Notations – Dans tout ce chapitre :

- n est un entier strictement positif ;
- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide ni réduit à un point, et $a \in \mathrm{I}$;
- f une application de I dans $\mathbb{R}^n$;
- k un entier naturel voire $+\infty$;
- et $\|.\|$ l'une quelconque des normes de $\mathbb{R}^n$.

Si $f : t \in \mathrm{I} \mapsto \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n$, ou $f : t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, les f_i sont des fonctions réelles appelées **applications coordonnées** de f.

1. Dérivabilité, fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

1.1. Dérivabilité en un point, vecteur dérivé

Définition 20.1 – Dérivabilité en un point

L'application f est **dérivable** en $a \in \mathrm{I}$ lorsque son **taux d'accroissement** $t \mapsto \frac{1}{t-a}(f(t) - f(a))$ admet une limite finie $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^n$ quand t tend vers a.
Ce vecteur A est noté $f'(a)$, ou $\mathrm{D}f(a)$, ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$, et appelé **vecteur dérivé** de f en a.

Exercice 20.1.

.1. Montrer que $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{1-t^2} \\ 2 + \ln(1+t) \end{pmatrix}$ est dérivable en 0 et donner son vecteur dérivé.

.2. Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = t \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est prolongeable par continuité en 0, mais que son prolongement n'est pas dérivable en 0.

Proposition 20.1 – Caractérisation par un développement limité

L'application f est dérivable en a si, et seulement si, il existe deux **vecteurs** A et B de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient : $f(t) \underset{t \to a}{=} \mathrm{A} + (t-a)\mathrm{B} + o(t-a)$.

Dans ce cas,
- $f(a) = \mathrm{A}$, $f'(a) = \mathrm{B}$,
- la droite passant par $f(a)$ dirigée par $f'(a)$ est tangente à la courbe de f.

(mis à jour le 14 mars 2025)

Exemples 20.1. On retrouve la dérivabilité en 0 de la fonction de l'exercice 20.1 :

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{1-t^2} \\ 2+\ln(1+t) \end{pmatrix} \underset{t\to 0}{=} \begin{pmatrix} 1+\left(1+t^2+o(t^2)\right) \\ 2+t+o(t) \end{pmatrix} \underset{t\to 0}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=f(0)} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=f'(0)} + \begin{pmatrix} o(t) \\ o(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 20.2. Étudier la dérivabilité et la continuité de la fonction $x \mapsto (2e^x - e^{-x})^{1/x}$ en 0, et préciser l'allure de sa courbe au voisinage du point d'abscisse 0.

Remarque 20.1 – Interprétation cinématique : si on interprète le paramètre t comme le temps, alors $\Gamma = f(\mathrm{I})$ est appelée **trajectoire** du point mobile $f(t)$, la fonction f est **la loi horaire du mouvement**. Si f est dérivable en t, $f'(t)$ est le **vecteur vitesse à l'instant** t du point mobile, et sa norme $\|f'(t)\|$ est la **vitesse** à l'instant t.

Proposition 20.2 – La dérivabilité entraîne la continuité

Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a *(la réciproque est fausse !)*

1.2. Dérivabilité sur un intervalle, application dérivée, classe $\mathscr{C}^k$

Définition 20.2

- On dit que f est dérivable sur l'intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.
  Dans ce cas, on appelle **application dérivée** de f l'application $a \mapsto f'(a)$ de I dans $\mathbb{R}^n$, que l'on note aussi $\mathrm{D}f$, ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ (si la variable est t).
- Soit $k \in \mathbb{N}$, on dit que l'application f est de classe :
  - $\mathscr{C}^0$ sur I lorsqu'elle est continue sur I ;
  - $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa dérivée est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
  - $\mathscr{C}^\infty$ sur I lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Lorsqu'elle existe on appelle **dérivée** $k^{\mathbf{e}}$ de f l'application de I dans $\mathbb{R}^n$, notée $f^{(k)}$ ou $\mathrm{D}^k f$ ou $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}$, et définie par $f^{(k)} = \begin{cases} f & \text{si } k=0, \\ (f')^{(k-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$
- L'ensemble des applications dérivables (*resp.* de classe $\mathscr{C}^k$) sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathbb{R}^n)$ (*resp.* $\mathscr{C}^k(\mathrm{I},\mathbb{R}^n)$).

Exercice 20.3 – Une application dérivable mais pas $\mathscr{C}^1$ en 0.
Montrer que l'application $t \mapsto \begin{cases} t^2\cos\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ est dérivable mais pas $\mathscr{C}^1$ en 0.

Remarque 20.2 – Interprétation cinématique
Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors $f''(t)$ est le **vecteur accélération à l'instant** t du point mobile, et sa norme $\|f''(t)\|$ est **l'accélération** du point mobile.

Proposition 20.3 – Caractérisation par les applications coordonnées

L'application $f : t \in \mathrm{I} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est dérivable sur I (*resp.* de classe $\mathscr{C}^k$) si, et seulement si, ses applications coordonnées f_i le sont aussi.
Dans ce cas :

$$\forall t \in \mathrm{I},\ \ f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 20.4. Montrer que la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \frac{1}{1-t^2} \\ t^n \end{pmatrix}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;\,1[$ et donner ses dérivées successives.

Corollaire 20.4 – Applications à valeurs complexes

Si f est à valeurs complexes, alors f est dérivable (*resp.* de classe $\mathscr{C}^k$) sur I si, et seulement si, $\mathbb{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathbb{I}\mathrm{m}(f)$ le sont aussi.
Dans ce cas, $f^{(k)} = (\mathbb{R}\mathrm{e}(f))^{(k)} + i(\mathbb{I}\mathrm{m}(f))^{(k)}$, et $\left(\overline{f}\right)^{(k)} = \overline{f^{(k)}}$.

Exercice 20.5. Donner les dérivées successives de $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}\cos(2t)$.

Proposition 20.5 – Linéarité de la dérivation

Les ensembles $\mathscr{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{A}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$, et la dérivation est linéaire.
En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f \mapsto \mathrm{D}^p f$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$.

1.3. Résolution d'un système $X' = A\,X$ homogène à coefficients constants

On se place dans le cas où A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et on cherche l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) : $X' = A\,X$.
On peut déjà montrer par récurrence que toute solution de (H) est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

→ **Si A est diagonale :** de la forme $A = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$,

$$(H) \iff \begin{cases} x_1' = d_1\, x_1 \\ \quad\vdots \\ x_n' = d_n\, x_n \end{cases} \quad \text{et } \mathscr{S}_H = \left\{ X : t \mapsto \begin{pmatrix} C_1 e^{d_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{d_n t} \end{pmatrix} \;\middle|\; (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

→ **Si A est diagonalisable :** notons alors $A = PDP^{-1}$, où P est inversible et D est diagonale.

(i) On pose $X = PY$, c'est-à-dire $Y = P^{-1}X$, alors X et Y sont dérivables en même temps et $Y' = P^{-1} \times X'$;

(ii) le système (H) équivaut alors à $Y' = DY$, que l'on résout comme dans le cas précédent, puis les solutions de (H) s'obtiennent par $X = PY$.

→ **Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:**

(i) on résout le système comme dans le cas précédent et on obtient les **solutions complexes** *(autrement dit les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}^n$)* ;

(ii) on retrouve **les solutions réelles** *(à valeurs dans $\mathbb{R}^n$)* en prenant les parties réelles et imaginaires des solutions complexes précédentes.

> *En effet, si F est une solution complexe de $X' = AX$, alors*
>
> $$\begin{aligned} \left(\overline{F}\right)' &= \overline{F'} \quad \textit{(car la conjugaison est linéaire)} \\ &= \overline{AF} = \overline{A} \times \overline{F} \quad \textit{(car le conjugué d'un produit est le produit des conjugués)} \\ &= A\overline{F} \quad \textit{(car A est à coefficients réels),} \end{aligned}$$
>
> *donc $\overline{F}$ est aussi solution de $X' = AX$; puis par linéarité de la dérivation, $\mathbb{R}\mathrm{e}(F) = \frac{1}{2}(F + \overline{F})$ et $\mathbb{I}\mathrm{m}(F) = \frac{1}{2i}(F - \overline{F})$ sont encore deux solutions réelles du même système $X' = AX$.*

→ **Si A est trigonalisable :** on se ramène de la même manière à un système $Y' = TY$ où T est triangulaire supérieure que l'on résout comme on peut.

Exercice 20.6. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= -3x + 5y - 5z \\ y' &= -4x + 6y - 5z \\ z' &= -4x + 4y - 3z \end{cases}$

2. Dérivation d'applications composées

Remarque 20.3 – Rappel : la **composée de** f **par** g est $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$, et cette fonction n'est définie sur I que si g est définie sur une partie contenant l'ensemble $f(\mathrm{I})$ des valeurs de f.

Proposition 20.6 – Composition d'une application réelle par une application vectorielle

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\varphi : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{R}$.
Dans l'énoncé ci-dessous $\square$ *peut être remplacé par* $\mathscr{C}^k$ *ou* $\mathscr{D}^k$ *:*

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est } \square \text{ sur I,} \\ \varphi \text{ est } \square \text{ sur J,} \\ \varphi(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}, \end{cases} \quad \text{alors } f \circ \varphi \text{ est } \square \text{ sur J.}$$

En particulier, dans le cas de la dérivabilité,

$$\forall t \in \mathrm{J}, \quad (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \times f'(\varphi(t)).$$

Exercice 20.7. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.

Proposition 20.7 – Composée d'une application vectorielle par une application linéaire

$$\text{Si } f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n) \text{ et } \mathrm{L} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), \text{ alors } \begin{cases} \mathrm{L} \circ f \text{ est } \mathscr{C}^k \text{ sur I,} \\ (\mathrm{L} \circ f)^{(k)} = \mathrm{L} \circ f^{(k)}. \end{cases}$$

En particulier, pour tout $a \in \mathrm{I}$, $(\mathrm{L} \circ f)'(a) = \mathrm{L}(f'(a))$.

Exemple 20.2. Si $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{L} \circ f = \begin{pmatrix} f_1 - f_2 - 2f_3 \\ f_1 + 3f_3 \end{pmatrix}$.
Comme seules des combinaisons linéaires sont en jeu, on comprend que la dérivabilité soit conservée, et que $(\mathrm{L} \circ f)' = \mathrm{L} \circ (f')$.

Remarque 20.4 – Remarque utile à la résolution des systèmes différentiels
Si $\mathrm{X} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est $\mathscr{C}^1$, et $\mathrm{P} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors PX est encore $\mathscr{C}^1$, et $(\mathrm{PX})' = \mathrm{PX}'$.

Proposition 20.8 – Dérivée de la composée par une application multilinéaire

Soient
- $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels,
- M une application p-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_p$,
- des applications $g_i : I \to E_i$, pour $i \in [\![1\ ;\ p]\!]$,

Si les g_i sont $\mathscr{C}^k$ sur I, alors $M(g_1, \ldots, g_p) : t \in I \mapsto M(g_1(t), \ldots, g_p(t))$ est aussi $\mathscr{C}^k$ sur I. En particulier pour $k = 1$:

$$\begin{aligned}\forall a \in I,\ \ M(g_1, \ldots, g_p)'(a) = &M(g_1'(a), g_2(a), g_3(a) \ldots, g_p(a)) \\ &+M(g_1(a), g_2'(a), g_3(a), \ldots, g_p(a)) \\ &\quad + \cdots + M(g_1(a), \ldots, g_{p-1}(a), g_p'(a)).\end{aligned}$$

Corollaire 20.9 – Conséquences classiques

Dérivée du produit par une fonction scalaire : si φ est dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si f est dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors $\varphi \times f$ est dérivable sur I et $(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$.

Dérivée du produit scalaire : si f et g sont dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors pour tout produit scalaire $\langle .|. \rangle$ de $\mathbb{R}^n$, l'application $\langle f | g \rangle$ est dérivable sur I et $\langle f | g \rangle' = \langle f' \middle| g \rangle + \langle f \middle| g' \rangle$. En particulier, $\left(\|f\|^2\right)' = 2 \langle f' \middle| f \rangle$.

Dérivée du déterminant de fonctions vectorielles si $(f_1, \ldots, f_n)$ sont dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors l'application $\det_{\mathscr{C}}(f_1, \ldots, f_n)$ est dérivable sur I, avec $\det_{\mathscr{C}}(f_1, \ldots, f_n)' = \det_{\mathscr{C}}\left(f_1', \ldots, f_n\right) + \ldots + \det_{\mathscr{C}}\left(f_1, \ldots, f_n'\right)$.

La formule de Leibniz : pour tout $k \in \mathbb{N}$, si f et g sont deux applications de $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, alors $f \times g$ est aussi dans $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ et pour tout $p \in [\![1, k]\!]$,

$$(f \times g)^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} f^{(i)} g^{(p-i)}.$$

Exercice 20.8.
Soit $(a, b, c, x) \in \mathbb{R}^4$, calculer par dérivation le déterminant $D_1(x) = \begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+b & x \\ x & x & x+c \end{vmatrix}$.

Remarque 20.5 – Interprétation cinématique : le deuxième résultat du corollaire 20.9 a pour conséquence qu'un mobile se déplace à vitesse constante (sa trajectoire est uniforme) si, et seulement si, son vecteur vitesse f' et son vecteur accélération f'' sont orthogonaux ; et qu'un mobile se déplace sur une sphère de centre O (autrement dit à norme constante) si, et seulement si, son déplacement f est orthogonal à sa vitesse f'.

Exercice 20.9 – Dérivées successives avec la formule de Leibniz.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]0\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée n-ème.

3. Rappels de PCSI : fonctions à valeurs réelles

Dans cette partie, f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 20.10 – Extremum et dérivée

Si f est dérivable sur l'intérieur de l'intervalle I, et admet un extremum en un point a **intérieur à** I, alors $f'(a) = 0$.

Remarque 20.6 La dérivée ne s'annule pas forcément en un extremum atteint en une extrémité de I.

Proposition 20.11 – Le théorème de Rolle

Si
- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 20.10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si f est n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule $n+1$ fois sur $[a, b]$, alors $f^{(n)}$ s'annule (au moins une fois) dans $]a, b[$.

Corollaire 20.12 – L'égalité des accroissements finis

Si
- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,

alors il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corollaire 20.13 – L'inégalité des accroissements finis

Si
- f est dérivable sur I,
- f' est bornée sur I,

alors pour tout $(x, y) \in \mathrm{I}^2$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty^{\mathrm{I}} |y - x|.$$

Remarque 20.7 – Application

Si on roule pendant deux heures en respectant les limites de vitesse françaises, on ne pourra pas aller à plus de 260km de son point de départ.

Proposition 20.14 – Sens de variation et dérivée

Si f est continue sur I, et dérivable sur l'intérieur de I, alors

- f est croissante (resp. décroissante, constante) sur I **si et seulement si** $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$, $f' = 0$) sur I,
- f est **strictement** croissante (resp. décroissante) sur I **si et seulement si** $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I et ne s'annule qu'en des points isolés de I.
- f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle en tout point x intérieur à I, $f'(x) = 0$.

Définition 20.3 – Fonctions convexes

Une fonction f est convexe sur I si, pour tous $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Remarque 20.8 – Autre définition : f est convexe sur I lorsque la courbe de $f_{|\mathrm{I}}$ passe en dessous de toutes ses cordes (ou sécantes), c'est-à-dire lorsque

$$\forall (a, b) \in \mathrm{I}^2, \ \ \forall x \in [a, b], \ \ f(x) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Proposition 20.15 – Caractérisations

- Une fonction $f \in \mathscr{C}^1$ est convexe si, et seulement si, f' est croissante.
- Une fonction $f \in \mathscr{C}^2$ est convexe si, et seulement si, $f'' \geqslant 0$.

Dans ces deux cas cas la courbe de f est au-dessus de ses tangentes.

Proposition 20.16 – Théorème de la limite de la dérivée

Si
- f est continue sur I,
- f est dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$,
- $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

alors $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est $\mathscr{C}^1$ en a avec $f'(a) = \ell$.

Exercices 20.11.

1. Montrer que $f : t \mapsto \frac{t}{\sin(t)}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi\ ;\ \pi[$.
2. On admet que les solutions de l'équation différentielle $(1-x^2)y' + (x-2)y = 0$ sur $]-\infty\ ;\ -1[$, $]-1\ ;\ 1[$, et $]1\ ;\ +\infty[$, sont les fonctions $x \mapsto C\frac{(1+x)^2}{\sqrt{|1-x^2|}}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

   Cette équation a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? sur $]-\infty\ ;\ 1[$?

Proposition 20.17 – Théorème de la bijection continue

Si
- f est continue sur I,
- f est strictement monotone sur I,

alors
- f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$,
- f^{-1} est continue sur J de même sens de variation que f.

Proposition 20.18 – Théorème de dérivation de la réciproque

Si
- f est dérivable sur I,
- f' ne s'annule pas sur I,

alors
- f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$,
- f^{-1} est dérivable sur J avec : $\forall y \in J,\quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(\left(f^{-1}\right)(y)\right)}$.

Exercice 20.12. On considère la fonction $f : x \in I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\mapsto f(x) = \dfrac{1}{\cos(2x)}$.

1. Montrer par étude de fonction que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Sur quel intervalle f^{-1} est-elle dérivable ? Donner l'expression de sa dérivée.
3. Retrouver ce résultat en résolvant l'équation $f(x) = y$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Une correction de l'exercice 20.1 *énoncé*

(1)

$$\frac{1}{t-0}(f(t)-f(0)) = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{1-t^2}-2 \\ 2+\ln(1+t)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{t}{1-t^2}}{} \\ \frac{\ln(1+t)}{t} \end{pmatrix} \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc f est dérivable en 0 de vecteur dérivé $f'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) ➟ f est prolongeable par continuité en 0 car $|f(t)| \leqslant |t|$ donc par encadrement $f(t) \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} 0$,

➟ mais ce prolongement n'est pas dérivable en 0 car $\Delta(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ n'a pas de limite en 0, en effet :

- $\Delta\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$,
- $\Delta\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) = 1 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1$.

Une correction de l'exercice 20.2 *énoncé*

> ➟ *L'expression proposée de la fonction (notons-là f) ne permet pas de calculer $f(0)$, donc f n'est pas définie en 0. L'exercice revient donc à étudier la possibilité de prolonger f par continuité en 0, puis d'étudier la dérivabilité de ce prolongement.*
>
> ➟ *Pour préciser l'allure de sa courbe au voisinage du point d'abscisse 0, il va nous falloir un terme de plus au delà de la partie de degré 1 du développement limité.*

(1) Quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned} 2e^x - e^{-x} &\underset{x\to 0}{=} 2\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right) - \left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1+3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3) \end{aligned}$$

donc

$$\ln(2e^x - e^{-x}) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+\left[3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right]\right)$$

Or $[3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)] \sim 3x \to 0$, donc en utilisant le développement limité de

$\ln(1+\square)$ quand $\square$ tend vers 0,

$$\begin{aligned}
&\ln\left(1+\left[3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right]\right)\\
&\underset{x\to0}{=}\left[3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right]-\frac{1}{2}\left[3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right]^2+\\
&\qquad\frac{1}{3}\left[3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right]^3+o\left(\left[3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right]^3\right)\\
&\underset{x\to0}{=}\left[3x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right]-\frac{1}{2}\left[9x^2+3x^3+o(x^3)\right]+\\
&\qquad\frac{1}{3}\left[27x^3+o(x^3)\right]+o(x^3)\\
&\underset{x\to0}{=}3x-4x^2+8x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
(2e^x-e^{-x})^{1/x}&\underset{x\to0}{=}e^{\frac{1}{x}\ln(2e^x-e^{-x})}=e^{3-4x+8x^2+o(x^2)}\\
&\underset{x\to0}{=}e^3\times e^{-4x+8x^2+o(x^2)}\\
&\underset{x\to0}{=}e^3\Big(1+[-4x+8x^2+o(x^2)]+\frac{1}{2}[-4x+8x^2+o(x^2)]^2\\
&\qquad\qquad+o\left([-4x+8x^2+o(x^2)]^2\right)\Big)\\
&=e^3-4e^3x+16e^3x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction admet un développement limité d'ordre au moins 1 en 0, donc que :

(i) on peut prolonger cette fonction en la fonction φ continue en 0 et définie par

$$\varphi(x)=\begin{cases}(2e^x-e^{-x})^{1/x}, & \text{si } x\neq 0\,;\\ e^3, & \text{si } x=0.\end{cases}$$

(ii) ce prolongement φ est dérivable en 0 de nombre dérivé $\varphi'(0)=-4e^3$.

(iii) La droite d'équation $y=e^3-4e^3x$ est tangente à la courbe de φ au point d'abscisse 0, et comme $\varphi(x)-[e^3-4e^3x]=16e^3x^2+o(x^2)\underset{x\to0}{\sim}16e^3x^2\geqslant 0$, on en déduit que la courbe de φ est localement au dessus de la tangente.

Une correction de l'exercice 20.3 — énoncé

L'application : $t \mapsto \begin{cases} t^2\cos\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

- est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, avec pour tout $t \neq 0$, $f'(t) = 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) - \sin\left(\frac{1}{t}\right)$;
- mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 (sachant que $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ n'a pas de limite en 0) ;
- et dérivable en 0 car $\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right| \leqslant |t|$;

Une correction de l'exercice 20.5 — énoncé

Cette fonction est la partie réelle de la fonction

$$f : t \mapsto e^{-2t} \times e^{i2t} = e^{2(-1+i)t},$$

dont on sait (par théorème) qu'elle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de dérivées successives

$$\begin{aligned} f^{(k)} : t \mapsto 2^k(-1+i)^k e^{2(-1+i)t} &= 2^k\left(\sqrt{2}e^{i3\frac{\pi}{4}}\right)^k e^{2(-1+i)t} \\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^k \times e^{-2t} \times e^{ik3\frac{\pi}{4}} \times e^{i2t} \\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^k \times e^{-2t} \times e^{i\left(k3\frac{\pi}{4}+2t\right)}, \end{aligned}$$

donc les dérivées successives de notre fonction initiale sont

$$(\mathbb{R}e(f))^{(k)} = \mathbb{R}e\left(f^{(k)}\right) : x \mapsto \left(2\sqrt{2}\right)^k \times e^{-2t}\cos\left(k3\frac{\pi}{4} + 2t\right).$$

Une correction de l'exercice 20.6 — énoncé

Ce système est $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -4 & 6 & -5 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

- On essaie de diagonaliser A :
  - Le polynôme caractéristique de A est

    $$\chi_A(x) = X^3 - 7X + 6$$

    dont les racines sont $1, 2, -3$.

    On en déduit en passant que A est diagonalisable, et que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

➔ Les résolutions successives de $(A-I_3)X=0$, $(A-2I_3)X=0$, et $(A+3I_3)X=0$ donnent

$$E_1(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad E_2(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad E_{-3}(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

donc

$$A=PDP^{-1} \text{ avec } P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}.$$

➟ Ainsi en posant $Y=P^{-1}X$, on a

$$X'=AX \iff X'=PDP^{-1}X \iff P^{-1}X'=DP^{-1}X \iff Y'=DY$$

$$\iff \begin{cases} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= 2y_2 \\ y_3' &= -3y_3 \end{cases}$$

$$\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad \forall t\in\mathbb{R},\ Y(t)=\begin{pmatrix}ae^t\\be^{2t}\\ce^{-3t}\end{pmatrix}$$

$$\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad \forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=P\times Y(t)$$

$$\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad X=t\mapsto\begin{pmatrix}be^{2t}+ce^{-3t}\\ae^t+be^{2t}+ce^{-3t}\\ae^t+ce^{-3t}\end{pmatrix}$$

(on pourrait s'arrêter là, l'équation est résolue, mais je vais faire un peu de zèle)

$$\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad X=t\mapsto a\begin{pmatrix}0\\e^t\\e^t\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}e^{-3t}\\e^{-3t}\\e^{-3t}\end{pmatrix},$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\mathrm{Vect}\left(t\mapsto\begin{pmatrix}0\\e^t\\e^t\end{pmatrix}, t\mapsto\begin{pmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\\0\end{pmatrix}, t\mapsto\begin{pmatrix}e^{-3t}\\e^{-3t}\\e^{-3t}\end{pmatrix},\right).$$

Une correction de l'exercice 20.7 *énoncé*

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, et en la composant par cos qui est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on prouve que f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
- Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Or $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, et $\sin(\square) \underset{\square \to 0}{\sim} \square$, donc

$$f'(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi grâce au théorème de limite de la dérivée, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$, et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Une correction de l'exercice 20.8 *énoncé*

> *On a montré dans l'exercice 20.13 que si les applications u, v et w sont dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, alors l'application $\det_{\mathscr{B}}(u,v,w) : x \mapsto \det_{\mathscr{B}}(u(x),v(x),w(x))$ est dérivable sur I, de dérivée*
>
> $$\det_{\mathscr{B}}(u',v,w) + \det_{\mathscr{B}}(u,v',w) + \det_{\mathscr{B}}(u',v,w').$$
>
> *On va admettre ici ce résultat, et l'utiliser dans ce qui suit.*

Les applications $u : x \mapsto \begin{pmatrix} x+a \\ x \\ x \end{pmatrix}$, $v : x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+b \\ x \end{pmatrix}$, et $w : x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \\ x+c \end{pmatrix}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, car leurs coordonnées le sont, donc d'après la remarque en préambule, l'application

$D_1 : x \mapsto D_1(x)$ est encore dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$D_1' : x \mapsto \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & x+b & x \\ 1 & x & x+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+a & 1 & x \\ x & 1 & x \\ x & 1 & x+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+a & x & 1 \\ x & x+b & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ \textit{(en enlevant aux autres colonnes } } x\times \text{ \textit{la colonne de 1)}}$$

$$= bc + ac + ab.$$

Donc (grâce au théorème fondamental de l'analyse) pour tout réel x, $D_1(x) = (bc+ac+ab)x + D_1(0)$.

Or $D(0) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+b & x \\ x & x & x+c \end{vmatrix} = (bc+ac+ab)x + abc.$$

Une correction de l'exercice 20.9

énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons f_n la fonction en question.
La fonction $u : x \mapsto x^{n-1}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]0\ ;+\infty[$, et la fonction ln est aussi $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\ ;+\infty[$, donc $f_n = u \times \ln$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\ ;+\infty[$.
La formule de Leibniz nous donne pour tout réel x strictement positif

$$(f_n)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) \times (\ln)^{(n-k)}(x).$$

On sait *(ou on est censé savoir à force de l'avoir vu)* que

$$u^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k} & \text{si } k \leqslant n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'autre part, après avoir dérivé 4 ou 5 fois ln, on conjecture (puis on le prouve par récurrence) que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\ln^{(p)}(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } p = 0 \\ (-1)^{p-1} \frac{(p-1)!}{x^p} & \text{si } p \geqslant 1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
\boxed{(f_n)^{(n)}(x)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) \times (\ln)^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k} \\
&\qquad \times (-1)^{n-k-1} \frac{(n-k-1)!}{x^{n-k}} + 0 \times \ln(x) \\
&= \frac{(n-1)!}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} \\
&= (-1) \times \frac{(n-1)!}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \\
&= -\frac{(n-1)!}{x} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} - (-1)^0 \right] \\
&= -\frac{(n-1)!}{x} \left[(1+(-1))^n - 1 \right] \\
&= -\frac{(n-1)!}{x} [0^n - 1] \\
&= \boxed{\frac{(n-1)!}{x}} \quad \textit{(car } n \geqslant 1 \textit{ donc } 0^n = 0\textit{)}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 20.10 *énoncé*

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en notant $\mathscr{P}(n)$ la propriété à prouver.

- Au rang $n = 1$, si f est dérivable sur $[a, b]$ et s'annule 2 fois sur $[a, b]$ en $\alpha < \beta$, alors d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]\alpha, \beta[\subset]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$, donc f' s'annule une fois sur $]a, b[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et prenons une fonction f dérivable $n+1$ fois sur $[a, b]$ qui s'annule $n+2$ fois sur $[a, b]$ aux points $a_0 < \ldots < a_{n+1}$.
  - Alors en appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ (avec $i \in [\![0, n]\!]$), on obtient pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ un réel $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $f'(b_i) = 0$.
    Ainsi la fonction f' est n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en $n+1$ réels $b_0 < \ldots < b_n$.
  - On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$ grâce à laquelle on peut affirmer que $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule dans $]a, b[$, ce qui achève d'établir $\mathscr{P}(n+1)$.

Une correction de l'exercice 20.11 *énoncé*

(1) ➟ La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\pi\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ \pi[$ comme rapport de deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, pour tout $t\in]-\pi\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ \pi[$,

$$f'(t)=\frac{1\times\sin(t)-t\times\cos(t)}{\sin^2(t)}=\frac{\sin(t)-t\,\cos(t)}{\sin^2(t)}.$$

➟ Quand t tend vers 0 :

$$f(t)=\frac{t}{t+\underset{t\to0}{o}(t^2)}\underset{t\to0}{\sim}\frac{t}{t}\xrightarrow[t\longrightarrow0]{}1=f(0),$$

donc f est continue en 0. Et

$$f'(t)=\frac{t+\underset{t\to0}{o}(t^2)-t\times\left(1+\underset{t\to0}{o}(t)\right)}{\sin^2(t)}=\frac{t+\underset{t\to0}{o}(t^2)-t-\underset{t\to0}{o}(t^2)}{\sin^2(t)}$$
$$\underset{t\to0}{\sim}\frac{\underset{t\to0}{o}(t^2)}{t^2}\xrightarrow[t\longrightarrow0]{}0,$$

donc grâce au théorème de limite de la dérivée, on en déduit que f est $\mathscr{C}^1$ en 0, donc sur $]-\pi\ ;\ \pi[$, et que $f'(0)=0$.

(2) ➟ On a déjà vu dans l'exercice 16.2 que l'équation (E) : $(1-x^2)y'+(x-2)y=0$ admet pour solutions sur $]-\infty\ ;\ -1[$, $]-1\ ;\ 1[$, et $]1\ ;\ +\infty[$, les fonctions

$$x\mapsto \mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}}.$$

➟ On remarque que l'équation différentielle (E) de départ est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$, on se demande donc si elle admet des solutions sur un intervalle plus grand autre que la fonction nulle (qui est solution de (E) sur $\mathbb{R}$).

- Supposons donc que nous disposons d'une fonction y solution de (E) sur un intervalle I qui contient 1.
  - Alors y est solution de (E) sur $\mathrm{I}\cap]-1\ ;\ 1[$, donc il existe un réel C tel que pour tout $x\in\mathrm{I}\cap]-1\ ;\ 1[$,

$$y(x)=\mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

et y est aussi solution de (E) sur $\mathrm{I} \cap]1\,;+\infty[$, donc il existe un réel D tel que pour tout $x \in \mathrm{I} \cap]-1\,;1[$,

$$y(x) = \mathrm{D}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}},$$

et en remplaçant x par 1 dans (E), on obtient $y(1) = 0$.

- Réciproquement, prenons une telle fonction y définie par

$$y(x) = \begin{cases} \mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } x \in]-1\,;1[, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ \mathrm{D}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{si } x \in]1\,;-\infty[. \end{cases}$$

On remarque qu'à gauche de 1

$$\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \underset{x \overset{<}{\to} 1}{\sim} \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x \overset{<}{\to} 1]{} +\infty,$$

et à droite

$$\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}} \underset{x \overset{>}{\to} 1}{\sim} \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} \xrightarrow[x \overset{>}{\to} 1]{} +\infty$$

donc seules les valeurs $\mathrm{C} = \mathrm{D} = 0$ permettent que y soit continue en 1, d'où y est la fonction nulle.

- *Par conséquent la seule solution de* (E) *sur un intervalle contenant* 1 *est la fonction nulle.*

Supposons donc que nous disposons d'une fonction y solution de (E) sur un intervalle I qui contient -1.

- La fonction y est solution de (E) sur $\mathrm{I} \cap]-1\,;1[$, donc il existe un réel C tel que pour tout $x \in \mathrm{I} \cap]-1\,;1[$,

$$y(x) = \mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

y est solution de (E) sur $]-\infty\,;-1[\cap \mathrm{I}$, donc il existe un réel D tel que pour tout $x \in]-\infty\,;-1[\cap \mathrm{I}$,

$$y(x) = \mathrm{D}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}},$$

et en remplaçant x par -1 dans (E), on obtient $y(-1) = 0$.

- Réciproquement, prenons une telle fonction y définie par

$$x \mapsto \begin{cases} C\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } x \in]-1\ ;\ 1[, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ D\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{si } x \in]-\infty\ ;\ -1[. \end{cases}$$

On remarque qu'à droite de -1,

$$\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \underset{x \overset{>}{\longrightarrow} -1}{\sim} \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{2}} \xrightarrow[x \overset{>}{\longrightarrow} -1]{} 0$$

et de même à gauche de -1

$$\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}} \underset{x \overset{<}{\longrightarrow} -1}{\sim} \frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{2}} \xrightarrow[x \overset{<}{\longrightarrow} -1]{} 0,$$

donc quelles que soient les valeurs de C et D, y est bien continue en -1.
Des équivalents obtenus ci-dessus, on déduit de plus qu'à droite de -1,

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{x-2}{1-x^2} \times y(x) = -\frac{x-2}{(1-x)(1+x)} \times y(x) \\ &\underset{x \overset{>}{\longrightarrow} -1}{\sim} -C\frac{-3}{2(1+x)} \times \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{2}} = C\frac{3(1+x)^{1/2}}{2\sqrt{2}} \\ &\xrightarrow[x \overset{>}{\longrightarrow} -1]{} 0, \end{aligned}$$

et de la même manière

$$y'(x) \xrightarrow[x \overset{<}{\longrightarrow} -1]{} 0.$$

Ainsi grâce au théorème de la limite de la dérivée, on peut en déduire que y est de classe $\mathscr{C}^1$ en -1, avec $y'(0) = 0$.

- On peut conclure que les seules solutions de (E) sur $]-\infty\ ;\ 1[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} C\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } x \in]-1\ ;\ 1[, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ D\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{si } x \in]-\infty\ ;\ -1[, \end{cases}$$

où $(C, D) \in \mathbb{R}^2$.

Une correction de l'exercice 20.12 *énoncé*

1. La fonction $u : x \mapsto \cos(2x)$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathrm{I} = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$, donc $f = \frac{1}{u}$ est dérivable sur I. De plus pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f'(x) = -\frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)^2} = 2\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)^2}.$$

Comme cos et sin sont strictement positives sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, on peut affirmer que f' est strictement positive sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$, donc que f est strictement croissante sur I *(le fait que la dérivée s'annule en des points isolés d'un intervalle n'empêche pas d'affirmer que la fonction est strictement croissante sur cet intervalle !)*

Ainsi f est continue et strictement croissante sur I, donc elle réalise une bijection entre I et

$$\mathrm{J} = f(\mathrm{I}) = \left[f(0)\ ;\ \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x)\right] = [1\ ;\ +\infty[.$$

2. La fonction f est dérivable sur I et sa dérivée $f' : x \mapsto 2\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)^2}$ ne s'annule pas sur $\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$

ATTENTION ! Ici f est dérivable sur $\mathrm{I} = \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ mais sa dérivée s'annule en 0, on ne peut donc pas appliquer le théorème de dérivation des fonctions réciproques sur $\mathrm{I} = \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ mais sur $\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$.

donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[\right) =]1,+\infty[$, et sa dérivée est définie par

$$\forall y \in]1,+\infty[,\quad \left(f^{-1}\right)(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Or pour tout $x \in \mathrm{I}$, $0 < \cos(2x) \leqslant 1$ donc

$$f(x) = \frac{1}{\cos(2x)} \geqslant 1 \ \text{ d'où } \ f(x)^2 - 1 \geqslant 0.$$

De plus

$$\sqrt{f(x)^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos(2x)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)^2}{\cos(2x)^2}} = \sqrt{\frac{\sin(2x)^2}{\cos(2x)^2}},$$

or pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ sont positifs, donc

$$\sqrt{f(x)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\sin(2x)^2}{\cos(2x)^2}} = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)},$$

et par conséquent

$$f'(x) = 2f(x)\sqrt{f(x)^2 - 1}.$$

Donc pour tout $y \in]1 ; +\infty[$,

$$f'\left(f^{-1}(y)\right) = 2f\left(f^{-1}(y)\right)\sqrt{f\left(f^{-1}(y)\right)^2 - 1} = 2y\sqrt{y^2 - 1}$$

ce qui, d'après la forme de f^{-1} obtenue plus haut, donne

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2y\sqrt{y^2 - 1}}.$$

3. ➟ On sait que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geqslant 1$, donc si $y < 1$, l'équation $f(x) = y$ n'a pas de solution dans I.

   ➟ Soit $y \in [1 ; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{\cos(2x)} = y \iff \cos(2x) = \frac{1}{y} \\ &\iff 2x = \arccos\left(\frac{1}{y}\right) \quad \textit{(car } \tfrac{1}{y} \in]0 ; 1] \textit{ et } 2x \in \left[0 ; \tfrac{\pi}{2}\right[\textit{, et } \cos \textit{ et } \arccos \textit{ mettent en bijection } \left[-\tfrac{\pi}{2} ; \tfrac{\pi}{2}\right] \textit{ et } [-1 ; 1]\textit{)} \\ &\iff x = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

   Donc pour tout $y \in [1 ; +\infty[$, $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{y}\right)$.

   ➟ La fonction $y \mapsto \frac{1}{y}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]1 ; +\infty[$ à valeur dans $]0 ; 1[$, et on sait que arccos est $\mathscr{C}^1$ sur $]0 ; 1[$ de dérivée $\square \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-\square^2}}$. On en déduit par composition des fonctions que f^{-1} est $\mathscr{C}^1$ sur $]1 ; +\infty[$, avec pour tout $y \in]1 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(y) &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{y^2}\right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{y}\right)^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2y\sqrt{y^2 - 1}}. \end{aligned}$$