Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et sauf mention expresse, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

# 1. Définitions, notations

### Définition 15.1 – Série entière

On appelle **série entière** associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série des fonctions $\square \mapsto a_n \square^n$.
On la note $\sum a_n z^n$ ou $\sum a_n x^n$, et les $a_n$ sont appelés **coefficients** de cette série entière.

**Exemples 15.1.** La série géométrique est la série entière associée à la suite constante égale à 1, et la série exponentielle est la série entière associée à $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

### Remarque 15.1 – Notations et vocabulaire

(1) Comme l'indique leur définition, les séries entières sont des séries de fonctions, mais leur notation $\sum a_n z^n$ peut aussi être interprétée comme la série numérique de terme général $a_n z^n$.

(2) On note souvent $\sum a_n z^n$ lorsque la variable $z$ est dans $\mathbb{C}$, et $\sum a_n x^n$ si $x \in \mathbb{R}$.

### Définition 15.2 – Série génératrice d'une variable aléatoire entière

On appelle **série génératrice** d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série entière $\sum \mathbb{P}(X = n) z^n$ associée à la suite $(P(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$.

### Remarque 15.2 – Polynômes et séries entières

Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ peut considéré comme une série entière associée à une suite nulle à partir d'un certain rang. Réciproquement, on peut considérer audacieusement les séries entières comme une généralisation des polynômes.
Rappelons la formule de Taylor pour un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, en tout $a \in \mathbb{C}$ :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$ *(c'est une somme finie car $P^{(n)}$ est le polynôme nul pour $n > \deg(P)$).*

### Définition 15.3 – Série entière de Taylor d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$

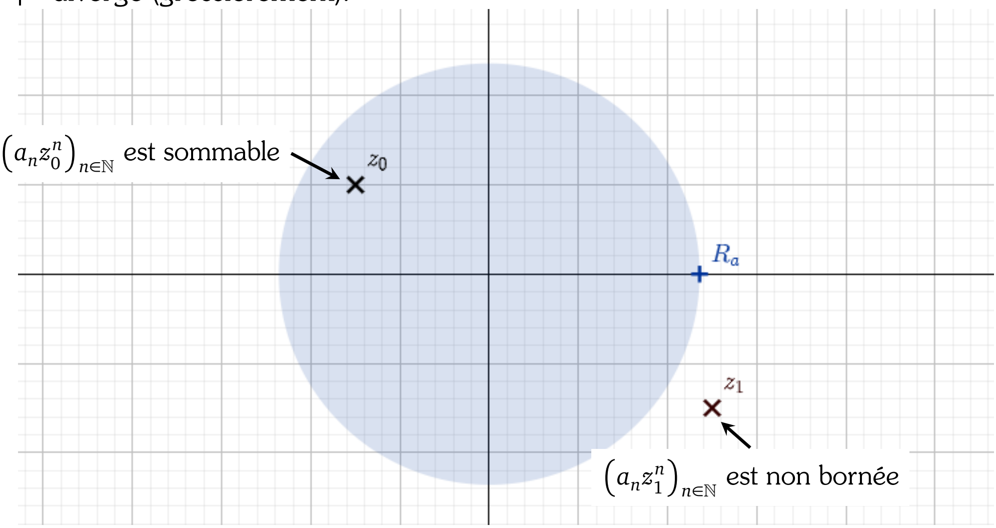
Soient $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, et $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a-r\ ;\ a+r[$.
On appelle **série entière de Taylor (ou Taylor-Mac Laurin)** de $f$ en $a$ la série entière associée à la suite $\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Remarque 15.3 – Le cœur du problème.**
Le mathématicien Lagrange, à la fin du XVIIIe siècle, avait postulé que, comme pour les polynômes, toute fonction $\mathscr{C}^\infty$ est somme de sa série de Taylor, mais Cauchy a prouvé que c'était beaucoup plus compliqué que ça… La résolution de ce problème fait l'objet de ce chapitre, avec l'utilisation des fonctions développables en séries entières .

## 2. Rayon de convergence d'une série entière

On va montrer que pour une série entière $\sum a_n z^n$, il existe $\mathrm{R}_a$ dans $[0\ ;\ +\infty[\cup\{+\infty\}$ pour lequel

- si $|z_0| < \mathrm{R}_a$, la suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z_1| > \mathrm{R}_a$, la suite $\left(a_n z_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est même pas bornée, donc $\sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).



## 2.1. Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence, cercle d'incertitude

**Proposition 15.1 – Lemme d'Abel**

Soit $\rho \in ]0\,;+\infty[$ tel que la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \rho$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

**Proposition 15.2 – Existence du rayon de convergence**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

(1) L'ensemble $\mathrm{I}$ des réels $\rho$ pour lesquels la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée est un intervalle de $[0\,;+\infty[$ contenant $0$. La borne supérieure de $\mathrm{I}$ dans $[0\,;+\infty[\cup\{+\infty\}$ est appelée **rayon de convergence** de la série entière, on la note $\mathrm{R}_a$, ou $\mathrm{R}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

(2) Ce rayon vérifie les propriétés suivantes :
- si $|z| < \mathrm{R}_a$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument *(encore vrai si* $\mathrm{R}_a = +\infty$*)*, donc $\sum a_n z^n$ converge, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0$, et a fortiori est bornée ;
- si $|z| > \mathrm{R}_a$, alors la suite de terme général $a_n z^n$ n'est pas bornée, donc elle ne tend pas vers $0$, la série $\sum a_n z^n$ ne converge pas, et encore moins absolument.

**Exemples 15.2.**

(1) Le rayon de convergence de $\sum z^n$ est $1$ et

$$\forall z \in \mathrm{B}_o(0,1) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \,\},\ \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

(2) la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et pour somme la fonction exponentielle.

(3) les séries entières $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ont aussi pour rayon de convergence $+\infty$, et pour sommes respectives $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

### Définition 15.4 – Disque et intervalle de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et $\mathrm{R}$ son rayon de convergence.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathrm{B}_o(0, \mathrm{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \mathrm{R}\}$ est appelé **disque ouvert de convergence** de la série entière, et le cercle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \mathrm{R}\}$ est appelé **cercle d'incertitude** de la série entière ;
- si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $]-\mathrm{R}\ ;\ \mathrm{R}[$ est appelé **intervalle ouvert de convergence** de la série entière.

**Exemple 15.3**. Le cercle d'incertitude, qui se résume aux bornes $-\mathrm{R}$ et $\mathrm{R}$ dans le cas réel, porte bien son nom, car les séries entières $\sum x^n$, $\sum \frac{1}{n} x^n$, $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$, et $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ partagent le même rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$, mais ont des comportements différents aux bornes : la première converge simplement sur $]-1\ ;\ 1[$, la deuxième sur $[-1\ ;\ 1[$, la troisième sur $]-1\ ;\ 1]$, et la quatrième sur $[-1\ ;\ 1]$.

### Proposition 15.3 – Décalage des indices et rayon de convergence

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum a_{n+p} z^n$ et $\sum a_{n-p} z^n$ ont même rayon de convergence.

## 2.2. Premières méthodes de calcul du rayon de convergence

### Méthode 15.1 – Calcul du rayon de convergence

Pour calculer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$, on s'intéresse aux quatre propriétés suivantes :

- *le caractère borné de* $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ;
- *le fait que* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$ ;
- *la convergence de* $\sum a_n z^n$ ;
- *la convergence absolue de* $\sum a_n z^n$.

➟ Si pour $z_0 \in \mathbb{C}$, l'une de ces propriétés est vérifiée, alors $z_0$ est dans le disque (fermé) de convergence, donc $|z_0| \leqslant \mathrm{R}$ ;
et si l'une de ces propriétés n'est pas vérifiée, alors $z_0$ n'est pas dans le disque de convergence, donc $\mathrm{R} \leqslant |z_0|$.

➟ Soit $\alpha \in ]0\,;+\infty[$,

- si l'une de ces propriétés est vérifiée pour tout $z \in [0\,;\alpha[$, alors $[0\,;\alpha[$ est dans le disque de convergence donc $\alpha \leqslant \mathrm{R}$,
- si l'une de ces propriétés n'est pas vérifiée pour tout $z \in ]\alpha\,;+\infty[$, alors $]\alpha\,;+\infty[$ est hors du disque de convergence, donc $\mathrm{R} \leqslant \alpha$.

**Exercices 15.1**.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$ sachant que $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R.
2. Montrer que si $\sum a_n r^n$ est **semi-convergente** (c'est-à-dire convergente mais pas absolument convergente), alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $|r|$.
   Qu'en déduire pour la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n} z^n$ ?

### Méthode 15.2 – Pour se ramener à une série à coefficients réels

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n|\, x^n$ ont même rayon de convergence.

**Exercice 15.2**. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n z^n$.

**Méthode 15.3 – Utilisation de la règle de D'Alembert**
Pour tout tout réel $x$ strictement positif, s'il ne s'annule pas on note $u_n(x)$ le terme général de la série entière, et on cherche $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$.
Quand cette limite $\ell(x)$ existe, elle est positive, et l'étude des cas $\ell(x)<1$ et $\ell(x)>1$ selon les valeurs de $x$ nous donne la valeur du rayon de convergence.

**Exercice 15.3.** Donner le rayon de convergence de $\sum \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}x^{3n+1}$.

**Proposition 15.4 – Comparaison des rayons de convergence**

(1) Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$ ;
(2) si $a_n \sim b_n$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

**Exercices 15.4.**

1. Soit $\mathrm{F}$ une fraction rationnelle non nulle et définie sur $\mathbb{N}$.
   Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{F}(n)a_nz^n$ est le même que celui de la série entière $\sum a_nz^n$.
2. Donner le rayon de convergence de $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)x^n$.

## 2.3. L'exemple de la série génératrice d'une variable aléatoire

**Proposition 15.5 – Séries génératrices des lois usuelles**

(1) Pour toute variable $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série génératrice $\sum P(X=n)t^n$ est au moins égal à $1$, on note sa somme $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$.

(2) Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}_{[\![a,b]\!]}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \dfrac{1}{b-a+1} \sum\limits_{n=a}^{b} t^n$

(3) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = (1-p+pt)^n$.

(4) Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors pour tout $|t| < \frac{1}{1-p}$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$.

(5) Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

## 2.4. Conséquence des opérations sur les séries entières sur le rayon de convergence

**Proposition 15.6 – Combinaisons linéaires de séries entières**

(1) Pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, le rayon de convergence de $\sum(\lambda a_n)z^n$ reste $R_a$.

(2) Le rayon de convergence $R_s$ de la série entière $\sum(a_n+b_n)z^n$ vérifie

- $R_s = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$,
- $R_s \geqslant R_a$ si $R_a = R_b$.

**Exemple 15.4.** Les séries entières $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ont pour rayon de convergence $+\infty$, et pour sommes respectives $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

**Proposition 15.7 – Produit de Cauchy de deux séries entières**

Le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum p_n z^n$ où $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Le rayon de convergence $R_p$ du produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie $R_p \geqslant \min(R_a, R_b)$.
Pour tout $z \in \mathbb{K}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

**Exemple 15.5**. La série entière $\sum (n+1) z^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$, car c'est le produit de Cauchy de $\sum z^n$ par elle-même.

**Exercice 15.5 – Oral centrale**.
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0.$$

Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1, et que sa somme est $x \mapsto \frac{2}{e^x+1}$.

**Remarque 15.4** $$\left(\sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=q}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=p+q}^{+\infty} \left(\sum_{k=p}^{n-q} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

**Proposition 15.8 – Séries entières dérivée et primitive**

Les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^{n-1} = \sum (n+1) a_{n+1} z^n$,
ainsi que $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum \frac{a_{n-1}}{n} z^n$, ont même rayon de convergence.

Autrement dit, dériver ou intégrer terme à terme une série entière ne change pas son rayon de convergence.

# 3. Régularité de la fonction somme d'une série entière

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont les rayons de convergence $\mathrm{R}_a$ et $\mathrm{R}_b$ des séries entières correspondantes sont non nuls.

On note $\mathrm{S}_a : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\mathrm{S}_b : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ leurs sommes respectives.

**Proposition 15.9 – Convergence normale sur tout segment de l'intervalle de convergence**

La série entière $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur tout segment inclus dans l'intervalle de convergence $]-\mathrm{R}_a\ ;\ \mathrm{R}_a[$.

## 3.1. Continuité et intégration terme à terme

**Proposition 15.10 – Intégration terme à terme d'une série entière**

La somme $\mathrm{S}_a$ est continue sur $]-\mathrm{R}_a\ ;\ \mathrm{R}_a[$, et

$$\forall x \in\ ]-\mathrm{R}_a\ ;\ \mathrm{R}_a[,\quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

**Exercice 15.6.** En remarquant que $\forall x \in\ ]-1\ ;\ 1[\ \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\ln(1+x)} = \int_0^1 (1+x)^t \mathrm{d}\,t$, montrer que $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est développable en série entière sur $]-1\ ;\ 1[$, et préciser ses coefficients sous forme d'une intégrale.

## 3.2. La somme d'une série entière réelle est $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de convergence

**Corollaire 15.11 – Dérivation terme à terme d'une série entière**

La fonction somme $\mathrm{S}_a$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}_a\ ;\ \mathrm{R}_a[$.
De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in\ ]-\mathrm{R}_a\ ;\ \mathrm{R}_a[$,

$$\mathrm{S}_a^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$$

En particulier, $a_p = \frac{\mathrm{S}_a^{(p)}(0)}{p!}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

**Exercice 15.7 – Oral CCINP (MP).**

Montrer que la fonction $x \mapsto \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x < 0, \end{cases}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

## 3.3. Unicité des coefficients d'une série entière

**Corollaire 15.12 – Unicité du développement en série entière**

Si les sommes $S_a$ et $S_b$ sont égales sur un intervalle $]-\alpha\ ;\ \alpha[$, avec $\alpha > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

**Remarque 15.5**
Ce résultat déjà connu pour les polynômes se prolonge donc aux séries entières !

**Exercice 15.8 – Extrait d'oral CCINP.**
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n.$$

1. Montrer que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant \frac{1}{2}$.

   Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{x-1}{2x^3-x^2+2x-1}$.

2. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de $a_n$ en fonction de $n$.

**Proposition 15.13 – Série génératrice, espérance, variance**

(1) La série génératrice $G_X$ d'une variable aléatoire X est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\ ;\ 1[$, et la loi de X est caractérisée par sa série génératrice.

Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

(2) Si $G_X$ est dérivable en 1, alors X admet une espérance, et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.

(3) Si $G_X$ est deux fois dérivable en 1, alors X admet une variance, et dans ce cas,

$$\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2.$$

### 3.4. Cas de la variable complexe

**Proposition 15.14 – Continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe**

La fonction somme d'une série entière d'une variable complexe est continue sur son disque de convergence.

*(On verra les détails dans le chapitre sur les fonctions vectorielles.)*

## 4. Développement d'une fonction en somme de série entière

### 4.1. Fonction développable en série entière

**Définition 15.5 – Fonction développable en série entière**

On dit que $f$ est **développable en série entière en** $x_0$ s'il existe un intervalle non vide centré en $x_0$ sur lequel $f$ est la somme d'une série entière.
Autrement dit, s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $\alpha \in ]0 \,;+\infty[$ tels que

$$\forall x \in ]x_0 - \alpha \,;\, x_0 + \alpha[, \;\; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

**Remarques 15.6**

- En général, on s'intéresse aux fonctions développables en série entière en 0.
- Les combinaisons linéaires de fonctions développables en série entière en $x_0$ sont développables en série entière en $x_0$, grâce aux opérations algébriques sur les séries entières (prop 15.6) ;
- un produit de fonctions développables en série entière en $x_0$ est encore développable en série entière en $x_0$ par le produit de Cauchy des séries entières (prop 15.7).

## 4.2. De la convergence de la série de Taylor d'une fonction

**Proposition 15.15**

Si une fonction $f$ est développable en série entière en 0, alors
- la fonction $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0,
- la fonction $f$ est la fonction somme de sa série de Taylor en 0.

**Remarque 15.7** Attention, la réciproque est fausse, toute fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 n'est pas développable en série entière en 0.

**Exercice 15.9.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ est prolongeable en une fonction $f$ $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, dont toutes les dérivées successives s'annulent en 0.
En déduire que $f$ n'est pas développable en série entière en 0.

**Remarques 15.8**

- Soit $f$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle $\mathrm{I} = ]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$ dont toutes les dérivées sont bornées sur I, alors l'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathrm{I}$
$$\left| f(x) - \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) \right| \leqslant \frac{\left\| f^{(n)} \right\|_\infty^{\mathrm{I}}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$
Ainsi, pour prouver que $f$ est développable en série entière en 0, il suffit de montrer que :
$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\left\| f^{(n)} \right\|_\infty^{\mathrm{I}}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0.$$
- Si $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une fonction paire (*resp.* impaire) alors $a_{2n+1} = 0$ (*resp.* $a_{2n} = 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### 4.3. Développements en série entière usuels

**Proposition 15.16**

**À partir de la somme de la série géométrique :** pour tout $x \in ]-1\,;\,1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \operatorname{argth}(x)$$

**À partir de la somme de la série exponentielle :** pour tout nombre complexe $z$, et tout réel $x$ :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

**Fonction puissance (ou série binomiale) :** soit $\alpha \in \mathbb{C}$, pour tout $x \in ]-1\,;\,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \overbrace{= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}^{\text{procédé mnémotechnique}} .$$

**Remarque 15.9 – Coefficients binomiaux généralisés :**
dans l'expression de la série binomiale, on utilise la notation des **coefficients binomiaux généralisés** :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha - i)}{n!} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ \alpha, & \text{si } n = 1, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases}$$

En particulier, pour tout entier naturel $p$, et $x \in ]-1\ ;\ 1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = (1+(-x))^{-p-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-p-1}{n}(-x)^n$$

et

$$\binom{-p-1}{n} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(-p-1-i)}{n!} = \frac{(-1)^n \prod_{i=0}^{n-1}(p+1+i)}{n!} = (-1)^n \frac{(p+n)!}{p!n!} = (-1)^n \binom{n+p}{p}$$

d'où

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p}(-1)^n \times (-x)^n = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p},$$

où l'on retrouve la formule du binôme négatif.

**Exercice 15.10**. Montrer que pour tout $x \in ]-1\ ;\ 1[$,

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2n+1} x^{2n+1}.$$

# Les preuves et les corrections

## Une preuve de la proposition 15.1 *énoncé*

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, autrement dit $z \in \mathrm{B}_o(0, \rho)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n z^n = a_n \rho^n \times \left(\frac{z}{\rho}\right)^n,$$

or la suite $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc

$$a_n z^n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\left(\frac{z}{\rho}\right)^n\right).$$

Comme la suite géométrique de terme général $\sum \left(\frac{z}{\rho}\right)^n$ est sommable (car $\left|\frac{z}{\rho}\right| < 1$), on en déduit par le critère de majoration que $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, C.Q.F.D.

## Une preuve de la proposition 15.2 *énoncé*

(1) Si $\rho \in \mathrm{I}$, alors $[0\,;\rho] \subset \mathrm{I}$, car si $r \in [0\,;\rho]$, alors $|a_n r^n| = |a_n|\, r^n \leqslant |a_n|\,\rho^n$, or $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée, et $r \in \mathrm{I}$.

(2) Les deux points suivants sont pour le premier la conséquence du lemme d'Abel, et pour le second, par définition du rayon de convergence $\mathrm{R}_a$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc ne peut tendre vers 0, d'où la grossière divergence de la série $\sum a_n z^n$.

## Une preuve de la proposition 15.3 *énoncé*

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum a_n z^n$ converge si, et seulement si, la série $\sum a_{n+p} z^{n+p}$ converge.
Or

$$a_{n+p} z^{n+p} = z^p \times a_{n+p} z^n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(a_{n+p} z^n\right),$$

et comme $z \neq 0$ on a aussi

$$a_{n+p} z^n = \frac{1}{z^p} a_{n+p} z^{n+p} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(a_{n+p} z^{n+p}\right).$$

Ainsi la suite $\left(a_{n+p} z^{n+p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la suite $\left(a_{n+p} z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, Donc ces deux séries entières ont même rayon de convergence.
On déduit de ce résultat que les séries entières $\sum a_{n-p} z^n$ et $\sum a_{(n-p)+p} z^n = \sum a_n z^n$ ont aussi même rayon de convergence.

## Une correction de l'exercice 15.1

*énoncé*

(1) Notons $\mathrm{R}'$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.

- Si $z \in \left[0 ; \sqrt{\mathrm{R}}\right[$, alors $\left|z^2\right| < \mathrm{R}$, donc par définition du rayon de convergence $\mathrm{R}$, $\sum a_n \left(z^2\right)^n = \sum a_n z^{2n}$ converge, ainsi $\mathrm{R}' \geqslant \sqrt{\mathrm{R}}$.
- Si $z \in \left]\sqrt{\mathrm{R}} ; +\infty\right[$, alors $\left|z^2\right| > \mathrm{R}$, donc derechef par définition de $\mathrm{R}$, $\sum a_n \left(z^2\right)^n = \sum a_n z^{2n}$ diverge grossièrement, ainsi $\mathrm{R}' \leqslant \sqrt{\mathrm{R}}$.

(2) Notons $\mathrm{R}_a$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.
Si $\sum a_n r^n$ est semi-convergente, alors

- $\sum a_n r^n$ est convergente, donc $\mathrm{R}_a \geqslant r$ ;
- $\sum |a_n r^n|$ est divergente, donc $\mathrm{R}_a \leqslant r$ ;

donc $\mathrm{R}_a = r$.

## Une correction de l'exercice 15.2

*énoncé*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$, alors $|a_n| = \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|^n = 1$, et le rayon de convergence de $\sum |a_n| z^n = \sum z^n$ est $1$, donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est aussi $1$.

## Une correction de l'exercice 15.3

*énoncé*

Si on pose, pour tout $x > 0$, $u_n(x) = \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^{3n+1}$, alors

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{n+1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{(2n+2)(2n+1)}} \times x^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{4} \times \frac{1}{2n} \times x^3 = \left(\frac{x}{2}\right)^3,$$

donc

- si $\left(\frac{x}{2}\right)^3 < 1$ c'est-à-dire $x < 2$, la série converge, donc son rayon de convergence $\mathrm{R}$ vérifie $\mathrm{R} \geqslant 2$,
- et si $x > 2$, la série diverge, donc $\mathrm{R} \leqslant 2$,

par conséquent $\mathrm{R} = 2$.

## Une preuve de la proposition 15.4

*énoncé*

Comment démontrer que $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$ ? Le principe en est le suivant : on prend $r < \mathrm{R}_b$ (remarquer l'inégalité *stricte* pour pouvoir affirmer la convergence absolue de la série $\sum b_n z^n$) et on montre la convergence de $\sum |a_n| r^n$, dont on déduit que $r \leqslant \mathrm{R}_a$, donc que $[0 ; \mathrm{R}_b[ \subset [0 ; \mathrm{R}_a[$.

(1) Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, supposons que $0 < r < \mathrm{R}_b$, alors $a_n r^n = \mathrm{O}(b_n r^n)$, mais la série

$\sum |b_n| r^n$ est convergente, donc par domination la série $\sum |a_n| r^n$ aussi, d'où $r \leqslant R_a$. Ainsi $[0\,;R_b[ \subset [0\,;R_a[$, et par conséquent $R_b \leqslant R_a$.

(2) Si $a_n \sim b_n$ alors en particulier $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$, d'où par le premier point, $R_a = R_b$.

## Une correction de l'exercice 15.4

*énoncé*

(1) Comme F est une fraction rationnelle, il existe $\alpha \in \mathbb{C}^\star$, et $\beta \in \mathbb{Z}$ tels que $F(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n^\beta$, donc $F(n)a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha \times a_n n^\beta$.

Donc $\sum F(n)a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum \alpha n^\beta a_n z^n$, qui est égal à celui de $\sum n^\beta a_n z^n$ car $\alpha \neq 0$.

Montrons à présent que $\sum n^\beta a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence, pour cela notons $b_n = n^\beta a_n$, puis $R_b$ et $R_a$ les rayons de convergence respectifs de $\sum b_n z^n$ et $\sum b_n x^n$.

→ **Si $\beta = 0$ :** alors $b_n = a_n$, donc $R_a = R_b$.

→ **Si $\beta > 0$ :** alors

- $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n)$, donc $R_a \geqslant R_b$ ;
- $\boxed{\text{pour tout } x \in ]0\,;R_a[}$, prenons $r \in ]x\,;R_a[$.

  Alors
  $$b_n x^n = n^\beta a_n x^n = (a_n r^n) \times \left(n^\beta \left(\frac{x}{r}\right)^n\right) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0,$$
  car
  - $a_n r^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ puisque $r < R_a$ ;
  - $n^\beta \left(\frac{x}{r}\right)^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ par croissances comparées vu que $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$,

  donc $\boxed{x \in ]0\,;R_b]}$.

  On a montré que tout $x$ de $]0\,;R_a[$ est dans $]0\,;R_b]$, autrement dit l'inclusion $]0\,;R_a[ \subset ]0\,;R_b]$, qui prouve que $R_a \leqslant R_b$.

On a donc prouvé que si $\beta > 0$, alors $R_a = R_b$.

→ **Si $\beta < 0$ :** alors d'après le raisonnement précédent, comme $-\beta > 0$, les séries entières $\sum a_n z^n = \sum n^{-\beta} \times \left(n^\beta a_n\right) z^n$ et $\sum \left(n^\beta a_n\right) z^n$ ont le même rayon de convergence, C.Q.F.D.

(2) De $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}$, on déduit que $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, donc que

$$\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et $\ln(1+\square) \underset{\square\to 0}{\sim} \square$ nous donne

$$\ln\left(\cos\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1+\left[-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \left[-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Ainsi $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right) x^n$ a même rayon de convergence que $\sum\left(-\frac{1}{2n^2}\right) x^n$, et d'après la première question, $-\frac{1}{2n^2}$ étant de la forme $\mathrm{F}(n)$ où $\mathrm{F}$ est une fraction rationnelle, $\sum\left(-\frac{1}{2n^2}\right) x^n$ a le même rayon de convergence que $\sum x^n$, c'est-à-dire 1.

## Une preuve de la proposition 15.5 *énoncé*

(1) On sait que la suite de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)$ est sommable (et de somme 1), donc le rayon de convergence de la série entière correspondante est supérieure ou égale à 1.

(2) Dans le cas où $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{U}_{[\![a,b]\!]}$, comme dans tous les cas où X est une variable finie, la suite des $\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)$ est nulle à partir d'un certain rang, donc elle définit une série entière de rayon de convergence $+\infty$.
Pour tout réel $t$,

$$\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=n)\, t^n = \sum_{n=a}^{b} \frac{1}{b-a+1} t^n$$
$$= \frac{1}{b-a+1}\sum_{n=a}^{b} t^n.$$

(3) Comme dans le cas précédent, si $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ le rayon de convergence est $+\infty$, et pour tout réel $t$,

$$\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k)\, t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p\times t)^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pt)^n.$$

(4) Dans le cas où $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, avec $p \in ]0\,;1[$, la suite de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)\, t^n = \frac{p}{1-p}\left((1-p)t\right)^n$ est sommable si, et seulement si, $|(1-p)t| < 1$, donc si, et seulement si, $|t| < \frac{1}{1-p}$. Donc *(grâce au « si, et seulement si, »)* le rayon de convergence de las série entière définie par la suite de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)$ est $\frac{1}{1-p}$.

Pour tout réel $t$ tel que $|t| < \frac{1}{1-p}$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,t^n = pt \times \sum_{n=1}^{+\infty}((1-p)t)^{n-1} = pt \times \sum_{n=0}^{+\infty}((1-p)t)^n$$
$$= \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

(5) Dans le cas où $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$, la suite de terme général $\mathbb{P}(X=n)\,t^n = e^{-\lambda}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ est sommable pour tout réel $t$, car on reconnaît une série exponentielle de somme

$$G_X(t) = e^{-\lambda} \times e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

## Une preuve de la proposition 15.6 *énoncé*

(1) Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(\lambda a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est ; ainsi le rayon de convergence de $\sum \lambda a_n z^n$ est le même que celui de $\sum a_n z^n$ ;

(2) si $|z| < \min(R_a, R_b)$, les suites de termes généraux $|a_n|\,r^n$ et $|b_n|\,r^n$ sont bornées, donc la suite de terme général $(a_n + b_n)z^n$ est, grâce à l'inégalité triangulaire, bornée aussi, d'où $R_s \geqslant \min(R_a, R_b)$, et on retrouve la linéarité de la somme de séries convergentes classique.

Si les rayons $R_a$ et $R_b$ sont distincts, par exemple $R_a < R_b$, alors pour tout $r \in ]R_a\,;R_b[$, $\sum a_n r^n$ diverge, et $\sum b_n r^n$ converge, donc $\sum (a_n+b_n)r^n$ diverge, d'où $R_s \leqslant \min(R_a, R_b)$, et l'égalité annoncée est démontrée.

## Une preuve de la proposition 15.7 *énoncé*

Le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \times b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n,$$

où l'on retrouve la série entière $\sum p_n z^n$ avec $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes, donc la série produit (de Cauchy) l'est aussi et la formule finale est la conséquence du résultat général sur le produit de Cauchy.

## Une correction de l'exercice 15.5 *énoncé*

- On montre par une récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 1$.
  - Au rang $n = 0$, $|a_0| = 1 \leqslant 1$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que pour tout $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, $|a_k| \leqslant 1$, alors au rang $n$,

$$\begin{aligned} & a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0 \\ \iff \quad & a_n = -a_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} \\ \iff \quad & a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |a_n| = \left| -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} \right| & \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left| a_{n-k} \right| \\ & \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^1 - 1) \leqslant 1. \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

- On déduit de cette inégalité que le rayon de convergence de la série entière associée à $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est supérieur ou égal à $1$.
- Notons $f$ la somme de cette série entière, définie donc au moins sur $]-1\,;\,1[$.
  Alors pour tout $x \in ]-1\,;\,1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} \right) x^n \quad \textit{(par l'hypothèse de l'exercice)}. \end{aligned}$$

Or la série entière $\sum \frac{1}{n!} x^n$ est la série exponentielle, elle a pour rayon de convergence $+\infty$, donc le produit de Cauchy de cette série par $\sum a_n x^n$ est au moins $1$, et pour tout

$x \in ]-1\,;\,1[$

$$\begin{aligned} f(x) \times \mathrm{e}^x &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) x^n. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$f(x) = 1 - (f(x)\mathrm{e}^x - 1) = 2 - f(x)\mathrm{e}^x,$$

ce qui donne

$$f(x) = \frac{2}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

## Une preuve de la proposition 15.8 *énoncé*

Il suffit d'appliquer le résultat établi dans la première question de l'exercice 15.4, et d'observer la remarque sur le décalage des indices :

- Par décalage d'indices, $\sum a_n z^n$ et $\sum a_{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence, et on montre comme dans la première question de l'exercice 15.4, que $\sum a_{n+1} z^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ *(en multipliant par $n+1 = \mathrm{F}(n)$)* ont le même rayon de convergence.
- De même, *(en multipliant par $\mathrm{F}(n) = n$)* $\sum \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_{n-1} z^n$, qui par décalage d'indice a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

## Une preuve de la proposition 15.9 *énoncé*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto a_n x^n$.
Tout segment K inclus dans $]-\mathrm{R}_a\,;\,\mathrm{R}_a[$, est inclus dans le segment $[-\alpha\,;\,\alpha]$, en posant $\alpha = \sup\limits_{x \in \mathrm{K}} |x|$.
De plus, je laisse le lecteur se convaincre de ce que $\|f_n\|_\infty^{[-\alpha\,;\,\alpha]} = |a_n|\,\alpha^n$.
Mais comme $\alpha \in ]-\mathrm{R}_a\,;\,\mathrm{R}_a[$, on sait que la série $\sum |a_n|\,\alpha^n$ est convergente, donc $\sum \|f_n\|_\infty^{[-\alpha\,;\,\alpha]}$ converge, ce qui achève la démonstration.

## Une correction de l'exercice 15.6 *énoncé*

- Pour tout $t \in [0\,;\,1]$, on sait grâce au développement en série entière de la fonction puissance que

$$\forall x \in \left]-1\,;\,1\right[,\ (1+x)^t = 1 + t\,x + \frac{t(t-1)}{2}x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{t}{n} x^n,\ \text{avec } \binom{t}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k).$$

- Fixons $x \in \left]-1\,;\,1\right[$, et notons $u_n(t) = \binom{t}{n}x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0\,;\,1]$.
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n$ est continue sur $[0\,;\,1]$ ;
  - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in [0\,;\,1],\ |u_n(t)| = \frac{t(1-t)\cdots(n-1-t)}{n!}|x|^n \leqslant \frac{(n-1)!}{n!}|x|^n \leqslant |x|^n$$

  donc

$$\|u_n\|_\infty^{[0\,;\,1]} \leqslant |x|^n,\ \textit{(ce qui reste valable pour } n=0\textit{)}.$$

  Or $|x| < 1$ donc la suite géométrique $(|x|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, d'où, par domination, la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur $[0\,;\,1]$.

On en déduit par le théorème d'interversion série-intégrale que

$$\int_0^1 (1+x)^t \mathrm{d}\,t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{t}{n}x^n \mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 \binom{t}{n}\mathrm{d}\,t\right)x^n$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^1 \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\mathrm{d}\,t\right)x^n$$

*(au cas où l'expression $\binom{t}{n}$ déstabiliserait le lecteur dans le cas où $t$ n'est pas un entier)*

En bref, et pour répondre aux exigences de l'énoncé, on obtient que pour tout $x \in \left]-1\,;\,1\right[$,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k,\ \text{avec } a_k = \int_0^1 \binom{t}{n}\mathrm{d}\,t.$$

## Une preuve de la proposition 15.11 *énoncé*

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, on sait d'après la proposition 15.8 que $\sum f_n^{(p)}$ est une série entière de même rayon de convergence que $\sum a_n x^n$, c'est-à-dire $R_a$. De plus, d'après la proposition 15.9 que $\sum f_n^{(p)}$ est alors normalement convergente sur tout segment de $]-R_a\,;R_a[$.
- On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions pour conclure que $S_a$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_a\,;R_a[$, et qu'on peut la dériver terme à terme :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in ]-R_a\,;R_a[,\ \ S_a^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$$

- En particulier pour $x = 0$,

$$S_a^{(p)}(0) = p!a_p \ \ \textit{(ne pas oublier que } 0^0 = 1\,\textit{!)}$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \frac{S_a^{(p)}(0)}{p!}$.

## Une correction de l'exercice 15.7 *énoncé*

> *Pour montrer que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on va montrer qu'elle est égale à la somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, ce qui permet de conclure directement puisque les sommes de séries entières sont $\mathscr{C}^\infty$ dans leur intervalle de convergence.*

(1). On connaît les développements en série entière de ch et cos, de rayons de convergence $+\infty$ :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}$$
$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n},$$

(2). donc par définition de $f$, pour tout réel $x$ :

$$f(x)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n} & \text{si } x>0,\\ 1 & \text{si } x=0,\\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sqrt{-x}\right)^{2n} & \text{si } x<0.\end{cases}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n & \text{si } x>0,\\ 1 & \text{si } x=0,\\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(-x)^n & \text{si } x<0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n & \text{si } x>0,\\ 1 & \text{si } x=0,\\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\times(-1)^n}{(2n)!}x^n & \text{si } x<0.\end{cases}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n & \text{si } x\neq 0,\\ 1 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n.$$

(3). Ainsi la fonction $f$ est développable en une série entière de rayon de convergence $+\infty$, donc on peut en déduire qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

## Une preuve de la proposition 15.12 *énoncé*

Si les sommes $S_a$ et $S_b$ sont égales sur un intervalle $]-\alpha\,;\,\alpha[$, alors pour tout $p\in\mathbb{N}$, $S_a^{(p)}$ et $S_b^{(p)}$ sur $]-\alpha\,;\,\alpha[$, donc en particulier

$$\forall p\in\mathbb{N},\ \ a_p=\frac{S_a^{(p)}(0)}{p!}=\frac{S_b^{(p)}(0)}{p!}=b_p.$$

## Une correction de l'exercice 15.8 *énoncé*

1. On remarque tout d'abord que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+3}+a_{n+1}=2\left(a_{n+2}+a_n\right)$, dont on déduit par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{n+2}+a_n=2^n(a_2+a_0)=2^{n+1}.$$

Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un réel M tel que $\left|a_n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|\leqslant M$.

- Aux rangs $n\in\{0,1,2\}$, la propriété est vraie avec $M=1$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $\begin{cases}\left|a_n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|\leqslant 1,\\ \left|a_{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|\leqslant 1,\\ \left|a_{n+2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right|\leqslant 1\end{cases}$

  et montrons que $\left|a_{n+3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right|\leqslant 1.$

$$\begin{aligned}
\left|a_{n+3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right| &= \left|(2a_{n+2}-a_{n+1}+2a_n)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right| \\
&= \left|2\left(a_{n+2}+a_n\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}-a_{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right| \\
&= \left|2\times 2^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}-\frac{1}{4}a_{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| \quad \textit{(avec la remarque initiale)} \\
&= \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}a_{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left|a_{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| \quad \textit{(par l'inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 1 \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant 1, \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Ainsi pour $x=\frac{1}{2}$ la suite de terme général $a_nx^n$ est bornée, ce qui prouve que le rayon de convergence de $\sum a_nx^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

2. Soit $x\in\left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}
S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n &= 1+x+x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}a_nx^n \\
&= 1+x+x^2+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+3}x^{n+3} \\
&= 1+x+x^2+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2a_{n+2}-a_{n+1}+2a_n\right)x^{n+3} \\
&= 1+x+x^2+2x\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+2}x^{n+2}-x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1}+2x^3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n
\end{aligned}$$

*(on a appliqué la linéarité de la somme, car les sommes apparues sont celles de séries convergentes, vu que $|x|<\frac{1}{2}$)*

$$\begin{aligned}
&= 1+x+x^2+2x\sum_{n=2}^{+\infty}a_nx^n-x^2\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n+2x^3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \\
&= 1+x+x^2+2x(S(x)-1-x)-x^2(S(x)-1)+2x^3S(x) \\
&= 1-x+(2x-x^2+2x^3)S(x)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$(1-2x+x^2-2x^3)S(x)=1-x,$$
$$\text{ou encore } (2x^3-x^2+2x-1)S(x)=x-1.$$

Or $2x^3-x^2+2x-1=(2x-1)(x^2+1)$ *(par lecture attentive des questions suivantes)*, d'où le résultat voulu pour $x$ dans $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right[$.

3. La théorie sur la décomposition en éléments simples des fractions nous permet d'affirmer qu'il existe trois réels $a, b, c$ uniques qui vérifient pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ :

$$S(x)=\frac{x-1}{2x^3-x^2+2x-1}=\frac{x-1}{(2x-1)(x^2+1)}==\frac{a}{2x-1}+\frac{bx+d}{x^2+1}.$$

De plus

➟ $[(2x-1)S(x)]_{x=1/2}=\left\{\begin{array}{l} a \\ -\frac{2}{5}\end{array}\right.$, donc $a=-\frac{2}{5}$.

➟ $[(x^2+1)S(x)]_{x=i}=\left\{\begin{array}{l} c+b\,i \\ \frac{i-1}{2i-1}=-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i\end{array}\right.$, donc $c=-\frac{3}{5}$ et $b=-\frac{1}{5}$.

Ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\},\quad \frac{x-1}{2x^3-x^2+2x-1}=-\frac{2}{5(2x-1)}-\frac{x+3}{5(x^2+1)},$$

Pour tout $x\in\left]-1/2\ ;\ 1/2\right[$,

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{P(x)}&=\frac{x+3}{5\left(x^2+1\right)}-\frac{2}{5\left(2x-1\right)}\\
&=\frac{2}{5}\times\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{5}(x+3)\times\frac{1}{1+x^2}\\
&=\frac{2}{5}\times\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n+\frac{1}{5}(x+3)\times\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{5}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{5}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3(-1)^n}{5}x^{2n}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $x\in\left]-1/2\ ;\ 1/2\right[$,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{5}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{5}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3(-1)^n}{5}x^{2n},$$

ainsi par unicité du développement en série entière sur un intervalle ouvert non vide, on en déduit en identifiant les coefficients de ces deux séries entières que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_{2n} = \frac{2^{2n+1}}{5} + \frac{3}{5}(-1)^n$$
$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n+2}}{5} + \frac{1}{5}(-1)^n$$

ce qui se synthétise en :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n = \frac{1}{5}\left(2^{n+1} + 3\cos(n\frac{\pi}{2}) + \sin(n\frac{\pi}{2})\right),$$

ou encore en

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n &= \frac{1}{5}\left(2^{n+1} + \frac{3}{2}(i^n + (-i)^n) + \frac{1}{2i}(i^n - (-i)^n)\right)\\ &= \frac{1}{5}\left(2^{n+1} + (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i)\, i^n + (\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)(-i)^n\right).\end{aligned}$$

*On aurait aussi pu essayer d'utiliser le corollaire 13.11, en calculant la valeur en 0 des dérivées successives de* $-\frac{2}{5(2x-1)} - \frac{x+3}{5(x^2+1)}$*, mais ça me paraît vraiment lourdingue.*

## Une preuve de la proposition 15.13 *énoncé*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(t) = \mathbb{P}(X=n)t^n$.

- On sait que $\sum^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$, or $\|f_n\|_\infty^{[-1\,;\,1]} = \mathbb{P}(X = n)$, donc la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[-1\,;\,1]$. Comme les $f_n$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on conclut que $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$ est définie et continue sur $[-1\,;\,1]$.
- Comme le rayon de convergence de cette série est $R \geqslant 1$, alors on sait que sa somme $G_X$ est bien $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;\,1[$, et que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

- Les fonctions $f_n$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f_n'(t) = n\mathbb{P}(X=n)t^{n-1}$, donc $\left\|f_n'\right\|_\infty^{[-1\,;\,1]} = n\mathbb{P}(X=n)$.
  - Si $\mathbb{E}(X)$ admet une espérance, alors, $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[-1\,;\,1]$, donc par le théorème de dérivation terme à terme, $G_X$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1\,;\,1]$, et en particulier dérivable en 1.

- Réciproquement, si $G_X$ est dérivable en $1$, alors

$$\frac{G_X(t)-G_X(1)}{t-1} \xrightarrow[t \overset{>}{\longrightarrow} 1]{} G_X'(1).$$

Or pour $t \in [0\ ;\ 1[$,

$$\frac{G_X(t)-G_X(1)}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\sum_{i=0}^{n-1} t^i.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X=n) &= \sum_{n=0}^{N}\left(\lim_{t\to 1}\sum_{i=0}^{n-1} t^i\right)\mathbb{P}(X=n)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\left(\lim_{t\to 1}\frac{G_X(t)-G_X(1)}{t-1}\right)\mathbb{P}(X=n)\\ &= \sum_{n=0}^{N} G_X'(1)\mathbb{P}(X=n) \leqslant G_X'(1)\end{aligned}$$

donc la suite de terme général $\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X=n)$ est croissante et majorée, donc convergente, ce qui prouve que la série $\sum n\mathbb{P}(X=n)$ converge, donc que X a une espérance.

On en déduit que si X admet une espérance, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = G_X'(1).$$

- Si $X^2$ admet une espérance, alors $\left(n^2\mathbb{P}(X=n)\right)$, est sommable, et on sait que $(n\mathbb{P}(X=n))$ aussi (avec $n \leqslant \frac{1+n^2}{2}$), donc $(n(n-1)\mathbb{P}(X=n))$ est sommable.
On en déduit alors comme précédemment que $G_X$ est deux fois dérivable, car $\left\|f_n''\right\|_\infty^{[-1\,;\,1]} = (n(n-1)\mathbb{P}(X=n))$, avec

$$G_X''(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X(X-1)),$$

d'où

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2.$$

Réciproquement, si $G_X$ est deux fois dérivable en 1, alors elle est au moins une fois dérivable en 1, et X admet une espérance.
On sait alors que

$$\forall t \in [-1\;;\;1],\quad G'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n)t^{n-1},$$

et on s'inspire de la preuve précédente pour prouver qu'alors $\Big(n(n-1)\mathbb{P}(X=n)\Big)$ par majoration de $\sum\limits_{n=0}^{N} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)$.
On en déduit que $X(X-1)$ admet une espérance, puis que X admet une variance.

## Une correction de l'exercice 15.9

*énoncé*

- Tout d'abord $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty\;;\;0[$ et $]0\;;\;+\infty[$, comme toute fraction rationnelle sur son ensemble de définition. Puis en composant par l'exponentielle qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on obtient que la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty\;;\;0[$ et $]0\;;\;+\infty[$.
- Comme $-\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$, on en déduit que $e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
  Donc la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

  prolonge notre fonction en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- De plus, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une fraction rationnelle $F_n$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n)}(x) = F_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

  En posant $\square = \frac{1}{|x^2|}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) &= \lim_{x\to 0} F_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{\square\to+\infty} F_n(\pm\square)e^{-\square} \\ &= 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}.\end{aligned}$$

  On en déduit grâce au théorème de la limite de la dérivée que $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ aussi en 0, et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad f^{(n)}(0) = 0.$$

- Raisonnons par l'absurde : si $f$ est développable en série entière en 0, alors on sait qu'elle est la somme de sa série entière de Taylor. Autrement dit, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]-\alpha\,;\,\alpha\right[,\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Or

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f^{(n)}(0) = 0.$$

donc

$$\forall x \in \left]-\alpha\,;\,\alpha\right[,\ \ f(x) = 0,$$

ce qui est faux, car dès que $x \neq 0$, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$.

## Une correction de l'exercice 15.10

*énoncé*

- On sait que la fonction arcsin est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;\,1[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$.
  Donc par le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $x \in \left]-1\,;\,1\right[$,

$$\arcsin(x) = \arcsin(0) + \int_0^x \left(1-t^2\right)^{-1/2} \mathrm{d}\,t.$$

- Or pour tout $t \in ]0\,;\,1[$, $\left|-t^2\right| < 1$, donc grâce au développement en série entière de $(1+\square)^\alpha$,

$$\left(1-t^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-t^2)^n.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\binom{-1/2}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \\
&= \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n\,n!} \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n\,n!} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n\,n!} \times \frac{(2n)!}{2^n\,n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{4^n} \times \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(-1)^n}{4^n} \times \binom{2n}{n},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(1-t^2\right)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \times \binom{2n}{n}(-t^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \times \binom{2n}{n} t^{2n}.
\end{aligned}$$

Enfin, pour tout $x \in\, ]0\,;1[$, le segment entre $0$ et $x$ est inclus dans l'intervalle de convergence $]-1\,;1[$ de la série entière qu'on vient d'obtenir, donc par intégration terme à terme

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) = \arcsin(0) + \int_0^x \left(1-t^2\right)^{-1/2} \mathrm{d}\,t \\
= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \times \binom{2n}{n} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}\,t \\
= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \times \binom{2n}{n} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.
\end{aligned}$$