

Dans ce chapitre, sauf contrordre, X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Rappels et mises au point sur les familles sommables

Partie dénombrable : une partie A de $\mathbb{C}$ est finie ou dénombrable (appelée aussi *partie au plus dénombrable*) lorsqu'il existe une bijection entre A et une partie I de $\mathbb{N}$, on peut alors la noter sous forme de famille $A = (a_i)_{i \in I}$.

Famille sommable : une famille au plus dénombrable $A = (a_i)_{i \in I}$ est dite sommable lorsque $\sum_{i \in I} |a_i|$ est un réel fini.

Dans ce cas la somme $\sum_{i \in I} a_i$ de tous les termes de A est un nombre fini et ne dépend pas de l'ordre de ses termes : on peut noter $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{a \in A} a$.

Sommation par paquets : si $A = (a_i)_{i \in I}$ est une famille sommable, alors pour toute partition $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ de I (réunion de parties deux à deux disjointes),

$$\sum_{a \in A} a = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} a_i \right).$$

(Le théorème du produit de Cauchy est un cas particulier de sommation par paquets).

Théorème de Fubini : si $A = (a_i)_{i \in I}$ et $B = (b_j)_{j \in J}$ sont sommables alors l'ensemble $C = \{a \times b \mid (a, b) \in A \times B\}$ est sommable, et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i \times b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$$

$$\text{ou plus généralement } \sum_{c \in C} c = \left(\sum_{a \in A} a \right) \times \left(\sum_{b \in B} b \right).$$

Remarque 16.1 – Rappel : par définition, si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A})$, alors l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est au plus dénombrable, et c'est une famille sommable de somme $\sum_{x \in X(\Omega)} x = 1$.

2. Suites de variables aléatoires indépendantes

Définition 16.1 – Suites de variables indépendantes, suites i.i.d.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.

→ Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont dites indépendantes lorsque

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

→ On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **une suite de variables aléatoires indépendantes** lorsque n'importe quel choix d'un nombre fini d'entre elles sont indépendantes.

→ On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes et identiquement distribuées**, on parle de **suite i.i.d.**, lorsque c'est une suite de variables indépendantes qui suivent toutes la même loi de probabilité.

Exemple 16.1. Dans un jeu de pile ou face au cours duquel on effectue des lancers successifs d'une pièce, on considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'indicatrice X_n de l'événement « le n -ème lancer donne pile ». Alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite i.i.d.

Exercice 16.1. Soit $(X_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Déterminer pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la loi de $\max(X_1, \dots, X_p)$, et donner son espérance pour $p = 2$ et $p = 3$.

3. Espérance d'une variable aléatoire discrète infinie

Définition 16.2 – Espérance

La variable aléatoire réelle discrète X est dite **d'espérance finie** lorsque la famille $(x \times \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

Dans ce cas, la somme de cette famille est l'*espérance* de X , on la note :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x).$$

Si $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que X est une **variable centrée**.

Chapitre 16. Espérances, variances, résultats asymptotiques

Remarque 16.2 Les variables finies sont évidemment d'espérance finie.

Si $X(\Omega)$ est dénombrable, on peut noter $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi X est d'espérance finie si, et seulement si, la suite $(x_n \mathbb{P}(X = x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, avec dans ce cas

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n).$$

Exercice 16.2. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{a}{(n+1)^2}$. Donner la valeur du réel a . La variable X est-elle d'espérance finie ?

Proposition 16.1 – Espérance des lois infinies usuelles

Si X suit $\mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Proposition 16.2 – La formule d'antirépartition pour une variable à valeurs entières positives

Soit X une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ (autrement dit $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$). La variable X est d'espérance finie si, et seulement si, la suite $(\mathbb{P}(X \geq n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. Dans ce cas $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

Exercice 16.3. On jette 5 dés. Après chaque lancer, on reprend et on relance les dés qui n'ont pas donné d'as jusqu'à ce qu'on obtienne 5 as. On note X le nombre de lancers qu'il a fallu exécuter pour obtenir les 5 as. Calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en déduire l'espérance de X .

Proposition 16.3 – Théorème de transfert pour une variable infinie

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et f une fonction définie sur l'ensemble $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des valeurs de X à valeurs numériques, alors

- la variable $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la suite de terme général $f(x_n) \times \mathbb{P}(X = x_n)$ est sommable,
- dans ce cas $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$.

Exercice 16.4 – Le retour de la série génératrice.

1. Soient X une variable aléatoire, et $t \in \mathbb{R}$, montrer que si t^X est d'espérance finie, alors $\mathbb{E}(t^X) = G_X(t)$.
2. En déduire l'espérance d'une variable qui suit une loi géométrique (resp. de Poisson)

Proposition 16.4 – Inégalité de Markov

Si la variable X est positive et admet une espérance, alors pour tout réel $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Exercice 16.5. Montrer que si X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq (\frac{e}{4})^\lambda$.
(Pour $t \in \mathbb{R}$, on pourra appliquer l'inégalité de Markov à la variable t^X .)

Proposition 16.5 – Autres outils pour conclure qu'une espérance est finie

Par linéarité de l'espérance : si X et Y sont d'espérances finies, alors

→ pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda X + \mu Y$ est aussi d'espérance finie,

→ $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$.

Par domination : si $|X| \leq Y$ et si Y a une espérance finie, alors X a aussi une espérance finie.

Exercice 16.6. On note L^1 l'ensemble des variables (définies sur le même espace probabilisé) d'espérance finie, et L^2 l'ensemble des variables dont le carré est d'espérance finie. Montrer que L^1 et L^2 sont des espaces vectoriels, et qu'en particulier, si $X, Y \in L^2$, alors $XY \in L^1$.

Proposition 16.6 – Produit de variables indépendantes

Si X et Y sont indépendantes et d'espérances finies, alors

→ $X \times Y$ est aussi d'espérance finie,

→ et $\mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

4. Variance et écart-type d’une variable infinie

Proposition 16.7

Si X^2 est d’espérance finie, alors X est elle-même d’espérance finie.

Définition 16.3 – Variance, écart-type

Si X^2 est d’espérance finie, alors la variable $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est aussi d’espérance finie, donc X admet une variance

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E} \left((X - \mathbb{E}(X))^2 \right).$$

L’écart-type de X est alors $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
Lorsque $\sigma(X) = 1$ on dit que X est une **variable réduite**.

Remarque 16.3 Grâce au théorème de transfert, $\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$.

Proposition 16.8 – La formule de König-Huygens

Si X^2 est d’espérance finie alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Remarque 16.4 Ici aussi, grâce au théorème de transfert, $\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X = x) - \mathbb{E}(X)^2$.

Proposition 16.9 – Variance des lois usuelles

Si X suit $\mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$, si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Proposition 16.10 – Variance de $aX + b$

Si X^2 est d’espérance finie, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $(aX + b)^2$ est aussi d’espérance finie, et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.
En particulier, si $\sigma(X) \neq 0$, la variable $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Méthode 16.1 – Comment déterminer une espérance, une variance :

lorsqu'il est demandé de calculer l'espérance et la variance d'une variable X , on est en général dans un des cas suivants :

- (1) la variable X suit une loi usuelle, dans ce cas l'espérance et la variance sont connues ;
- (2) la loi de X ressemble à une loi usuelle mais n'en est pas une : dans ce cas on peut essayer de former une autre variable Y , fonction de X (souvent $Y = aX + b$), qui suit, elle, une loi usuelle, puis on retrouve l'espérance et la variance de X avec celles de Y ;
- (3) la variable X est fonction d'une autre variable, dans ce cas on peut utiliser le théorème de transfert, ou autres formules de l'espérance et de la variance ;
- (4) on se résout à utiliser la loi de X (que l'on détermine le cas échéant) et les définitions de base de l'espérance et de la variance.

Proposition 16.11 – L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X^2 a une espérance finie, alors : $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

5. Covariance

Théorème-définition 16.12 – Covariance

Si X^2 et Y^2 sont d'espérances finies, alors la variable $X \times Y$ est aussi d'espérance finie, on appelle alors **covariance** de X et Y le réel

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \times Y) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).$$

Remarques 16.5

- la covariance est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace vectoriel des variables dont le carré est d'espérance finie ; et $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.
- Si $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ sont finies, grâce à Fubini : $\mathbb{E}(X \times Y) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x \times y \times \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$.
- La covariance est censée nous permettre de juger de l'impact des variations d'une des variables sur les variations de l'autre.
Par exemple, si X ou Y est constante, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$; et si la covariance est négative, on peut dire que l'accroissement de l'une entraîne la décroissance de l'autre.

Corollaire 16.13 – Covariance de deux variables indépendantes

Si X et Y sont deux variables indépendantes telles que X^2 et Y^2 sont d'espérances finies, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Remarque 16.6 – La réciproque est fausse !

Cette proposition permet d'affirmer que si la covariance n'est pas nulle, alors X et Y ne sont pas indépendantes. Mais si la covariance est nulle, on ne peut rien dire.

Par exemple, si la variable X qui suit la loi uniforme sur $[-n ; n]$, et si $Y = X^2$, alors ces deux variables ne sont certes pas indépendantes puisque $\mathbb{P}((X = 0) \cap (X^2 \neq 0)) = 0$, et pourtant leur covariance est nulle puisque $\mathbb{E}(X^3) = \mathbb{E}(X) = 0$, donc

$$\text{Cov}(X, X^2) = \mathbb{E}(X \times X^2) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X^2) = 0 - 0 \times \mathbb{E}(X^2) = 0.$$

On se consolera avec l'exercice ci-dessous qui montre que la réciproque est vraie avec des variables de Bernoulli.

Exercice 16.7. Si X et Y suivent une loi de Bernoulli, montrer que si $\text{Cov}(X, Y) = 0$ alors X et Y sont indépendantes.

Proposition 16.14 – Variance d'une somme

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires dont les carrés ont une d'espérance finie, alors

$$\Rightarrow \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

$$\Rightarrow \text{Si les variables sont deux à deux indépendantes, alors } \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i).$$

6. Résultats asymptotiques

Proposition 16.15 – La loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. selon une loi d'espérance m et de variance σ^2 .

Alors en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, l'**estimation** suivante :

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} S_n - m \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

et par conséquent $\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} S_n - m \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 16.8. Une urne contient une proportion p de boules blanches, et on veut estimer cette proportion. On effectue 500 tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne au cours desquels on a obtenu 50 fois une boule blanche, on estime donc que $p \simeq \frac{1}{10}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\left| p - \frac{1}{10} \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{1}{2000\varepsilon^2}.$$

Une correction de l'exercice 16.1

énoncé

On note $Z = \max(X_1, \dots, X_p)$, alors $Z(\Omega) = \llbracket 1 ; n \rrbracket$, et pour tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leq j) &= \mathbb{P}((X_1 \leq j) \cap \dots \cap (X_p \leq j)) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq j) \times \dots \times \mathbb{P}(X_p \leq j) \text{ (par indépendance des } X_i) \\ &= (\mathbb{P}(X_1 \leq j))^p \text{ (car les } X_i \text{ suivent toutes la même loi)} \\ &= \left(\frac{j}{n}\right)^p \text{ (car } \mathbb{P}(X_1 \leq j) = \frac{\text{nombre de valeurs favorables}}{\text{nombre de valeurs possibles}} = \frac{j}{n})\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}(Z = j) = \left(\frac{j}{n}\right)^p - \left(\frac{j-1}{n}\right)^p.$$

L'espérance existe car la variable est finie, et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{j=1}^n j \times \mathbb{P}(Z = j) = \sum_{j=1}^n j \times \left(\left(\frac{j}{n}\right)^p - \left(\frac{j-1}{n}\right)^p \right) \\ &= \sum_{j=1}^n j \left(\frac{j}{n}\right)^p - \sum_{j=1}^n j \left(\frac{j-1}{n}\right)^p \\ &= \sum_{j=1}^n j \left(\frac{j}{n}\right)^p - \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \left(\frac{j}{n}\right)^p \\ &= \sum_{j=1}^n j \left(\frac{j}{n}\right)^p - \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \left(\frac{j}{n}\right)^p \\ &= \sum_{j=1}^n j \left(\frac{j}{n}\right)^p - \sum_{j=0}^{n-1} j \left(\frac{j}{n}\right)^p - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^p \\ &= n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^p.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} \text{ si } p=2, \\ \mathbb{E}(Z) &= \frac{(n+1)(3n-1)}{4n} \text{ si } p=3.\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 16.2

énoncé

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^n (k\mathbb{P}(X=k)) \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X=k) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \mathbb{P}(X=k) \quad (\text{en vertu des règles d'interversion des signes somme}) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbb{P}(X > i) - \mathbb{P}(X > n)) \\
 &\quad (\text{car } \bigcup_{k=i+1}^n (X=k) = (X > i) \setminus (X > n)) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > i) - n\mathbb{P}(X > n) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > i) + \mathbb{P}(X > n) \\
 &\quad - \mathbb{P}(X > n) - n\mathbb{P}(X > n) \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X > i) - (n+1)\mathbb{P}(X > n)
 \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ Si X admet une espérance, alors la série $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ est absolument convergente, donc le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) &\geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)\mathbb{P}(X=k) \\
 &= (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \\
 &= (n+1)\mathbb{P}(X > n) \geq 0,
 \end{aligned}$$

donc par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)\mathbb{P}(X > n) = 0,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X > i) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) \\ &\quad + (n+1) \mathbb{P}(X > n) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X) + 0 = \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

ce qui prouve que la série $\sum \mathbb{P}(X > k)$ converge et a pour somme $\mathbb{E}(X)$.

⇒ Réciproquement, si la série $\sum \mathbb{P}(X > k)$ converge, alors le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ tend vers 0 d'une part, et d'autre part, le terme général $\mathbb{P}(X > k)$ tend aussi vers 0. On remarque de plus que la suite $(\mathbb{P}(X > k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante car les événements sont emboîtés.

Le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ (qui est une somme de termes positifs) majore en particulier la somme positive $\sum_{k=n+1}^{2n} \mathbb{P}(X > k)$ qui tend donc aussi vers 0 par encadrement.

Or les $\mathbb{P}(X > k)$ forment une suite décroissante, donc

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \mathbb{P}(X > k) &\geq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \mathbb{P}(X > 2n) \\ &= 2n \mathbb{P}(X > 2n) \end{aligned}$$

qui tend aussi vers 0 par domination quand n tend vers $+\infty$.

De la majoration

$$2n \mathbb{P}(X > 2n) \geq 2n \mathbb{P}(X > 2n+1),$$

on déduit que $2n \mathbb{P}(X > 2n+1)$ tend aussi vers 0, mais $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge, donc $\mathbb{P}(X > n)$ tend vers 0, d'où par somme $(2n+1) \mathbb{P}(X > 2n+1)$ tend vers 0.

En rassemblant les termes de rang pair, et les termes de rang impair, on conclut que $n \mathbb{P}(X > n)$ tend vers 0, et finalement que $(n+1) \mathbb{P}(X > n)$ aussi.

Finalement, dans ce cas aussi :

$$\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X > i) - (n+1) \mathbb{P}(X > n)$$

tend vers une limite finie quand n tend vers $+\infty$, donc X est d'espérance finie, et cette limite est égale à $\mathbb{E}(X)$, mais aussi, grâce à l'égalité ci-dessus, à $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > i)$.

D'où le résultat.

Une correction de l'exercice 16.3

énoncé

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(X \leq k)$ est l'événement « chaque dé a donné 6 au plus tard au k -ème lancer ».

Les 5 dés sont identiques, et pour chaque dé, le rang X d'apparition du premier 6 suit $\mathcal{G}(p)$ avec $p = \frac{1}{6}$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq k) &= \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^k p(1-p)^{i-1} = (\dots) = 1 - (1-p)^k.\end{aligned}$$

Ensuite, les 5 dés étant identiques et indépendants,

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \left(1 - (1-p)^k\right)^5.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > k) &= 1 - \left(1 - (1-p)^k\right)^5 \\ &= 1 - \left(1 - 5 \times (1-p)^k + o((1-p)^k)\right) \\ &\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} 5 \times (1-p)^k\end{aligned}$$

Donc, comme $|1-p| < 1$, la série $\sum \mathbb{P}(X > k)$ converge, d'où grâce à la première question, on en déduit que X admet une espérance qui est

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[1 - \left(1 - (1-p)^k\right)^5\right] \\ &= - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} (-1)^i (1-p)^{ki} \right) \\ &= - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} (-1)^i (1-p)^{ki} \right) \\ &= \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} (-1)^{i+1} \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-p)^i]^k \\ &= \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} \frac{(-1)^{i+1}}{1 - (1-p)^i} = (\dots).\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 16.4

énoncé

1. D'après le théorème de transfert, si t^X admet une espérance, alors la suite de terme général $t^n \mathbb{P}(X = n)$ est sommable et

$$\mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \times \mathbb{P}(X = n) = G_X(t).$$

2. Supposons que X suit $\mathcal{G}(p)$, alors on sait que sa série génératrice est définie sur $\left] -\frac{1}{1-p} ; \frac{1}{1-p} \right[$, de somme $t \mapsto \frac{pt}{1-(1-p)t}$.

Cette fonction est dérivable sur son intervalle de convergence, qui contient 1, donc on peut affirmer que X admet une espérance qui est égale à $G'_X(1)$.

Or pour tout $t \in \left] -\frac{1}{1-p} ; \frac{1}{1-p} \right[$,

$$G'_X(t) = \frac{p \times (1 - (1-p)t) - (pt) \times (-(1-p))}{(1 - (1-p)t)^2},$$

donc

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{1}{p}.$$

De la même manière si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, et $G'_X(1) = \lambda e^{\lambda(1-1)} = \lambda = \mathbb{E}(X)$.

Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, autrement dit $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on remarque que $v_n = e^{tn} \mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{tn} e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$ est strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\lambda e^t}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc d'après le critère de d'Alembert la suite de terme général $e^{tn} \mathbb{P}(X = n)$ est sommable, donc par le théorème de transfert e^{tX} a une espérance qui vaut

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tX}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} \mathbb{P}(X = n) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \times e^{\lambda e^t} \\ &= e^{\lambda(e^t - 1)}. \end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 16.4

énoncé

Pour tout réel $t > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X=x) = \sum_{x \in X(\Omega) | x < t} x \mathbb{P}(X=x) + \sum_{x \in X(\Omega) | x \geq t} x \mathbb{P}(X=x) \\ &\geq \sum_{x \in X(\Omega) | x \geq t} x \mathbb{P}(X=x) \quad (\text{car les valeurs } x \text{ de } X \text{ sont positives}) \\ &\geq \sum_{x \in X(\Omega) | x \geq t} t \mathbb{P}(X=x) = t \times \sum_{x \in X(\Omega) | x \geq t} \mathbb{P}(X=x) = t \mathbb{P}(X \geq t). \end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue.

Une correction de l'exercice 16.5

énoncé

(1) Notons $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ la fonction génératrice de X .

⇒ On commence par montrer que pour tout $t \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}.$$

Méthode 1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$. L'inégalité de Markov appliquée à la variable positive t^X et au réel $t^{2\lambda}$ donne $\mathbb{P}(t^X \geq t^{2\lambda}) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}$. Or si $t \geq 1$, l'application $x \mapsto t^x$ est croissante, donc $\{X \geq 2\lambda\} \subset \{t^X \geq t^{2\lambda}\}$, et ainsi,

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \mathbb{P}(t^X \geq t^{2\lambda}) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}.$$

Méthode 2. Soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\lambda\}$. Alors pour tous $k \geq n_0$ et $t \geq 1$, on a $t^k \geq t^{2\lambda}$, et ainsi

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \leq \frac{1}{t^{2\lambda}} \sum_{k=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) t^k \leq \frac{1}{t^{2\lambda}} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) t^k = \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}.$$

⇒ On a donc, pour tout $t \geq 1$, $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = \left(\frac{e^{t-1}}{t^2}\right)^\lambda$. Et une étude de la fonction $g : t \mapsto \frac{e^{t-1}}{t^2}$ sur $[1; +\infty[$ montre qu'elle est minimale en $t_0 = 2$, avec $g(2) = \frac{e}{4}$. On a donc en particulier,

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq g(2)^\lambda = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

Une preuve de la proposition 16.6

énoncé

Les variables X et Y sont d'espérances finies, donc $(x\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ et $(y\mathbb{P}(Y=y))_{y\in Y(\Omega)}$ sont sommables, ainsi le théorème de Fubini permet d'affirmer que $(x\mathbb{P}(X=x) \times y\mathbb{P}(Y=y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable, c'est-à-dire, $(x \times y \times \mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ car X et Y sont indépendantes. Ainsi d'après le théorème de transfert, $X \times Y$ est d'espérance finie, et de nouveau avec Fubini :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \times Y) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x \times y \times \mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) \times \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y=y) \\ &= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \text{ c.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 16.7

énoncé

Il suffit d'utiliser une fois de plus l'inégalité arithmético-géométrique qui permet d'écrire $|X| \leq \frac{1}{2}(X^2 + 1)$, et comme la variable certaine égale à 1 est d'espérance finie, ainsi que X^2 , alors on conclut par linéarité et domination.

Une preuve de la proposition 16.8

énoncé

Il suffit d'appliquer la linéarité de l'espérance à la définition de la variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.

Une preuve de la proposition 16.13

énoncé

C'est une conséquence directe de la proposition 16.4.

Une correction de l'exercice 16.7

énoncé

Si X et Y suivent des lois de Bernoulli, alors

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X=1), \text{ et } \mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y=1).$$

De plus, dans la somme

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x \times y \times \mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)),$$

il n'y a que quatre termes, dont trois sont nuls, et il ne reste que

$$\mathbb{E}(XY) = 1 \times 1 \times \mathbb{P}((X=1) \cap (Y=1)) = \mathbb{P}((X=1) \cap (Y=1)).$$

Ainsi

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1),$$

ce qui entraîne que les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont indépendants (relativement à la probabilité $\mathbb{P}$). Mais on sait que par conséquent les événements $(X = 0)$ et $(Y = 1)$, $(X = 1)$ et $(Y = 0)$, ainsi que $(X = 0)$ et $(Y = 0)$ sont aussi indépendants, ce qui achève de prouver que les variables X et Y sont indépendantes.

Une correction de l'exercice 16.8

énoncé

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; 500 \rrbracket$, on note X_i la variable indicatrice de l'événement « le i^{e} tirage donne une boule blanche ». Les tirages se font avec remise, donc les X_i sont mutuellement indépendantes, et a fortiori deux à deux indépendantes. De plus, elles suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, d'espérance p et de variance $\sigma^2 = p(1 - p)$

Notons $S = \sum_{i=1}^{500} X_i$ (on remarque en passant que S suit $\mathcal{B}(500, p)$), alors la loi faible des grands nombres nous dit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{500}S - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{500\varepsilon^2},$$

donc en prenant l'événement contraire

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{500}S - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{500\varepsilon^2}.$$

Mais $p(1-p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, d'où

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{500}S - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{2000\varepsilon^2}.$$