x)} \leqslant \frac{1}{1-\cos(a)},$$

donc

$$\forall x \in [a\ ;\ b],\ \ |g_n(x)| = \left|\frac{x^2\,(\cos(x))^n}{1-\cos(x)}\right| \leqslant \frac{b^2\,(\cos(a))^n}{1-\cos(a)},$$

d'où ce majorant ne dépendant pas de x :

$$\|g_n - 0\|_\infty^{[a\,;\,b]} = \|g_n\|_\infty^{[a\,;\,b]} \leqslant \frac{b^2\,(\cos(a))^n}{1-\cos(a)}.$$

Or

$$\frac{b^2\,(\cos(a))^n}{1-\cos(a)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \ \ (\textit{car } 0 \leqslant \cos(a) < 1)$$

donc par encadrement

$$\|g_n - 0\|_\infty^{[a\,;\,b]} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 13.4 *énoncé*

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x,

$$u_n(x) = \frac{(\cos x)^n \sin(nx)}{n}.$$

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

- si $x \in \mathbb{Z}\frac{\pi}{2}$, alors pour tout $\mathbb{N}^*$, $u_n(x) = 0$, donc la série de terme général $u_n(x)$ converge ;
- sinon, $|\cos(x)| < 1$, donc la suite géométrique $|\cos(x)|^n$ est sommable.
  Ainsi, comme

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ |u_n(x)| \leqslant \frac{|\cos(x)|^n}{n} \leqslant |\cos(x)|^n$$

  on en déduit par domination que la suite de terme général $u_n(x)$ est aussi sommable, donc que la série de terme général $u_n(x)$ converge.

Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n(x+\pi) &= \frac{(\cos(x+\pi))^n \sin(n(x+\pi))}{n} = \frac{((-1)\cos(x))^n \sin(nx+n\pi)}{n} \\ &= \frac{((-1)^n(\cos(x))^n(-1)^n \sin(nx)}{n} = \frac{(\cos(x))^n \sin(nx)}{n} \\ &= u_n(x). \end{aligned}$$

et comme les deux membres (extrêmes) de cette égalité sont sommables d'après la question précédente, on en déduit en additionnant pour n de 0 à l'infini :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x+\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

ce qui prouve que la fonction $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est π-périodique.

Une correction de l'exercice 13.5

énoncé

Pour les séries de Riemann, pour tout $x > 1$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^x} = \mathrm{e}^{-x\ln(t)}$ sur $]0\,;+\infty[$, on montre pour tout entier $n \geqslant 2$, grâce à la croissance de l'intégrale, que :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}\,t \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}\,t$$

et pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, en additionnant ces inégalités de $\mathrm{N}+1$ à $+\infty$ (la convergence de $\sum \frac{1}{n^x}$ le permet), on obtient :

$$\int_{\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}\,t \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{\mathrm{N}}^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}\,t$$

puis en calculant les deux intégrales :

$$\left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_{t=\mathrm{N}+1}^{t\to+\infty} = \frac{1}{(x-1)(\mathrm{N}+1)^{x-1}} \leqslant \mathrm{R_N}(x) = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{(x-1)\mathrm{N}^{x-1}}.$$

On en déduit par minoration que $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{R_N}(x) = +\infty$, d'où $\mathrm{R_N}$ n'est pas bornée sur $]0\,;+\infty[$ et il n'y a pas convergence uniforme de la série de Riemann sur $]0\,;+\infty[$.
En revanche, comme la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{(x-1)\mathrm{N}^{x-1}}$ est décroissante sur $]1\,;+\infty[$, alors pour tout $a > 1$,

$$\|\mathrm{R_N}\|_\infty^{[a\,;+\infty[} \leqslant \varphi(a) = \frac{1}{(a-1)\mathrm{N}^{a-1}} \xrightarrow[\mathrm{N}\longrightarrow+\infty]{} 0$$

donc il y a convergence uniforme de la série de Riemann sur tout $[a\ ;\ +\infty[$, donc sur tout segment $[a\ ;\ b]$ de $]1\ ;\ +\infty[$, car $[a\ ;\ b] \subset [a\ ;\ +\infty[$.

Une correction de l'exercice 13.6 *énoncé*

Les variations de g_n donnent $\|g_n\|_\infty^{[0\,;+\infty[} = g_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4e^{-2}}{n^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Une preuve de la proposition 13.4 *énoncé*

Supposons que $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment K de I.

- Pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on peut trouver un segment K de la forme $[x-\varepsilon\ ;\ x+\varepsilon]$, ou $[x\ ;\ x+\varepsilon]$, ou $[x-\varepsilon\ ;\ x]$, inclus dans I qui contient x. Mais alors $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty^{\mathrm{K}}$ et on sait que $\sum \|f_n\|_\infty^{\mathrm{K}}$ converge, donc par majoration, $\sum f_n(x)$ converge (absolument). On a donc établi la convergence simple sur I de $\sum f_n$.
- Soit K un segment de I. On sait déjà que les restes $\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty^{\mathrm{K}}$, et $\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} |f_n(x)|$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, tendent vers 0 quand N tend vers 0.
  Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,
  $$\forall x \in \mathrm{K},\ \left|\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} |f_n(x)| \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty^{\mathrm{K}}.$$
  Donc
  $$\|\mathrm{R_N}\|_\infty^{\mathrm{K}} \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty^{\mathrm{K}}$$
  d'où la convergence uniforme sur K par encadrement.

Une correction de l'exercice 13.7 *énoncé*

(1) $\|v_n\|_\infty^{[0\,;+\infty[} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc pas de convergence normale sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(2) Avec le critère spécial des séries alternées,
$$\forall x \geqslant 0,\ \ |\mathrm{R_N}(x)| = \left|\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{\mathrm{N}+1+x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}.$$
donc
$$\|\mathrm{R_N}\|_\infty^{[0\,;+\infty[} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}},$$
d'où la convergence uniforme sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Une preuve de la proposition 13.5 *énoncé*

Dans les conditions de la proposition, prenons un réel $a \in \mathrm{I}$, et montrons que $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ est continue en a, autrement dit montrons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ autrement dit que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall x \in \mathrm{I}, \ |x - a| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Prenons un réel $\varepsilon > 0$.
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \end{aligned}$$

or $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty^{\mathrm{I}}$ et $|f_n(a) - f(a)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty^{\mathrm{I}}$, et comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, $\|f_n - f\|_\infty^{\mathrm{I}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, donc en particulier, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left\|f_{n_0} - f\right\|_\infty^{\mathrm{I}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
D'où pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$|f(x) - f(a)| \leqslant 2\left\|f_{n_0} - f\right\|_\infty^{\mathrm{I}} + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{3} + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right|.$$

De plus, f_{n_0} est continue sur I, donc en particulier en a, et par définition, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, si $|x - a| \leqslant \alpha$, alors $\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
Par conséquent, pour tout $x \in \mathrm{I}$, si $|x - a| \leqslant \alpha$, alors

$$|f(x) - f(a)| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ \text{C.Q.F.D.}$$

Une preuve de la proposition 13.6 *énoncé*

Dans les conditions de la proposition précédente, f est continue sur I, donc pour tout $a \in \mathrm{I}$, f est continue en a, d'où

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \lim_{n \to +\infty} f_n(a).$$

Une correction de l'exercice 13.8 *énoncé*

On a vu dans les exemples 13.3 que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers une fonction qui n'est pas continue en 1, or les fonctions g_n sont continues sur $[0\,;+\infty[$, donc la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

Une preuve de la proposition 13.7 *énoncé*

Soit $a \in \mathrm{I}$,

- soit b un autre point de I, qui est supposé non vide ni réduit à un point alors un des deux segments $[a\,;\,b]$ ou $[b\,;\,a]$ qui contiennent a, est dans I,
- donc f est continue sur ce segment en tant que limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions continues sur ce segment, car continues sur I,
- et en particulier, f est continue en a.

Une preuve de la proposition 13.8 *énoncé*

- La fonction f est continue sur $[a\,;\,b]$ en tant que limite uniforme de fonctions continues, donc $\int_a^b f(t)\mathrm{d}\,t$ existe ;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}\,t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}\,t\right| &= \left|\int_a^b (f_n(t)-f(t))\mathrm{d}\,t\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}\,t \ \ \textit{(inégalité de la moyenne)} \\ &\leqslant \int_a^b \|f_n - f\|_\infty^{[a\,;\,b]}\,\mathrm{d}\,t \ \ \textit{(par croissance de l'intégrale)} \\ &= (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty^{[a\,;\,b]} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 13.10 *énoncé*

> *Ici on ne peut appliquer le théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment pour les suites de fonctions, car $\|\sin^n\|_\infty^{[0\,;\,1]} = 1$ ne tend pas vers 0, donc il n'y a pas convergence uniforme de la suite des fonctions $(\sin^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0\,;\,1]$.*

Mais le théorème de convergence dominée s'applique car :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sin^n : \theta \mapsto \sin^n(\theta)$ est continue sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ vers la fonction nulle, qui est aussi continue sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $|\sin^n(\theta)| \leqslant 1$ et $\theta \mapsto 1$ est intégrable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$;

Le théorème de convergence dominée nous permet alors de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\left(\lim_{n\to+\infty}\sin^n(\theta)\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}0\mathrm{d}\theta=0.$$

Une correction de l'exercice 13.11 *énoncé*

1. $f_n : t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $\forall\, t\in[0,+\infty[$, $|f_n(t)|\leqslant \dfrac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$.
   Or $\varphi(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$ et $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Donc, par critère de majoration pour les fonctions positives, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Or f_n est continue sur $[0,1]$ donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. i) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par : $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+t^2} & \text{si } t\in[0,1[\\ \dfrac{1}{2+\mathrm{e}^{-1}} & \text{si } t=1\\ 0 & \text{si } t\in]1,+\infty[\end{cases}$
   ii) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   iii) $\forall t\in[0,+\infty[\,,|f_n(t)|\leqslant\varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.
   Alors, d'après le théorème de convergence dominée,
   $$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t.$$
   Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$, donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{\pi}{4}$.

Une preuve de la proposition 13.10 *énoncé*

Supposons que
- (i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- (ii) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
- (iii) la suite des dérivées $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I (ce qui est a fortiori le cas en cas de convergence uniforme sur I).

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I, notons f sa fonction limite $\lim\limits_{n} f_n$.
- Les f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, donc $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur I. De plus la suite $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I (donc converge a fortiori simplement sur I).
  Par conséquent, la fonction limite (que je me propose de noter h) $h = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n'\right)$ est continue sur I.
- Soit $a \in \mathrm{I}$.
  Pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned}
\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n'(t)\,\mathrm{d}t && \textit{(cette intégrale existe car } h \textit{ est continue sur I, donc sur le segment entre } a \textit{ et } x\textit{)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t && \textit{(on applique la proposition 13.8 car } \left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge uniformément sur le segment entre } a \textit{ et } x\textit{)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(f_n(x)-f_n(a)\right) && \textit{(par le théorème fondamental de l'analyse)}\\
&= f(x)-f(a) && \textit{(par convergence simple de } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ vers } f\textit{).}
\end{aligned}$$

  On a donc établi que

$$\forall x\in\mathrm{I},\;\; f(x) = f(a) + \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$$

  Donc par le théorème fondamental de l'analyse, comme h est continue sur I, on peut affirmer que f est dérivable sur I de dérivée h qui est continue sur I, ce qui permet de conclure que

  - f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
  - et sa dérivée vérifie $f' = h$, autrement dit $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n'\right)$.

Une correction de l'exercice 13.12 *énoncé*

Prenons donc une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, qui converge simplement sur I et telle que la suite des dérivées $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.
Soit $[a\ ;\ b]$ un segment inclus dans I, montrons que f_n converge uniformément sur $[a\ ;\ b]$
Notons $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ et $g = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n'\right)$.

- D'après le théorème précédent, on sait déjà que ces hypothèses entraînent que f est

$\mathscr{C}^1$ sur I et de dérivée $f' = g$.

➟ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\varphi_n = f_n - f$, alors pour tout $x \in [a\ ;\ b]$,

$$|\varphi_n(x)| = |\varphi_n(x) - \varphi_n(a) + \varphi_n(a)| \leqslant |\varphi_n(x) - \varphi_n(a)| + |\varphi_n(a)|.$$

Mais on sait que f_n et f, donc φ_n aussi, sont $\mathscr{C}^1$ sur I, et que $\varphi_n' = f_n' - f' = f_n' - g$.

➟ De plus, par hypothèse, $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I (ou sur I), donc a fortiori sur $[a\ ;\ b]$, vers g, donc en particulier $\left|\varphi_n'\right| = \left|f_n' - g\right|$ est bornée sur $[a\ ;\ b]$.
Ainsi grâce aux inégalités des accroissements finis appliquées à φ_n sur $[a\ ;\ b]$, on a pour tout $x \in [a\ ;\ b]$,

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(a)| \leqslant \left\|\varphi_n'\right\|_\infty^{[a\,;\,b]} \times |x-a| \leqslant \left\|\varphi_n'\right\|_\infty^{[a\,;\,b]} \times |b-a|.$$

➟ D'où pour tout $x \in [a\ ;\ b]$,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \underbrace{\left\|\varphi_n'\right\|_\infty^{[a\,;\,b]} \times |b-a| + |\varphi_n(a)|}_{\text{indépendant de } x},$$

ce dont on déduit que

$$\|\varphi_n\|_\infty^{[a\,;\,b]} \leqslant \left\|\varphi_n'\right\|_\infty^{[a\,;\,b]} \times |b-a| + |\varphi_n(a)|.$$

Or $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\ ;\ b]$ vers g, donc

$$\left\|\varphi_n'\right\|_\infty^{[a\,;\,b]} = \left\|f_n' - g\right\|_\infty^{[a\,;\,b]} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f, donc en particulier

$$|\varphi_n(a)| = |f_n(a) - f(a)| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

d'où par encadrement

$$\|\varphi_n\|_\infty^{[a\,;\,b]} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

➟ On a donc prouvé que $\|f_n - f\|_\infty^{[a\,;\,b]} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, autrement dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\ ;\ b]$ vers f, C.Q.F.D.

Une preuve de la proposition 13.11 *énoncé*

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

- Le rang $k = 1$ est la proposition 13.10 ;
- on suppose la proposition vraie au rang $k-1$, où k est un entier supérieur ou égal à 2.

Au rang suivant, supposons que
(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
(ii) pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$ la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
(iii) la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, ou sur tout segment de I ;

alors

(i) la suite des fonctions $\left(f_n^{(k-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et sa limite (par convergence simple) la fonction $h_{k-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k-1)}$, vérifient les conditions de la proposition 13.10. Celle-ci nous permet alors d'affirmer que :

- d'une part h_{k-1} est $\mathscr{C}^1$ sur I avec

$$h'_{k-1} = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n^{(k-1)}\right)' \overset{\text{prop } 13.10}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(f_n^{(k-1)}\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)},$$

- mais d'autre part en utilisant le résultat de l'exercice précédent (on s'en sert de lemme) que la suite $\left(f_n^{(k-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers h_{k-1} ;

(ii) par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les trois conditions de l'hypothèse de récurrence, qui nous permet alors de conclure que $h_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I avec pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$,

$$h_0^{(j)} = \lim_{n\to+\infty} \left(f_n^{(j)}\right);$$

(iii) enfin, on en déduit en particulier que $h_0^{(k-1)} = h_{k-1}$, et on a vu en (a) que h_{k-1} est $\mathscr{C}^1$ sur I avec $h'_{k-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(f_n^{(k)}\right)$, donc on conclut que h_0 est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I avec $h_0^{(k)} = \left(h_0^{(k-1)}\right)' = (h_{k-1})' = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(f_n^{(k)}\right)$, ce qui achève la preuve.

Une preuve de la proposition 13.12 *énoncé*

Les conditions entraînent que la proposition 13.11 est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Une preuve de la proposition 13.13 *énoncé*

Le fait que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur l'intervalle I équivaut à ce que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$ converge uniformément sur I (vers la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$).
Or les f_n sont continues sur I, donc les S_N aussi.
Ainsi la continuité se prolongeant à la limite uniforme, on en déduit que S est encore continue sur I.
On en déduit que pour tout élément a de I,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x) \xrightarrow[x\longrightarrow a]{} S(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a).$$

La preuve du cas où a n'est pas un élément de I, mais une borne de I, n'est pas au programme.

Une preuve de la proposition 13.14 *énoncé*

Voir la preuve du théorème de la double-limite.

Une correction de l'exercice 13.13 *énoncé*

Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : x \in]0\,;+\infty[\mapsto \frac{1}{1+n^2x^2}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est une fonction continue sur $]0\,;+\infty[$ comme fraction rationnelle définie sur cet inervalle.
- Soit $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est décroissante et positive sur $]0\,;+\infty[$, donc en particulier pour tout $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$,

  $$\|f_n\|_\infty^{[a\,;b]} = f_n(a) = \frac{1}{1+n^2a^2}.$$

  Or

  $$\frac{1}{1+n^2a^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

  d'où, par le critère de domination, la convergence normale, et par conséquent la convergence uniforme, de $\sum f_n$ sur tout segment de $]0\,;+\infty[$.

Ainsi, en vertu de la proposition 13.14, on peut affirmer la continuité sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

Une correction de l'exercice 13.14 *énoncé*

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$$

revient à montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \times \frac{6x^2}{\pi^2} \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 1,$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}.$$

Or, en notant pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+n^2}$, on a

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n\|_\infty^{[1\,;+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, donc par domination, la série des fonctions g_n converge normalement, d'où a fortiori uniformément, sur $[1\,;+\infty[$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \frac{1}{n^2}$,

donc par le théorème de la double-limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \boxed{\xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Une preuve de la proposition 13.15 *énoncé*

Il suffit d'appliquer le théorème interversion limite-intégrale sur un segment à la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} f_n$.

Une correction de l'exercice 13.15 *énoncé*

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-int}}{2+\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{it}\right)^k\right)\mathrm{d}\,t \ \ \textit{(car } \left|-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{it}\right| = \tfrac{1}{2} < 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \mathrm{e}^{i(-n+k)t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

en notant pour tout $t \in [0\,;\,2\pi]$ et $k \in \mathbb{N}$, $f_k(t) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \mathrm{e}^{i(-n+k)t}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue sur $[0\,;\,2\pi]$, et $\|f_k\|_\infty^{[0\,;\,2\pi]} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, donc $\sum f_k$ converge normalement sur $[0\,;\,2\pi]$.

On peut ainsi appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(-n+k)t}\,\mathrm{d}\,t$$

Mais

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(-n+k)t}\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} \frac{1}{i(-n+k)}\left[\mathrm{e}^{i(-n+k)\,t}\right]_0^{2\pi} = 0, & \textit{si } k \neq n, \textit{ ce qui est vrai pour tout } k \in \mathbb{N} \textit{ lorsque } n < 0, \\ 2\pi, & \textit{si } k = n, \textit{ qui n'est possible que lorsque } n \geqslant 0. \end{cases}$$

donc

- → si $n < 0$, tous les termes de la somme qui donne I_n sont nuls, donc $\mathrm{I}_n = 0$.
- → si $n \in \mathbb{N}$, alors quand k va de 0 à $+\infty$ dans la somme, le terme non nul est obtenu pour $k = n$, ce qui donne

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times 2\pi = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \pi.$$

Une preuve de la proposition 13.16 *énoncé*

Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(\mathrm{S}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$.

Une correction de l'exercice 13.16

énoncé

On suit l'indication :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}\,t = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln(2).$$

Donc l'exercice demande de prouver que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}\,t.$$

Mais pour tout $t \in [0\,;\,1[$, sachant que la série géométrique converge lorsque sa raison est en module strictement inférieure à 1,

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n.$$

Donc il s'agit de démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n \mathrm{d}\,t.$$

Notons donc $f_n : t \mapsto (-t)^n$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori intégrable sur $[0\,;\,1[$.

(ii) On a vu plus haut que pour tout $t \in [0\,;\,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t}$, donc $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;\,1[$.

(iii) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [0\,;\,1[$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(t)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} (-t)^n\right| = \left|\frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}\right| \leqslant \frac{2}{1+t} \leqslant 2,$$

et $t \mapsto 2$ est continue sur $[0\,;\,1]$, donc a fortiori intégrable sur $[0\,;\,1[$.

Ainsi le théorème de convergence dominée nous permet de conclure que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n \mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-t)^n \mathrm{d}t \quad \textit{(en appliquant le théorème de convergence dominée)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 13.17 *énoncé*

Tout d'abord, pour tout $t \in]0\,;\,1[$, $\left|t^2\right| < 1$, donc grâce à la série géométrique, on sait que

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (t^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n},$$

ainsi

$$\begin{aligned}\frac{t^2\ln(t)}{t^2-1} &= -t^2\ln(t) \times \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n+2}\ln(t)\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} t^{2n}\ln(t).\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_0^1 \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} t^{2n}\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

On va donc intervertir la somme infinie et l'intégrale entre 0 et 1, pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $t \mapsto t^{2n}\ln(t)$, définie sur $]0\,;\,1]$.

Avec le théorème d'intégration terme à terme.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]0\,;\,1]$ et tend vers 0 en 0 par croissances comparées, donc elle est prolongeable par continuité sur le segment $[0\,;\,1]$, ce qui en fait une fonction intégrable sur $]0\,;\,1]$.
- On a vu en préambule que pour tout $t \in]0\,;\,1[$,

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{2n}\ln(t) = -\frac{t^2\ln(t)}{t^2-1},$$

  donc la série des f_n converge simplement sur $]0\,;\,1[$ et admet pour somme la fonction $t \mapsto \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ qui est continue sur $]0\,;\,1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{2n+1}t^{2n+1}$ et ln sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;\,1]$, et par croissances comparées $u \times \ln$ tend vers 0 en 0 (car $2n+1 > 0$). Ainsi avec une intégration par parties :

  $$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 t^{2n}\ln(t)\mathrm{d}t \quad \textit{(car ln est négative sur }]0\,;\,1])$$

  (car on sait que la première intégrale converge)

  $$\begin{aligned}&= -\left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1} \times \ln(t)\right]_{t\to 0}^{1} + \int_0^1 \frac{1}{2n+1}t^{2n+1} \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2n+1} \times \int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

donc en particulier $\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}\,t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui prouve par domination que la série de terme général $\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}\,t$ est convergente.

Grâce au théorème d'intégration terme à terme, on peut donc affirmer que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}\,t &= -\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} t^{2n}\ln(t)\mathrm{d}\,t\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 t^{2n}\ln(t)\mathrm{d}\,t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

Enfin, on sait que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$.

De plus, en séparant les entiers strictement positifs en entiers pairs strictement positifs, et entiers impairs positifs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

dont on déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}\,t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

Avec le théorème d'intégration terme à terme sur un segment.

➟ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]0\,;\,1]$ et tend vers 0 en 0 par croissances comparées, donc son prolongement

$$g_n : t \mapsto \begin{cases} t^{2n}\ln(t) & \text{si } t \in\,]0\,;\,1],\\ 0 & \text{si } t = 0,\end{cases}$$

est une fonction continue sur $[0\,;\,1]$.

➟ Grâce au préambule, on peut affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) = \begin{cases} -\frac{t^2\ln(t)}{t^2-1} & \text{si } t \in]0\,;\,1[, \\ 0 & \text{si } t=0 \text{ et si } t=1 \end{cases}$$

donc la série des g_n converge simplement sur $[0\,;\,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'étude des variations de g_n permet d'affirmer que

$$\|g_n\|_\infty^{[0\,;\,1]} = \left|g_n\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}}\right)\right| = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2n},$$

donc il est inutile de compter sur la convergence normale.
On se résout donc à chercher du côté de la convergence uniforme : pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{R_N}(t) = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} g_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in \{0{,}1\}, \\ \sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} t^{2n}\ln(t), & \text{si } 0 < t < 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } t \in \{0{,}1\}, \\ \ln(t) \times t^{2(\mathrm{N}+1)} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (t^2)^n = \frac{\ln(t)\times t^{2(\mathrm{N}+1)}}{1-t^2}, & \text{si } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Mais il me paraît trop ardu d'étudier les variations de cette fonction pour en chercher la norme infini, donc j'abandonne cette méthode.

Avec le théorème de convergence dominée pour les séries

➟ On a déjà établi auparavant les deux premières conditions (continuité des f_n sur $]0\,;\,1[$, convergence simple de $\sum f_n$ sur $]0\,;\,1[$) du théorème de convergence dominée pour les séries.

➟ la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n : t \longmapsto -\frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0\,;\,1[$.

➟ Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, et tout $t \in]0\,;\,1[$,

$$\left|\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n(t)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |f_n(t)| = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} t^{2n}\,|\ln(t)| \leqslant -\ln(t) \times \sum_{n=1}^{+\infty} t^{2n} = \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1},$$

et

- $t \longmapsto \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0\,;\,1[$;
- par croissances comparées $\frac{t^2\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 0}{\sim} -t^2\ln(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$;
- $\frac{t^2\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2-1} = \frac{\ln(1+(t-1))}{t^2-1} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{t^2-1} = \frac{1}{t+1} \xrightarrow[t\to 1]{} \frac{1}{2}$;

donc la fonction $t \longmapsto \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ est prolongeable par continuité sur $[0\,;\,1]$, ce qui prouve qu'elle est intégrable sur $]0\,;\,1[$.

On a vérifié toutes les conditions du théorème de convergence dominée pour les séries, qui nous permet alors d'intervertir l'intégrale et la somme infinie et d'obtenir le résultat voulu.

Une correction de l'exercice 13.18 *énoncé*

Les trois premières conditions du théorème d'intégration terme à terme ont été vérifiées dans la solution de l'exercice 13.17, et on a aussi calculé que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \left| x e^{-(a+bn)x} \right| \mathrm{d}x = \frac{1}{(a+bn)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui prouve que $\sum \int_0^{+\infty} \left| x e^{-(a+bn)x} \right| \mathrm{d}x$ est convergente.
On conclut de la même manière.

Une correction de l'exercice 13.19 *énoncé*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{(\cos x)^n \sin(nx)}{n}.$$

> *Montrer que la somme d'une série de fonctions $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction définie sur I revient à prouver que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, autrement dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

➟ Pour tout $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $f_n(x) = 0$ donc $\sum f_n(x)$ converge.
➟ Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $|\cos(x)| < 1$, et $|\sin(nx)| \leqslant 1$, donc

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{|\cos(x)|^n}{n} \leqslant |\cos(x)|^n$$

d'où la convergence de $\sum f_n(x)$ par domination par la série géométrique convergente de raison $|\cos(x)|$.
➟ En conclusion, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x,

$$\begin{aligned} f_n(x+\pi) &= \frac{(\cos(x+\pi))^n \sin(nx+n\pi)}{n} \\ &= \frac{(-\cos x)^n(-1)^n \sin(nx)}{n} \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

Donc en additionnant ces termes (qui sont les termes généraux de séries convergentes) pour n allant de 1 à ∞, on obtient bien $f(x+\pi) = f(x)$, ce qui prouve la π-périodicité de f.

2. On va appliquer le théorème de dérivation terme à terme.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori sur $]0\,;\,\pi[$, de dérivée définie par

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -\sin(x)\cos^{n-1}(x)\sin(nx) + \cos^n(x)\cos(nx) \\ &= \cos(x)^{n-1}(-\sin(x)\sin(nx) + \cos(x)\cos(nx)) \\ &= \cos(x)^{n-1}\cos((n+1)x)\,; \end{aligned}$$

   - on sait déjà que $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;\,\pi[$;
   - tout segment $[a\,;\,b]$ inclus dans $]0\,;\,\pi[$ est inclus dans le segment $[\alpha\,;\,\pi-\alpha]$, où α est le réel de $]0\,;\,\pi/2]$ défini par

$$\alpha = \begin{cases} \pi - b & \text{si } \pi - b \leqslant a, \\ a & \text{si } \pi - b \geqslant a, \end{cases}$$

   et je vous laisse prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\|f_n'\right\|_\infty^{[\alpha\,;\,\pi-\alpha]} \leqslant |\cos(\alpha)|^{n-1}$$

   ce qui nous donne par domination la convergence de $\sum \left\|f_n'\right\|_\infty^{[\alpha\,;\,\pi-\alpha]}$, donc la convergence normale, et a fortiori uniforme, de $\sum f_n'$ sur tout segment de $]0\,;\,\pi[$.

   On peut donc conclure que la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;\,\pi[$, de dérivée définie pour tout $x \in]0 ; \pi[$ par

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(x)^{n-1} \cos((n+1)x)) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(x)^{n-1} \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i(n+1)x}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\cos(x)^{n-1}\mathrm{e}^{i(n+1)x}\right) \quad \textit{(car } \cos(x)^{n-1} \in \mathbb{R}\textit{)} \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(x)^{n-1}\mathrm{e}^{i(n+1)x}\right) \quad \textit{(par propriété des séries complexes)} \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i2x} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos(x)\mathrm{e}^{ix}\right)^{n-1}\right) \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i2x} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\cos(x)\mathrm{e}^{ix}\right)^{n}\right) \quad \textit{(en posant } n' = n-1\textit{)} \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i2x} \frac{1}{1-\cos(x)\mathrm{e}^{ix}}\right) \quad \textit{(car } \left|\cos(x)\mathrm{e}^{ix}\right| \leqslant |\cos(x)| < 1\textit{)} \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i2x} \frac{1-\cos(x)\mathrm{e}^{-ix}}{(1-\cos(x)\mathrm{e}^{ix})(1-\cos(x)\mathrm{e}^{-ix})}\right) \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{e}^{i2x} - \cos(x)\mathrm{e}^{ix}}{\sin^2(x)}\right) \\
&= \frac{\cos(2x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{2\cos^2(x) - 1 - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) - 1}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x)}{\sin^2(x)} = -1.
\end{aligned}$$

3. De ce résultat spectaculaire, on déduit qu'il existe un réel C tel que pour tout $x \in]0 ; \pi[$, $f(x) = -x + C$. Or $f(\pi/2) = 0$, donc finalement $f(x) = -x + \frac{\pi}{2}$, autrement dit

$$\boxed{\forall x \in]0 ; \pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\cos x)^n \sin(nx)}{n} = -x + \frac{\pi}{2}.}$$

Puis par π-périodicité, je vous laisse retrouver que pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, en notant p la partie entière de $\frac{x}{\pi}$, on a $x - p\pi \in]0 \,;\, \pi[$, donc

$$f(x) = f(x - p\pi) = -(x - p\pi) + \frac{\pi}{2} = -x + (2p+1)\frac{\pi}{2},$$

tandis que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Une preuve de la proposition 13.20

énoncé

Les conditions entraînent que le corollaire 13.19 est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Une correction de l'exercice 13.20

énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

(1) la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{(n+x)^2}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1 \,;\, +\infty[$,

(2) puis, on montre par récurrence (sur k) que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x > -1,\ \ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k+1)!}{(n+x)^{k+2}}.$$

Ainsi

$$\left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty^{]-1\,;\,+\infty[} = \frac{(k+1)!}{(n-1)^{k+2}} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Mais on remarque que le calcul précédent n'est pas valable pour $n = 1$, alors pour ne pas traiter f_1 séparément, parce qu'après elle va faire la tronche on la connaît, on se place sur tout segment $[a \,;\, b] \subset]-1 \,;\, +\infty[$, sur lequel

$$\left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty^{[a\,;\,b]} = \frac{(k+1)!}{(n+a)^{k+2}} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où par domination la convergence de la série $\sum \left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty^{[a\,;\,b]}$.

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum f_n^{(k)}$ est une série normalement convergente sur tout segment de $]-1 \,;\, +\infty[$, et on peut donc appliquer le corollaire 13.19 à la série de fonctions $\sum \frac{1}{(n+x)^2}$ à tout ordre $k \in \mathbb{N}$ pour conclure ce qu'il faut.

Une preuve de la proposition 13.21 *énoncé*

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

➟ Les fonctions $f_n : t \mapsto \frac{\alpha^n}{n!} t^n$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivées succecssives :

$$f_n^{(k)} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\alpha^n}{n!} \times \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} = \frac{\alpha^n}{(n-k)!} t^{n-k} & \text{si } n \geqslant k, \\ 0 & \text{si } n < k. \end{cases}$$

➟ On établit que pour tout réel $b > 0$, tous $k \in \mathbb{N}$, et $n \geqslant k$:

$$\begin{aligned} \left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty^{[-b\,;\,b]} &= \sup_{|t| \leqslant b} \left| \frac{\alpha^n}{(n-k)!} t^{n-k} \right| \\ &= \sup_{|t| \leqslant b} \frac{|\alpha|^n}{(n-k)!} |t|^{n-k} \\ &= \frac{|\alpha|^n}{(n-k)!} b^{n-k} \\ &= |\alpha|^k \frac{(|\alpha|\, b)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \underset{n \to +\infty}{O} \left(\frac{(|\alpha|\, b)^{n-k}}{(n-k)!} \right) \end{aligned}$$

et $\sum_{n \leqslant k} \frac{(|\alpha| b)^{n-k}}{(n-k)!}$ est moyennant le changement d'indice $n' = n - k$ une série exponentielle convergente, donc $\sum \left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty^{[-b\,;\,b]}$ converge.

➟ Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum f_n^{(k)}$ est normalement convergente sur tout $[-b\ ;\ b]$ pour tout $b > 0$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$ qui est contenu dans un tel intervalle, donc uniformément convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$. On en déduit en appliquant la proposition 6.20 à tout ordre $k \in \mathbb{N}$ que la fonction e_α est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, par intégration terme à terme,

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}_\alpha)^{(k)}(t) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{(n-k)!} t^{n-k} \\ &= \alpha^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\alpha t)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \alpha^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \quad \textit{(en posant } n' = n-k\textit{)} \\ &= \alpha^k \mathrm{e}^{\alpha t} \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$