Dans tout ce chapitre, A et I désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point.

1. Rappels

Intégrabilité d'une fonction sur un intervalle :

Une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est dite **intégrable** sur I lorsque
- f est continue par morceaux sur I,
- $\int_{\mathrm{I}} |f|$ converge.

Le (premier) critère de comparaison :

Si
- f et g sont continues par morceaux sur I,
- $\forall t \in \mathrm{I},\ |f(t)| \leqslant |g(t)|$,

alors l'intégrabilité de g sur I implique celle de f.

La caractérisation séquentielle de la limite :

Soit f une application définie sur un ensemble A, et a un élément adhérent à A (autrement dit a est limite d'une suite d'éléments de A).

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f a pour limite b en a, autrement dit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;

(ii) **pour toute** suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

Le théorème de convergence dominée : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur l'intervalle I.

Si
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I ;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
- la limite $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est elle aussi continue par morceaux sur I ;
- **(hypothèse de domination)** il existe une fonction φ **intégrable** sur I, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathrm{I}$: $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors
- les fonctions f_n, ainsi que $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, sont intégrables sur I,
- et $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{\mathrm{I}} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$.

(mis à jour le 27 janvier 2025)

2. Nouveau théorème de la double limite

Proposition 17.1 – Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Si
- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(x,t) \xrightarrow[x \longrightarrow \square]{} \ell(t)$;
- pour tout $x \in \mathrm{A}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- $t \mapsto \ell(t)$ est elle aussi continue par morceaux sur I ;
- **(hypothèse de domination)** il existe une fonction φ **intégrable** sur I, telle que pour tout $(x,t) \in \mathrm{A} \times \mathrm{I}$: $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors
- les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ pour tout $x \in \mathrm{A}$, ainsi que la fonction ℓ, sont intégrables sur I,
- $\displaystyle\lim_{x \to \square} \int_{t \in \mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_{t \in \mathrm{I}} \lim_{x \to \square} f(x,t)\mathrm{d}t$, autrement dit

$$\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x \longrightarrow \square]{} \int_{\mathrm{I}} \ell(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 17.1 – Transformée de Stieltjes *(qui saura prononcer correctement ce nom ?)*.
Soit f une fonction intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Déterminer

$$\lim_{s \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{s f(u)}{u+s} \mathrm{d}u.$$

3. Régularité d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre

Dans toute la suite, $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ est une fonction définie sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse à la régularité sur A *(continuité, caractère $\mathscr{C}^p$ ou $\mathscr{C}^\infty$)* de la fonction

$$\varphi : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_{t\in\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 17.1 – « Sur tout segment » ou autres...

Rappelons que la continuité, la dérivabilité, le caractère $\mathscr{C}^k$ ou $\mathscr{C}^\infty$ d'une fonction sont des propriétés locales. Par conséquent, si une fonction a l'une de ces propriétés sur toute partie A_i d'un recouvrement $\mathrm{A} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$, alors elle conserve cette propriété sur A.

Par exemple :
- si f est continue sur $[a\ ;+\infty[$ pour tout $a>0$, alors f est continue sur $]0\ ;+\infty[$,
- si f est $\mathscr{C}^\infty$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, alors f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17.2 – - La fonction Gamma d'Euler.

1. Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, est définie sur $\mathrm{A} =]0\ ;+\infty[$.
2. Montrer que pour tout réel $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Que valent $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$?

3.1. Continuité

Étudier la continuité de la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_{t\in\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ sur A, revient à étudier cette continuité en tout point a de A, où on se demande si $\lim_{x\to a} \Phi(x) \overset{?}{=} \Phi(a)$.

Autrement dit, on se demande si $\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t \boxed{\xrightarrow[x\to a]{?}} \int_{\mathrm{I}} f(a,t)\mathrm{d}t$.

Lorsque de plus pour tout $t\in\mathrm{I}$, la fonction $f_t : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A, alors $f(a,t) = \lim_{x\to a} f(x,t)$, donc étudier la continuité de Φ en a revient à se demander si

$$\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t \boxed{\xrightarrow[x\to a]{?}} \int_{\mathrm{I}} \lim_{x\to a} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 17.2 – Continuité d'une intégrale à paramètre

Si
- f est continue par rapport à x sur A, autrement dit pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- f est continue par morceaux par rapport à t sur I, autrement dit pour tout $x \in \mathrm{A}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- **(hypothèse de domination)** : il existe une fonction φ **intégrable** sur I, telle que $\forall (x,t) \in \mathrm{A} \times \mathrm{I},\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors
- pour tout $x \in \mathrm{A}$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,
- la fonction $x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Exercice 17.3 – Transformée de Fourier.
Montrer que si f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors sa **transformée de Fourier** $\varphi = x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarques 17.2

(1) Vérifier l'hypothèse de domination consiste à fixer un réel $t \in \mathrm{I}$ quelconque, et à majorer sur A la fonction $x \mapsto |f(x,t)|$ par un réel $\varphi(t)$ qui définit une fonction intégrable sur I.

> *Dans le cas où* I *est un segment, un réel constant fait l'affaire comme pour la fonction* $x \mapsto \int_0^{\pi} \sin(xt)\mathrm{d}t$.

(2) Cette hypothèse de domination entraîne, par domination, l'intégrabilité sur I de toutes les fonctions $f_x : t \mapsto f(x,t)$, pour tout $x \in \mathrm{A}$.

Méthode 17.1 – Quand on ne parvient pas à dominer f sur tout l'intervalle A :

> *on peut se contenter, en vertu de la remarque 17.1, de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment de* A*, voire toute partie* A_i *d'un recouvrement* $\mathrm{A} = \bigcup\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$.
> *Pour cela, on vérifie que pour toute partie* A_i*, il existe une fonction* φ_i ***intégrable*** *sur* I*, telle que* $\forall (x,t) \in \mathrm{A}_i \times \mathrm{I},\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_i(t)$.

Exercice 17.4 – Et allez ! Encore la fonction Γ d'Euler !.

Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

3.2. Dérivabilité

On se pose ici la question de savoir si « la dérivée (par rapport à x) de l'intégrale est égale à l'intégrale de la dérivée (par rapport à x) », c'est encore le théorème de **convergence dominée** qui est l'outil principal.

Proposition 17.3 – Dérivation d'une intégrale à paramètre

Si
- Pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in \mathrm{A}$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in \mathrm{A}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- **(domination de la dérivée) :** il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que
$$\forall (x,t) \in \mathrm{A}\times\mathrm{I},\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

alors la fonction $\Phi : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, et
$$\forall x \in \mathrm{A},\quad \Phi'(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 17.5. Justifier pour tout réel x l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Calculer sa valeur à l'aide d'une dérivation sous le signe somme que l'on justifiera.

Remarques 17.3

(1) Ici aussi, comme pour la continuité, si on n'arrive pas à dominer la dérivée sur tout A, on peut vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment de A, voire toute partie d'un recouvrement de A.

(2) Rappelons que l'intégrabilité sur I de $t \mapsto f(x,t)$ (deuxième condition) nécessite en particulier que cette même fonction soit continue par morceaux sur I.

(3) L'intégrabilité sur I de $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est ici aussi une conséquence de l'hypothèse de domination, avec la continuité par morceaux donnée par la 3e condition.

Exercice 17.6 – Enfin un calcul de l'intégrale de Gauss !

1. Vérifier que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que $x \mapsto \mathrm{F}(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ est constante sur $\mathbb{R}$. Que vaut cette constante ?
3. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{F} = 0$, et en déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Corollaire 17.4 – Extension au caractère $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Si
- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A ;
- pour tous $j \in [\![0, k-1]\!]$ et $x \in \mathrm{A}$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in \mathrm{A}$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- **(domination de la dernière dérivée)** : il existe φ intégrable sur I, telle que :

$$\forall (x,t) \in \mathrm{A} \times \mathrm{I}, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

alors la fonction $\Phi : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A, et

$$\forall j \in [\![0\ ;\ k]\!], \quad \forall x \in \mathrm{A}, \quad \Phi^{(j)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 17.4 Ici aussi on peut se contenter de vérifier l'hypothèse de domination de la dernière dérivée sur tout segment de A, voire toute partie d'un recouvrement de A.

Exercice 17.7.

1. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
2. Justifier que l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0\ ;\ +\infty[$, et de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Corollaire 17.5 – Généralisation : Caractère $\mathscr{C}^\infty$ d'une intégrale à paramètre

Si
- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A ;
- pour tout $x \in \mathrm{A}$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathrm{A}$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- **(domination de toutes les dérivées)** : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe φ_k intégrable sur I, telle que :

$$\forall (x,t) \in \mathrm{A} \times \mathrm{I}, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_k(t),$$

alors la fonction $\Phi : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}\,t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A, et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathrm{A}, \quad \Phi^{(k)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}\,t.$$

Remarque 17.5 – (sempiternelle)
Ici aussi on peut se contenter de vérifier l'hypothèse de domination, pour toutes les dérivées, sur tout segment de A, voire toute partie d'un recouvrement de A.

Exercice 17.8. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 17.9 – Transformée de Fourier (bis).
Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^k f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

1 Montrer que la fonction $t \mapsto \exp(-t^2/2)$ appartient à E.

2 Soient $f \in \mathrm{E}$ et $g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx} f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Une preuve de la proposition 17.1 *énoncé*

Supposons que $\square$ est adhérent à A, ce qui recouvre aussi bien le cas où $\square$ est une extrémité, éventuellement infinie, de A, que le cas où $\square$ est un élément de A.
Supposons que les quatre conditions de la proposition sont vraies.
Pour montrer que

$$\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\longrightarrow\square]{} \int_{\mathrm{I}} \ell(t)\mathrm{d}\,t,$$

il suffit de montrer, grâce à la caractérisation séquentielle de la limite, que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers $\square$

$$\int_{\mathrm{I}} f(x_n,t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_{\mathrm{I}} \ell(t)\mathrm{d}\,t.$$

Prenons donc une suite quelconque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers $\square$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons f_n la fonction $t\mapsto f_n(t)=f(x_n,t)$.
Alors

- → pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in\mathrm{A}$, donc par hypothèse la fonction $f_n : t\mapsto f(x_n,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- → pour tout $t\in\mathrm{I}$, $f(x,t)\xrightarrow[x\longrightarrow\square]{}\ell(t)$, donc par composition des limites, $f_n(t) = f(x_n,t)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\ell(t)$.
  Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $\ell : t\mapsto \ell(t)$;
- → la limite $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est elle aussi continue par morceaux sur I par hypothèse ;
- → par hypothèse, il existe une fonction φ **intégrable** sur I, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathrm{I}$: $|f_n(t)|=|f(x_n,t)|\leqslant\varphi(t)$;

donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée, qui nous permet de conclure que la fonction ℓ est intégrable sur I (les fonctions $t\mapsto f(x,t)$ le sont aussi par domination), et que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{I}} f(x_n,t)\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{I}}\ell(t)\mathrm{d}t.$$

Donc ceci étant vrai pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui tend vers $\square$, on peut conclure par caractérisation séquentielle de la limite que

$$\lim_{x\to\square}\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{I}}\ell(t)\mathrm{d}t,\quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 17.1 *énoncé*

Posons pour tout $(s,u) \in]0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[$, $\varphi(s,u) = \frac{sf(u)}{u+s}$.

- Pour tout $u \in [0\,;+\infty[$,
$$\frac{sf(u)}{u+s} \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{sf(u)}{s} = f(u) \xrightarrow[s\longrightarrow+\infty]{} f(u).$$
- Pour tout $s \in]0\,;+\infty[$, $u \mapsto \frac{sf(u)}{u+s} = f(u) \times \frac{s}{u+s}$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ car f l'est en tant que fonction intégrable sur $]0\,;+\infty[$, et $u \mapsto \frac{s}{u+s}$ l'est aussi.
- Pour tout $s \in]0\,;+\infty[$, $u \mapsto f(u)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ comme on vient de le voir.
- Pour tout $s \in]0\,;+\infty[$ et tout $u \in [0\,;+\infty[$,
$$\left|\frac{sf(u)}{u+s}\right| \leqslant |f(u)|,$$
et par hypothèse f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$, ce qui revient à dire que $|f|$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

donc le théorème de convergence dominée à paramètre continu permet de conclure que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{s\,f(u)}{u+s}\mathrm{d}u \xrightarrow[s\longrightarrow+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u.}$$

Une correction de l'exercice 17.2 *énoncé*

(1) Soit x un réel.

- La fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
- Par croissances comparées $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est une fonction de Riemann intégrable sur $[1\,;+\infty[$, donc par domination, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est aussi intégrable sur $[1\,;+\infty[$, d'où la convergence de $\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\,t$.
- $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, or la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0\,;1]$, donc par équivalence $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est aussi intégrable sur $]0\,;1]$. Comme cette fonction est positive sur $]0\,;1]$, son intégrabilité équivaut à la convergence *(sans valeur absolue)* de son intégrale, donc $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\,t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$ converge si, et seulement si, $x > 0$, autrement dit $\Gamma(x)$ est défini pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, ou encore la fonction Γ est définie sur $]0\,;+\infty[$.

(2) Soit $x > 0$. Les fonctions u et v définies par $u(t) = t^x$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, et de plus

$$t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} 0, \text{ car } x > 0,$$
$$t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\longrightarrow +\infty]{} 0, \text{ par croissances comparées,}$$

donc en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t &= \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = x\Gamma(x), \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

(3) Pour $n = 1$,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = 1 = (1-1)!$$

Puis, si pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, alors au rang suivant, grâce à la question précédente,

$$\Gamma(n+1) = n \times \Gamma(n) = n \times (n-1)! = n!$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u}\mathrm{e}^{-u^2}2u\mathrm{d}u \quad \textit{(en posant } u = \sqrt{t}\textit{, c'est-à-dire } t = u^2\textit{)} \\ &= 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi} \quad \textit{(si on connaît la valeur de l'intégrale de Gauss).}\end{aligned}$$

Une preuve de la proposition 17.2 *énoncé*

Il suffit d'appliquer la proposition 17.2 pour $\square$ étant égal à un réel a de A.
La fonction $x \mapsto f(x,t)$ étant continue sur A pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a

$$f(x,t) \xrightarrow[x\longrightarrow a]{} f(a,t),$$

donc $\ell(t) = f(a,t)$, et les autres conditions de la proposition 17.2 sont vérifiées, donc

$$\Phi(x) = \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\longrightarrow a]{} \int_{\mathrm{I}} \ell(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} f(a,t)\mathrm{d}t = \Phi(a).$$

Ainsi Φ est continue en a pour tout $a \in \mathrm{A}$, autrement dit Φ est continue sur A.

Une correction de l'exercice 17.3 *énoncé*

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t)\mathrm{e}^{itx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car l'exponentielle l'est aussi ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{itx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f et l'exponentielle le sont aussi ;
- Pour tout réel t et tout réel x,

$$\left|f(t)\mathrm{e}^{itx}\right| = |f(t)| \times \left|\mathrm{e}^{itx}\right| = |f(t)|,$$

  or on sait que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On peut donc appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Une correction de l'exercice 17.4 *énoncé*

- Pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, $x \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0\,;+\infty[$;
- pour tout $x > 0$, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$;
- pour tout $t \in]0\,;+\infty[$,

> *La fonction $x \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, de dérivée $x \mapsto \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, qui est du signe de $\ln(t)$, qui elle-même est du signe de $t-1$.*
> *Ainsi, si $t \geqslant 1$, $x \mapsto f(x,t)$ est décroissante (et positive) sur $]0\,;+\infty[$ de borne supérieure $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$, si $t \geqslant 1$, $x \mapsto f(x,t)$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$ si $t \leqslant 1$, et n'a pas de borne supérieure car tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.*
> *On n'arrive donc pas à majorer $x \mapsto |f(x,t)|$ sur $]0\,;+\infty[$ par $\varphi(t)$ qui définirait une fonction intégrable sur $]0\,;+\infty[$.*
> *On se résigne donc à prendre x dans un segment quelconque $\mathrm{K} = [a\,;b]$ inclus dans $]0\,;+\infty[$.*

Soit $\mathrm{K} = [a\,;b] \subset\,]0\,;+\infty[$.

- Si $t \leqslant 1$, $x \mapsto f(x,t) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t}$ est décroissante (et positive) sur $[a\,;b]$ de borne supérieure $t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}$ inférieure à $\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)\mathrm{e}^{-t}$,
- si $t \geqslant 1$, et $x \mapsto f(x,t) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t}$ est croissante sur $[a\,;b]$ si $t \leqslant 1$ (et positive) de borne supérieure $t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}$, inférieure aussi à $\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)\mathrm{e}^{-t}$.

En bref, pour tout $t \in\,]0\,;+\infty[$, et $x \in \mathrm{K} = [a\,;b]$,

$$\left|t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant \varphi_{\mathrm{K}}(t) = \left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)\mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction φ_{K} est intégrable sur $]0\,;+\infty[$, car

- elle est continue sur cet intervalle,
- $\varphi_{\mathrm{K}}(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{a-1}+t^{b-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$ avec $1-a<1$,
- $\varphi_{\mathrm{K}}(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre permet de conclure que Γ est continue sur tout segment de $]0\,;+\infty[$, donc continue sur $]0\,;+\infty[$.

Une preuve de la proposition 17.3 *énoncé*

Supposons que les 4 conditions de la proposition sont réunies :

- Pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in \mathrm{A}$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in \mathrm{A}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- **(domination de la dérivée) :** il existe une fonction φ intégrable sur A, telle que $\forall (x,t) \in \mathrm{A}\times\mathrm{I}, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$

et montrons que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A de dérivée $x \mapsto \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$, autrement dit montrons que :

(i) pour tout $a \in \mathrm{A}$,

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(a)}{x-a} \xrightarrow[x \xrightarrow{\neq} a]{} \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\mathrm{d}t$$

(ii) la dérivée $\Phi' : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur A.

- Tout d'abord, la première condition nous donne la continuité pour tout $t \in \mathrm{I}$ de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur A, et avec la troisième et la quatrième condition, on peut appliquer la proposition 17.2 de continuité des intégrales à paramètre qui nous permet de conclure que $x \mapsto \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur A.
Donc le point (i i) est établi.
- Pour le point (i), prenons a quelconque dans A, alors avec la linéarité de l'intégrale, pour tout $x \in \mathrm{A}\setminus\{a\}$,

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(a)}{x-a} = \int_{\mathrm{I}} \frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}\mathrm{d}t$$

et on doit montrer que cette quantité tend vers $\int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\mathrm{d}t$ quand $x \to a$.
On va appliquer la caractérisation séquentielle de la limite : prenons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque de réels de A différents de a qui converge vers a, alors

$$\frac{\Phi(x_n)-\Phi(a)}{x_n-a} = \int_{\mathrm{I}} \frac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a}\mathrm{d}t.$$

Notons enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(t) = \frac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a}.$$

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I car f est continue par morceaux sur I par rapport à t ;

(2) pour tout $t \in \mathrm{I}$, $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur A, donc dérivable en a :

$$\frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x} f(a,x),$$

d'où par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{\partial f}{\partial x} f(a,x)$, ce qui prouve la convergence simple sur I de la suite des fonctions f_n vers la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} f(a,x)$.

(3) Par la condition (4), il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x} f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

On applique alors l'inégalité des accroissements finis à la fonction dérivable $x \mapsto f(x,t)$:

$$\forall (u,v) \in \mathrm{A}^2, |f(u,t)-f(v,t)| \leqslant \varphi(t) \times |u-v|,$$

et en particulier à partir d'un certain rang, en prenant $u = x_n$ et $v = a$,

$$|f(x_n,t)-f(a,t)| \leqslant \varphi(t) \times |x_n - a|,$$

et comme les x_n sont différents de a, ceci équivaut à

$$\left|\frac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a}\right| \leqslant \varphi(t),$$

autrement dit

$$|f_n(t)| \leqslant \varphi(t),$$

qui réalise l'hypothèse de domination du théorème de convergence dominée.

On peut donc appliquer ce théorème de convergence dominée, qui nous permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\Phi(x_n)-\Phi(a)}{x_n-a} = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x} f(a,t)\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, ceci est vrai pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque de réels de A différents de a qui converge vers a, donc par la caractérisation séquentielle de la limite, on peut conclure que

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} a} \frac{\Phi(x)-\Phi(a)}{x-a} = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x} f(a,t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 17.5 *énoncé*

Pour tous $t \in]0\ ;+\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$.

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ est continue sur $]0\ ;+\infty[$.
- On sait que $\sin(xt) \underset{t\to 0}{\sim} xt$, donc

$$\frac{\sin(xt)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{xt}{t}e^{-0} = x \underset{t\to 0}{=} \underset{t\to 0}{O}(1),$$

  or $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0\ ;1]$, donc par domination $t \mapsto f(x,t)$ est aussi intégrable sur $]0\ ;1]$.
- D'autre part,

$$f(x,t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{-t}\right),$$

  or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1\ ;+\infty[$, donc par domination $t \mapsto f(x,t)$ est aussi intégrable sur $[1\ ;+\infty[$.

  > *On aurait aussi pu utiliser l'inégalité de convexité $|\sin(\square)| \leqslant |\square|$ valable pour tout $\square \in \mathbb{R}$, et établir que pour tous x et t dans $]0\ ;+\infty[$,*
  >
  > $$|f(x,t)| \leqslant |x| \times e^{-t},$$
  >
  > *ce qui nous donne directement par domination l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$.*

On en conclut que pour tout réel x, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\ ;+\infty[$, donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\,dt$$

existe.

(2)
- Pour tout réel $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{t\cos(xt)}{t}e^{-t} = \cos(xt)e^{-t}.$$

- On a déjà vu au-dessus que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\ ;+\infty[$.
- Pour tout réel x, $t \mapsto \cos(xt)e^{-t}$ est continue sur $]0\ ;+\infty[$,

➟ et de plus, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\cos(xt)e^{-t}\right| \leqslant e^{-t},$$

où $t\mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

On en conclut, grâce au théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale, que $\phi : x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\phi' : x\mapsto \int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}\,dt.$$

(3) Or pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty}\mathbb{R}\mathrm{e}\left(e^{ixt}\right)e^{-t}\,dt\\
&= \int_0^{+\infty}\mathbb{R}\mathrm{e}\left(e^{-t}\times e^{ixt}\right)dt\\
&= \int_0^{+\infty}\mathbb{R}\mathrm{e}\left(e^{-(1-ix)t}\right)dt\\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(1-ix)t}\,dt\right) \quad \textit{(car } t\mapsto e^{-t(1-ix)} \textit{ converge, vu que } \mathbb{R}\mathrm{e}(1-ix)=1>0\textit{)}\\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{1+ix}{1+x^2}\right)\\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, comme ϕ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, grâce au théorème fondamental de l'analyse, on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \phi(0) + \int_0^x \phi'(t)\,dt\\
&= \phi(0) + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\\
&= \phi(0) + \arctan(x)\\
&= \arctan(x) \quad \textit{(car } \phi(0) = \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0\textit{)},
\end{aligned}$$

donc pour tout réel x,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\,dt = \arctan(x).$$

Une correction de l'exercice 17.6 énoncé

1. Pour tout réel x, $t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0 ; 1]$, donc intégrable sur cet intervalle, d'où l'existence de $F(x)$.

2. ➟ Pour tout réel $t \in [0 ; 1]$, $x \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

➟ On a vu dans la première question que pour tout réel x, $t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0 ; 1]$.

➟

> *Difficile de majorer $2xe^{-x^2(1+t^2)}$ par une fonction indépendante de x, pour x qui parcourt tout $\mathbb{R}$, donc on se rabat sur le cas où x est dans un segment $[-a ; a]$, avec $a > 0$, de $\mathbb{R}$.*

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a ; a]$ et tout réel $t \in [0 ; 1]$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right)\right| = 2|x|e^{-x^2(1+t^2)} \leqslant 2a,$$

et la fonction constante $t \mapsto 2a$ est intégrable sur le segment $[0 ; 1]$.

donc le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous permet de conclure que F est $\mathscr{C}^1$ sur $[-a ; a]$ pour tout $a > 0$, donc qu'elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus pour tout réel x,

$$F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, comme $u \mapsto e^{-u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-u^2}\,du$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto e^{-x^2}$, d'où la fonction $\phi : x \mapsto F(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$\phi'(x) = F'(x) + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}'(x) &= -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}x\,\mathrm{d}t \\
&= -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \ \ \textit{(en posant } u = xt\textit{)}
\end{aligned}$$

donc pour tout réel x, $\phi'(x) = 0$, ce qui prouve que ϕ est constante.

La constante vaut $\phi(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0\ ;\ 1]$,

$$\begin{aligned}
&(1+t^2) \geqslant 1 \\
\text{donc }& -x^2(1+t^2) \leqslant -x^2 \ \ \textit{(car } -x^2 \leqslant 0\textit{)} \\
\text{d'où }& 0 < \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \ \ \textit{(par croissance de l'exponentielle)} \\
\text{puis }& 0 < \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+t^2} \ \ \textit{(car } \tfrac{1}{1+t^2} > 0\textit{)} \\
\text{et enfin }& 0 < \mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \times \frac{\pi}{4} \ \ \textit{(par croissance de l'intégrale).}
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{e}^{-x^2} \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 0$, on en déduit par encadrement que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 0.$$

Ceci, avec le résultat de la question précédente, entraîne que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

autrement dit

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et par parité de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

Une correction de l'exercice 17.7 *énoncé*

1. → La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$ comme rapport de deux fonctions continues sur $]0 ; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

> *Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle* I*, il faut toujours commencer par étudier la continuité de cette fonction sur* I*, car c'est une condition nécessaire pour être intégrable et ça permet de savoir en quelles bornes de* I *se posent les problèmes !*

→ On connaît le développement limité de cos en 0

$$\cos(t) \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2),$$

qui nous donne

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2} + o(1) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2},$$

or $t \mapsto \frac{1}{2}$ est intégrable sur $]0 ; 1]$, donc par équivalence φ est aussi intégrable sur $]0 ; 1]$.

> *On aurait aussi pu en déduire que* φ *est prolongeable par continuité sur* $[0 ; +\infty[$*, et par conséquent intégrable sur* $]0 ; 1]$.
> *Bien retenir que toute fonction prolongeable par continuité sur* $[a ; b]$ *est intégrable sur* $]a ; b[$.

→ Pour tout $t > 0$,

$$|\varphi(t)| \leqslant \frac{2}{t^2},$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$, donc comparaison, φ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

On peut alors conclure que φ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$ par $f : (x,t) \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$.

➟ Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, car la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$ aussi.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-xt}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}.$$

➟ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, je vous laisse détailler que $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $]0;+\infty[$.

➟ Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Pour $x \in [a\,;\,b]$, $t \in]0\,;+\infty[$, et $k \in \{0,1,2\}$, $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} t^k \mathrm{e}^{-at}$. La fonction $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} t^k \mathrm{e}^{-at}$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, prolongeable par continuité en 0, et négligeable devant $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ en $+\infty$ car par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^k \mathrm{e}^{-at} = 0$.

Comme on sait grâce à la question 1 que $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$, par comparaison, $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} t^k \mathrm{e}^{-at}$ l'est aussi.
On a donc prouvé dans le même élan que

- pour tout $x \in [a\,;\,b]$, par domination, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont intégrables sur $]0\,;+\infty[$;
- pour tout $x \in [a\,;\,b]$ et $t \in]0\,;+\infty[$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-at}$, avec $t \mapsto (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-at}$ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous permet alors de conclure que $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur tout segment $[a\,;\,b]$ de $]0\,;+\infty[$, donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$.

Une preuve de la proposition 17.5 *énoncé*

Il suffit de constater que, dans les hypothèses de ce corollaire, le corollaire 17.4 s'applique pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc que Φ est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, autrement dit Φ est $\mathscr{C}^\infty$.

Une correction de l'exercice 17.8 *énoncé*

➟ Pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, $x \mapsto f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0\,;+\infty[$ de dérivées successives

$$x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln(t))^k\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

➟ On a vu dans l'exercice 17.2 que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

➟ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln(t))^k\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$;

➟ Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $x \in [a\,;\,b] \subset]0\,;+\infty[$, et tout $t \in]0\,;+\infty[$,

$$\left|\ln(t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant \ln(t)^k \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right)\mathrm{e}^{-t} \quad \textit{(voir l'exercice 17.4)}$$

et $t \mapsto \ln(t)^k \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car *(en bref)* :

- elle est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$,
- $\ln(t)^k \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) \mathrm{e}^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} \ln(t)^k t^{a-1} + t^{b-1} \underset{t \to 0}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{1-a/2}}\right)$,
- $\ln(t)^k \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) \mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Ainsi par généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètre, on peut conclure que la fonction Γ est $\mathscr{C}^\infty$ sur tout segment $[a\,;b]$ de $]0\,;+\infty[$, donc que Γ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.