Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 18.1 – Équation différentielle linéaire du premier ordre

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre**, une équation du type :

$$(\mathrm{E}) : \quad y' + a(x)\,y = b(x),$$

(fonctions continues)
(coefficient= 1)

où a et b des applications **continues** sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On appelle **solution de** (E) **sur** I toute fonction f, dérivable sur I, et telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$.

Remarque 18.1 – Équations normalisées
Dans cette définition, le coefficient de y' vaut 1, et les fonctions a et b sont continues : on dit que l'équation est **normalisée** en y'.
Sinon, une équation de la forme $(\mathrm{E}) : \alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0$, se ramène à une équation normalisée sur les intervalles où α, β, γ sont continues, et où α ne s'annule pas.

> ⚠ *Les théorèmes de ce chapitre sont relatifs à des équations* ***normalisées*** *à* ***coefficients continus*** *!*

Exercice 18.1 – Classe des solutions.
Soit $p \in \mathbb{N}$.
Montrer que si a et b sont de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, alors toute solution sur I de l'équation $y' + ay = b$ est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur I.

Proposition 18.1 – Théorème de Cauchy, ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 1

(1) Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$, **il existe** une **unique** solution y de (E) sur I telle que $y(x_0) = y_0$, autrement dit **le problème de Cauchy sur** I constitué de

- l'équation différentielle sur I : $y' + a(x)y = b(x)$,
- avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

possède une unique solution.

(2) L'ensemble $\mathscr{S}_\mathrm{H}$ des solutions de l'équation homogène (H) : $y' + a(x)y = 0$ est une droite vectorielle, donc si y_H est une solution *(particulière)* de (H) sur I, alors

$$\mathscr{S}_\mathrm{H} = \mathrm{Vect}\,(y_\mathrm{H}) = \{\,\lambda y_\mathrm{H} \mid \lambda \in \mathbb{K}\,\} = \{\,x \in \mathrm{I} \mapsto \lambda y_\mathrm{H}(x)\,\}\,.$$

(3) Si y_H et y_P sont des solutions *(particulières)* respectives de (H) et (E) sur I, alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) sur I est

$$\mathscr{S} = y_\mathrm{P} + \mathscr{S}_\mathrm{H} = \left\{y_\mathrm{P} + \lambda y_\mathrm{H} \mid \lambda \in \mathbb{K}\right\}.$$

(4) Si A est une primitive de a sur I, alors $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ est une solution de (H) sur I.

Méthode 18.1 – Résolution d'une équation linéaire homogène d'ordre 1

- Comme on sait que $\mathscr{S}_\mathrm{H}$ est une droite vectorielle, **il nous suffit de trouver une solution** (non nulle) y_H de H pour conclure que $\mathscr{S}_\mathrm{H} = \mathrm{Vect}(f_\mathrm{H})$.
  Sur notre brouillon, tous les moyens sont bons pour trouver y_H, de l'œil nu *(comme pour l'équation $y' = \frac{1}{x} y$, n'est-ce pas ?)* jusqu'à l'intégration *à la physicienne* :
  $$y'_\mathrm{H} + a\, y_\mathrm{H} = 0 \iff \frac{y'_\mathrm{H}}{y_\mathrm{H}} = -a \iff \ln(y_\mathrm{H}) = -\int a \iff y_\mathrm{H} = \mathrm{e}^{-\int a}.$$
- En particulier, si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation (E) avec second membre, alors $x_1 - x_2$ est solution de (H).

Exercice 18.2. Résoudre l'équation différentielle : $x\,y' = 3y + x$.

Exercice 18.3 – Développement en série entière de la fonction puissance.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, montrer que pour tout $x \in]-1\,;\,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \overbrace{= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}^{\text{procédé mnémotechnique}} \quad .$$

Méthode 18.2 – Recherche d'une solution particulière de (E)

- L'énoncé permet parfois de deviner une solution particulière sous la forme d'une constante, d'un polynôme, d'un polynôme multiplié par une exponentielle, de combinaisons de cos et sin, etc.
- Penser au **principe de superposition** des solutions.
- La **méthode de variation de la constante** : on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y = \lambda\, y_0$, où λ est $\mathscr{C}^1$ sur I, et y_0 est une solution non nulle de (H). En remplaçant dans (E), on vérifie que y est solution de (E) si, et seulement si, $\lambda' = \dfrac{b}{y_0}$, on résout cette équation pour obtenir λ et en déduire y.
- On peut chercher une solution développable en série entière.

Exercice 18.4. Résoudre l'équation différentielle $y' = 2x\,y + 1$ (E) en cherchant une solution développable en série entière.

2. Primitives des fonctions usuelles : résolution de $y' = b(x)$

Si a est la fonction nulle sur I, alors (E) est l'équation $y' = b(x)$.
La fonction $y_H : x \mapsto 1$ est une solution du système homogène $y' = 0$, donc si y_P est une solution de (E) : $y' = b(x)$ *(c'est-à-dire une primitive de b sur* I*)* alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) : $y' = b(x)$ sur I est $\mathscr{S} = \{y_P + C \mid C \in \mathbb{K}\}$.
Sauf indication particulière, les constantes utilisées ci-après sont des nombres complexes.

$b(x)$	*expression d'une solution f*	*intervalle* I
x^α, $(\alpha \neq 1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$; $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\}$; $]0 ; +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}\}$.
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

$e^{\alpha x+\beta}$, $(\alpha \neq 0)$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}$	$\mathbb{R}$
On en déduit avec parties réelles et imaginaires :		
$e^{ax}\cos(bx+c)$, $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, ab \neq 0)$	$\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c))$	$\mathbb{R}$
$e^{ax}\sin(bx+c)$, $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, ab \neq 0)$	$-\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\cos(bx+c) - a\sin(bx+c))$	$\mathbb{R}$
et par combinaisons linéaires :		
$\mathrm{ch}(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathrm{sh}(x) = \sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cos(x) = \cosh(x)$	$\mathbb{R}$

$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$	$[1 ; +\infty[$

$\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k\in\mathbb{Z}$
$\text{cotan}(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$]k\pi\,;(k+1)\pi[$ avec $k\in\mathbb{Z}$
$1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k\in\mathbb{Z}$
$-1-\text{cotan}^2(x)=-\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$\text{cotan}(x)$	$]k\pi\,;(k+1)\pi[$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$

$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
puis par le changement de variable $t=\frac{x}{a}$:		
$\dfrac{1}{x^2+a^2},\quad (a\in\mathbb{R}^*)$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
et en posant $t=\dfrac{x+\frac{b}{2a}}{\lvert\Delta\rvert}$, (quand $\Delta=b^2-4ac<0$) :		
$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$	$\dfrac{2}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\arctan\left(\dfrac{2\,ax+b}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\right)$	$\mathbb{R}$

3. Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre à coefficients constants

Définition 18.2 – Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

- Une **équation différentielle linéaire scalaire du second ordre** est une équation du type

$$(\mathrm{E}) : y'' + a\,y' + b\,y = c(x), \ \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } c \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K}).$$

- L'**équation homogène associée à** (E) est (H) : $y'' + a\,y' + b\,y = 0$.

Exercice 18.5 – Re-Classe des solutions.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si c est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, alors toute solution sur I de l'équation $y'' + ay' + by = c$ est de classe $\mathscr{C}^{p+2}$ sur I.

Exercice 18.6.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si la fonction c du second membre est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, alors une solution quelconque f de (E) sur I est $\mathscr{C}^{p+2}$ sur I.

Remarques 18.2

(1) Bien noter que **la continuité de** c sera nécessaire pour les théorèmes à suivre !

(2) Comme dans l'exercice ci-dessus, on montre que les solutions de (H) sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

L'application $y \longmapsto y'' + ay' + by$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est un endomorphisme dont le noyau est l'ensemble $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ des solutions de (H), qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

(3) **Lien avec les systèmes différentiels** : avec les notations

$$\mathrm{Y} : x \mapsto \begin{pmatrix} y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathrm{B} : x \mapsto \begin{pmatrix} c(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'équation (E) équivaut au système différentiel : $\mathrm{Y}' + \mathrm{A}\,\mathrm{Y} = \mathrm{B}(x)$.

Corollaire 18.2 – Théorème de Cauchy, ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

(1) Pour tout $(x_0, y_0, y_1) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}^2$, **il existe** une **unique** solution y de (E) sur I telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$, autrement dit **le problème de Cauchy sur** I constitué de

- l'équation différentielle sur I : $y'' = ay' + by + c(x)$,
- avec les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

possède une unique solution.

(2) L'ensemble $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ des solutions de l'équation homogène (H) : $y'' = ay' + by$ est un **plan vectoriel** de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, donc si y_1 et y_2 sont deux solutions de (H) formant une famille libre, alors

$$\mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \mathrm{Vect}(y_1, y_2) = \left\{ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

(3) Si (y_1, y_2) est un **système fondamental de solutions** de (H), et si y_{P} est une solution de (E), alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) sur I est

$$\mathscr{S} = \{ y_{\mathrm{P}} + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \}.$$

(4) Soient r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$.

→ Si $r_1 \neq r_2$, on peut prendre $y_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $y_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$;
→ si $r_1 = r_2 = r$, on peut prendre $y_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ et $y_2 : x \mapsto x\mathrm{e}^{rx}$;
→ si a et b sont réels, et si $r_1 = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$, on peut prendre

$$y_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ et } y_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Remarques 18.3

Toute base (y_1, y_2) de $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ est appelée **système fondamental de solutions de** (H).

Méthode 18.3 – Recherche d'une solution particulière

- Si $c(x) = P(x)e^{\alpha x}$, où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors on cherche une solution de la forme $y : x \mapsto x^p Q(x)e^{\alpha x}$, où Q est de même degré que P, et p est l'ordre de multiplicité de α comme racine du polynôme caractéristique $X^2 + aX + b$.

  Dans le cas où α est un nombre complexe, on retrouve le cas d'un second membre comprenant des cos et sin.

- **Hors-programme : la méthode de variation des constantes.**

  Si (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de (H), on cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto A(x)f_1(x) + B(x)f_2(x)$, où A et B sont des fonctions vérifiant $A'f_1 + B'f_2 = 0$.

  On remplace dans (E), on obtient que A' et B' sont solutions du système

$$\begin{cases} A'(x) \times f_1(x) + B'(x) \times f_2(x) & = 0 \\ A'(x) \times f_1'(x) + B'(x) \times f_2'(x) & = c(x) \end{cases}$$

  on détermine A' et B', puis on choisit A et B parmi leurs primitives.

Exercice 18.7. Résoudre $y'' + 4y' + y = e^{-t}\cos(t)$.

Une correction de l'exercice 18.1 *énoncé*

Supposons que a et b sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, et prenons une solution quelconque f de (E) sur I.

- Par définition d'une solution de (E), f est dérivable sur I donc a fortiori continue, autrement dit de classe $\mathscr{C}^0$.
- Soit $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$, supposons que, pour un entier $k \in [\![1\ ;\ p]\!]$, f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
  Les fonctions a, b et f sont (au moins) $\mathscr{C}^k$ sur I puisque $k \leqslant p$, donc $f' = -a \times f + b$ est aussi $\mathscr{C}^k$ sur I, ce qui prouve que f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I.
- On a prouvé par une récurrence limitée que pour tout $k \in [\![1\ ;\ p]\!]$, f est $\mathscr{C}^{k+1}$, donc en particulier que f est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$, sur I.

Une correction de l'exercice 18.2 *énoncé*

- Cette équation, que l'on appellera (E), est définie sur $\mathbb{R}$, mais elle a pour forme normalisée

$$y' - \frac{3}{x}y = 1,$$

  sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.
- Une observation pertinente de cette équation nous donne l'idée de chercher une solution sous la forme $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$.
  Si on jette cette fonction dans l'équation, on a tout de suite $a = -\frac{1}{2}$, donc $x \mapsto -\frac{1}{2}x$ est une solution de (E) sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.
- L'équation homogène associée (H) : $y' - \frac{3}{x}y = 0$, n'est pas beaucoup plus complexe, on peut avoir l'idée de lui chercher une solution sous la forme d'un petit monôme *(khrhhrhi hi hi hi...)* $x \mapsto x^n$.
  Au terme d'un calcul de bébé, on constate que $x \mapsto x^3$ est solution.
- Comme on connaît parfaitement la structure de l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions d'une équation normalisée, on peut conclure tranquille que l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty\ ;\ 0[$, ainsi que sur $]0\ ;\ +\infty[$, sont

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ x \in]-\infty\ ;\ 0[\mapsto -\frac{1}{2}x + \mathrm{C}x^3 \mid \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\text{et } \mathscr{S}_2 = \left\{ x \in]0\ ;\ +\infty[\mapsto -\frac{1}{2}x + \mathrm{C}x^3 \mid \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\}.$$

- *Solution sur tout $\mathbb{R}$.*

  (« analyse ») Si y est solution sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions respectives sur $]0\ ;\ +\infty[$ ET $]-\infty\ ;\ 0[$ sont dans $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, ainsi d'après le point précédent, il existe $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathbb{R}^2$

tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + C_1 x^3 & \text{si } x > 0, \\ -\frac{1}{2}x + C_2 x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(« synthèse ») Réciproquement, prenons une fonction f définie comme ci-dessus, avec en plus $f(0) = 0$:

$$f : x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}x + C_1 x^3 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\frac{1}{2}x + C_2 x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors

- f est bien dérivable, et même $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$;
- f tend bien vers $0 = f(0)$ à droite et à gauche en 0, donc f est $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$;
- $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + 3C_1 x^2 & \text{si } x > 0, \\ -\frac{1}{2} + 3C_2 x^2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$ donc $f'(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} -\frac{1}{2}$.

  Le théorème de limite de la dérivée permet alors de conclure que f est $\mathscr{C}^1$ en 0, avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$, donc sur $\mathbb{R}$.

  On peut enfin vérifier que

  - pour tout $x \in]-\infty\,;0[$,

  $$\begin{aligned} x \times f'(x) &= x \times (-\frac{1}{2} + 3C_2 x^2) = -\frac{1}{2}x + 3C_2 x^3 \\ &= 3\left(-\frac{1}{2}x + C_2 x^3\right) + x = 3f(x) + x \end{aligned}$$

  - même chose sur $]0\,;+\infty[$,
  - en 0,

  $$0 \times f'(0) = 0 = 3f(0) + 0,$$

  donc f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : les solutions sur $\mathbb{R}$ de $ty' = 3y$ sont les fonctions f définies par

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + C_1 x^3 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\frac{1}{2}x + C_2 x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Une correction de l'exercice 18.3 *énoncé*

Notons $f(x) = (1+x)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+x)}$ pour tout réel $x > -1$. On va montrer que les fonctions f et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ sont solution du même problème de Cauchy.

- La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$ comme composée de $x \mapsto x+1$ qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$ à valeurs dans $]0\,;+\infty[$ par ln qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$, et par l'exponentielle qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc en particulier f est dérivable sur $]0\,;1[$.

  De plus, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

  $$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x} f(x),$$

  donc f est solution sur $]0\,;1[$ de l'équation différentielle $y' = \frac{\alpha}{1+x} y$.
- De

  $$\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} \right| = \frac{n-\alpha}{n+1} x \underset{n\to+\infty}{\sim} x,$$

  on déduit de la façon usuelle avec d'Alembert que S est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1, donc qu'elle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$, et a fortiori dérivable sur $]0\,;1[$.

  Montrons que S est aussi solution de l'équation $y' = \frac{\alpha}{x+1} y$.

  > *On va plutôt montrer que $(1+x)S' = \alpha S$, ça me semble plus simple.*

  Pour tout $x \in]0\,;1[$, grâce à la dérivation terme à terme de la somme d'une série entière :

  $$(1+x)S'(x) = (1+x)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1}.$$

  > *Pour les coefficients du binôme usuels, on connaît la formule du pion*
  >
  > $$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}, \text{ qui donne } b\binom{a}{b} = a\binom{a-1}{b-1},$$
  >
  > *mais dans notre cas on va le redémontrer.*

Or pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} n\binom{\alpha}{n} &= n\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{(n-1)!} \\ &= \alpha \times \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{(n-1)!} \\ &= \alpha \times \frac{(\alpha-1)\cdots((\alpha-1)-(n-2))}{(n-1)!} = \alpha\binom{\alpha-1}{n-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (1+x)S'(x) = (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n} \\ &= \alpha\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n\right) \\ &= \alpha\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1}\right)x^n\right). \end{aligned}$$

Derechef, si on était avec des coefficients du binôme traditionnels, c'est-à-dire rien qu'avec des entiers, on saurait l'identité du triangle de Pascal :

$$\binom{b}{a}+\binom{b}{a+1}=\binom{b+1}{a+1}.$$

Mais ici on doit retrouver cette identité.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1} &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots((\alpha-1)-(n-1))}{n!} \\ &\quad + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots((\alpha-1)-(n-2))}{(n-1)!} \\ &= \frac{(\alpha-1)\cdots((\alpha-1)-(n-2))((\alpha-1)-(n-1))}{n\times(n-1)!} \\ &\quad + \frac{(\alpha-1)\cdots((\alpha-1)-(n-2))}{(n-1)!} \\ &= \frac{(\alpha-1)\cdots((\alpha-1)-(n-2))((\alpha-1)-(n-1))}{n\times(n-1)!} \\ &\quad + \frac{(\alpha-1)\cdots((\alpha-1)-(n-2))}{(n-1)!} \\ &= \frac{(\alpha-1)\cdots((\alpha-1)-(n-2))}{(n-1)!}\times\left(\frac{((\alpha-1)-(n-1))}{n}+1\right) \\ &= \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-1)-(n-2))}{(n-1)!}\times\frac{\alpha-n+1}{n} \\ &= \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\binom{\alpha}{n}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(1+x)S'(x)=\alpha\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\right)=\alpha S(x),$$

donc S est aussi solution sur $]0\,;1[$ de la même équation différentielle.

- Comme de plus $f(0)=1$, et $S(0)=1\times 0^0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}0^0=1$, on peut conclure que f et S sont solution du même problème de Cauchy sur $]0\,;1[$, donc qu'elles sont égales sur cet intervalle.
Alors cette fonction

Une correction de l'exercice 18.4

énoncé

- **(Analyse :)** soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, supposons que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R>0$ et que sa somme S est solution sur $]-R\,;R[$ de (H).

On sait que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$, et qu'on peut la dériver terme à terme, donc $\boxed{\text{pour tout } t \in]-R\,;R[}$,

$S'(t) = 2t\,S(t) + 1 \iff \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = 2t \times \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + 1$

$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 a_{n-1} t^n$

$\iff a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 a_{n-1} t^n$

$\iff \left\{ \begin{array}{rl} a_1 & = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1) a_{n+1} & = 2 a_{n-1} \end{array} \right.$ *(par unicité du développement en série entière)*

$\iff \forall p \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{rl} a_{2p} & = \frac{2}{2p} \times \frac{2}{2(p-1)} \times \cdots \times \frac{2}{2} a_0 = \frac{1}{p!} a_0 \\ a_{2p+1} & = \frac{2}{2p+1} \times \frac{2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2^p \times 2^p p!}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} \end{array} \right.$ *(par récurrence).*

(Synthèse :) la méthode utilisant le critère de d'Alembert permet d'affirmer que les séries entières $\sum \frac{1}{p!} t^{2p}$ et $\sum \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} t^{2p+1}$ ont un rayon de convergence infini, donc par addition la série entière $\sum a_n x^n$ a aussi un rayon de convergence infini.
Sa somme

$$S : t \mapsto a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} t^{2p+1} = a_0 \times e^{t^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} t^{2p+1}$$

est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et les équivalences de la partie précédente prouvent que S est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

- Les fonctions coefficients $a : t \mapsto 2t$ et $b : t \mapsto 1$ de (E) sont continues sur $\mathbb{R}$, donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f + C f_H$ où f est une solution de (E), C un réel, et f_H une solution de (H).
  On vérifie rapidement que la fonction $f_H : t \mapsto e^{t^2}$ est solution de (H), et on déduit du calcul ci-dessus que la fonction

$$f : t \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} t^{2p+1}$$

est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ t \mapsto C e^{t^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} t^{2p+1} \mid C \in \mathbb{R}. \right\}$$

Une correction de l'exercice 18.5 *énoncé*

Supposons que c est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, et prenons une solution quelconque f de (E) sur I.

- Par définition d'une solution de (E), f est deux fois dérivable sur I donc a fortiori $\mathscr{C}^1$.
- Soit $k \in [\![0\ ;\ p]\!]$, supposons que, pour un entier $k \in [\![0\ ;\ p]\!]$, f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I. Alors comme c est $\mathscr{C}^p$ avec $p \geqslant k+1$, et f' est $\mathscr{C}^k$, on peut affirmer que $f'' = -af' - bf + c$ est $\mathscr{C}^k$ comme combinaison linéaire de fonctions $\mathscr{C}^k$.
  Ainsi $f'' \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I})$, donc $f \in \mathscr{C}^{k+2}(\mathrm{I})$.
- On a prouvé par une récurrence limitée que pour tout $k \in [\![0\ ;\ p]\!]$, f est $\mathscr{C}^{k+2}$, donc en particulier que f est de classe $\mathscr{C}^{p+2}$, sur I.

Une correction de l'exercice 18.6 *énoncé*

Supposons que la fonction c du second membre est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, et prenons une solution quelconque f de (E) sur I.
Alors par définition d'une solution de (E), f est deux fois dérivable sur I et vérifie

$$f'' = -af' - bf + c.$$

Or les fonctions f', f et c sont continues sur I, donc f'' est continue, et par conséquent f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.
Supposons que, pour un entier $k \in [\![1\ ;\ p+1]\!]$, f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,

> alors toutes les fonctions de l'égalité $f'' = -af' - bf + c$ sont $k-2$ fois dérivables sur I, et en dérivant $k-2$ fois, on obtient par linéarité de la dérivation
>
> $$f^{(k)} = -a\,f^{(k-1)} - b\,f^{(k-2)} + c^{(k-2)}.$$
>
> or
>
> - $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I})$, donc $f^{(k-1)}$ et $f^{(k-2)}$ sont dans $\mathscr{C}^1(\mathrm{I})$,
> - et $c \in \mathscr{C}^p$ et $k-2 \leqslant p-1$, d'où $c^{(k-2)} \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I})$,
>
> donc $f^{(k)} \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I})$

d'où f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 18.7 *énoncé*

Les solutions sont les fonctions

$$t \longmapsto \mathrm{C}_1 \mathrm{e}^{t\left(-2-\sqrt{3}\right)} + \mathrm{C}_2 \mathrm{e}^{t\left(-2+\sqrt{3}\right)} + \frac{2}{13}\mathrm{e}^{-t}\sin(t) - \frac{3}{13}\mathrm{e}^{-t}\cos(t)$$
$$\text{avec } (\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathbb{R}^2.$$