

Partie convexe dans E

Une partie A de E est convexe lorsque tout segment entre deux points de A est inclus dans A :

forall(x,y) in A^2, forall t in [0 ; 1], tx + (1 - t)y in A.

Parties particulières d'un espace vectoriel normé

Boules ouvertes et fermées :

→ boule ouverte : B\_o(a,r) = {x in E | d(a,x) < r},

→ boule fermée : B\_f(a,r) = {x in E | d(a,x) ≤ r}.

Trucs bornés :

→ K ⊂ E partie bornée : ∃M ≥ 0, ∀x ∈ K, ||x||\_E ≤ M,

→ (u\_n)\_{n ∈ ℕ} ∈ E^ℕ suite bornée : ∃M ≥ 0, ∀n ∈ ℕ, ||u\_n||\_E ≤ M

→ f : A ⊂ E → F application bornée : ∃M ≥ 0, ∀x ∈ A, ||f(x)||\_F ≤ M.

Topologie

Soient a ∈ E et A ⊂ E :

**Point intérieur** : a ∈ A^◦ ⇔ ∃r > 0, B\_o(a,r) ⊂ A.

**Point adhérent** : a ∈ A-bar ⇔ ∃r > 0, B\_o(a,r) ∩ A ≠ ∅  
⇔ ∃(u\_n)\_{n ∈ ℕ} ∈ A^ℕ, u\_n →\_{n → +∞} a.

**Ouvert** : A est un ouvert de E ⇔ A = A^◦

⇔ C\_E A est fermé

⇔ A = f^{-1}(B) avec → f : E → F continue,  
→ B ouvert de F.

⇔ A est une intersection finie, ou  
une réunion quelconque d'ouverts.

**Fermé** : A est un fermé de E ⇔ A = A-bar

⇔ Pour toute suite (u\_n)\_{n ∈ ℕ} de vecteurs  
de A, si u\_n →\_{n → +∞} ℓ alors ℓ ∈ A.

⇔ C\_E A est ouvert

⇔ A = f^{-1}(B) avec → f : E → F continue,  
→ B fermé de F.

⇔ A est une intersection quelconque,  
ou une réunion finie de fermés.

Norme et distance dans E

→ **norme** N : x ∈ E ↦ N(x)

⊕ homogénéité,

⊕ inégalité triangulaire,

⊕ propriété de séparation

Notation courante N(x) = ||x||.

→ **distance** d : (x,y) ∈ E^2 ↦ N(x - y).

Définition – Normes équivalentes

Deux normes N et N' sur E sont **équivalentes** lorsque N/N' et N'/N sont bornées sur E \ {0\_E}.

Proposition

Si E est de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes.

Proposition – Conséquences de l'équivalentes

Toute propriété topologique (partie ouverte ou fermée, limites de suites et de fonctions, continuité d'une fonction, caractère lipschitzien) vraie pour une norme est vraie pour toute autre norme équivalente.

Applications lipschitziennes

→ f est **k-lipschitzienne** sur A lorsque ∀(x,y) ∈ A^2, ||f(x) - f(y)|| ≤ kN(x - y).

→ Une application lipschitzienne est continue.

→ Si u ∈ ℒ(E,F) alors il k ≥ 0 tel que ∀x ∈ E, ||u(x)|| ≤ kN(x).

→ Si f est p-linéaire de (ℝ^n)^p dans E, alors il existe k ∈ ℝ tel que ∀(x,y) ∈ E × F, N(f(x\_1,...,x\_p)) ≤ k ∏\_{i=1}^p ||x\_i||.

Suites convergentes de vecteurs

Soient (u\_n)\_{n ∈ ℕ} ∈ E^ℕ ℓ ∈ E, et ||•|| une norme de E,

u\_n →\_{n → +∞} ℓ ⇔ ||u\_n - ℓ|| →\_{n → +∞} 0  
⇔ si E est de dimension finie, les coordonnées de u\_n dans une base quelconque de E tendent vers les coordonnées de ℓ.

Limites de fonctions

Soient (E,N) et (F,||.||) deux espaces vectoriels normés, A ⊂ E, f : A → F, a ∈ A-bar, b,c ∈ F.

f(x) →\_{x → a} b ⇔ ∀ε > 0, ∃δ > 0, ∀x ∈ A, (N(x - a) ≤ δ ⇒ ||f(x) - b|| ≤ ε)

⇔ **Caractérisation séquentielle** :

pour toute suite (x\_n)\_{n ∈ ℕ} de vecteurs de A,

si x\_n →\_{n → +∞} a, alors f(x\_n) →\_{n → +∞} b

⇔ si E est de dimension finie, les coordonnées de f(x) dans une base quelconque convergent quand x → a vers les coordonnées de b.

Continuité

→ Soient (E,N) et (F,||.||) deux espaces vectoriels normés **de dimensions finies**, A ⊂ E, f : A → F, a ∈ A-bar.

f est continue en a ⇔ f(x) →\_{x → a} f(a)

f est continue sur A ⇔ f est continue en tout point de A

→ Règles de calcul classiques en proposition 15.19.

→ Les applications polynomiales sont continues.

→ (P 15.22 et 15.23) Les applications linéaires, et les applications multilinéaires sont continues.

→ **Le théorème des bornes atteintes** : si f est continue sur une partie fermée bornée de E, alors f est bornée sur cette partie, et ||f|| atteint ses bornes