- *Le théorème sur le produit de Cauchy est trop souvent mal restitué. Il faut bien comprendre que le résultat principal est :*

  Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables, alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

  Et dans ce cas, la somme des $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est égale au produit de la somme des u_n par la somme des v_n.
- *Plus généralement, j'ai trop souvent entendu parler de convergence de séries là où les résultats du cours portent sur la sommabilité des suites !*
- *Je rappelle que la menace du prof de maths qui se roule par terre est encore en vigueur ! J'ai déjà failli la mettre à exécution lorsque des élèves ont écrit*

  « si $u_n \leqslant v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable. »

  Cet énoncé est faux ! Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1000^n \leqslant \frac{1}{n^2}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, mais $(-1000^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est absolument pas sommable !
  En l'absence des valeurs absolues, la majoration simple de u_n par v_n n'empêche pas u_n d'être très grand du côté négatif !

Questions de cours 1 *Réponses*

- Qu'est-ce qu'une suite sommable ?
- Suites sommables de référence.
- Donner les trois critères de comparaison pour la sommabilité des suites.
- Convergence de la série du produit de Cauchy de deux séries.
- Donner le critère spécial pour les séries alternées.

(mis à jour le 18 septembre 2024)

Exercice 1

Nature et somme éventuelle de la série de terme général

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2

Nature et somme éventuelle de la série de terme général $\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 3

Convergence et somme de la série de terme général $\frac{(2n^2-n+1)}{n!3^n}$.

Exercice 4

Convergence et somme de la série de terme général $\frac{(2n^2-n+1)}{3^n}$.

Exercice 5

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{n^{\alpha}\,(\ln(n))^n}{n!}.$$

Exercice 6

Étudier selon les valeurs des réels a, b, c la convergence de la série de terme général

$$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2},$$

et calculer sa somme le cas échéant.

Exercice 7

Nature et valeur de la somme de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{n-k}}{k^2(n-k)!}$.

Exercice 8 – Oral X

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que f_n s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en un réel que l'on note a_n.
2. Montrer que $(a_n)_n$ est décroissante et convergente.
3. En revenant à la définition de a_n, trouver un équivalent de a_n.
4. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?
5. Quelle est la nature, en fonction de la valeur de α, de la série de terme général $n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2}\right)$?

Solutions

Réponses aux questions de cours *questions*

Qu'est-ce qu'une suite sommable ?

Définition 4.4 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable lorsque $\sum |u_n|$ est convergente.*

Suites sommables de référence.

Proposition 4.10

- *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, les suites de Riemann $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables si, et seulement si, $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha) > 1$* (rappelons que $|n^\alpha| = n^{\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha)}$).
- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite géométrique $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, $|z| < 1$.*
- *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $\left(\frac{z^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.*

Critères de comparaison pour la sommabilité des suites.

Corollaire 4.12

Critère de domination : *si à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant |v_n|$, alors la sommabilité de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Critère de domination (bis) : *si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$, alors la sommabilité de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Critère d'équivalence : *si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.*

Convergence de la série du produit de Cauchy de deux séries.

Proposition 4.15 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables, alors la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ (appelée produit de Cauchy de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est sommable, et*

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right).$$

Critère spécial pour les séries alternées.

Proposition 4.17 *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée, et tend vers 0 de valeur absolue décroissante, alors $\sum u_n$ converge, et pour tout entier p, la somme $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques $\sum_{n=p}^{N} u_n$ et $\sum_{n=p}^{N+1} u_n$, est du signe de son premier terme u_p, et est en valeur absolue inférieure à $|u_p|$.*

Une correction de l'exercice 1

énoncé

On peut remarquer que $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$ pour en déduire par équivalence la sommabilité de la suite, donc la convergence de la série $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. Mais ce raisonnement ne permet pas de calculer la somme de la série.

On va donc revenir à la définition, et partir d'une somme partielle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) &= \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)\\ &= \ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln(n)\end{aligned}$$

donc pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{N} \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} (\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)) \\
&= \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln(n-1) + \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln(n+1) - 2\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln(n) \\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \ln(n) + \sum_{n=3}^{\mathrm{N}+1} \ln(n) - 2\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \ln(n) \\
&= \ln(1) + \ln(2) + \ln(\mathrm{N}) + \ln(\mathrm{N}+1) - 2(\ln(2) + \ln(\mathrm{N})) \\
&= -\ln(2) + \ln(\mathrm{N}+1) - \ln(\mathrm{N}) \\
&= -\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{N}}\right) \xrightarrow[\mathrm{N} \longrightarrow +\infty]{} -\ln(2)
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et sa somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ vaut -2.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

Ici l'erreur courante consiste à vouloir utiliser le critère d'équivalence, car $\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et de remarquer que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées, donc de vouloir en déduire la convergence de $\sum \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
Or ça n'est pas valable car je vous rappelle que les critères de comparaison ne permettent de tirer des conclusions que sur la sommabilité des suites concernées (autrement dit la convergence absolue des séries) !
Ici $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente, autrement dit la suite $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable, donc tout ce qu'on peut déduire de l'équivalence est que la suite $\left(\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable non plus, ce qui ne nous permet pas de conclure que la série diverge sans valeur absolue.

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit grâce au développement limité

$$\begin{aligned}\ln(1+\square) &\underset{\square\to0}{=} \square - \frac{1}{2}\square^2 + \frac{1}{3}\square^3 + o\left(\square^3\right)\\ &\underset{\square\to0}{=} \square - \frac{1}{2}\square^2 + \mathrm{O}\left(\square^3\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + \mathrm{O}\left(\left(-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

or :

- par le critère spécial des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge ;
- $-\frac{1}{2n} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente ;
- $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est le terme général d'une série convergente car c'est une suite dominée par une suite de Riemann sommable.

Ainsi $\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est le terme général d'une série divergente comme somme de termes généraux de séries convergentes et du terme général d'une série divergente.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n^2 - n + 1 = 1 + n + 2n(n-1)$, donc

$$u_n = \frac{(2n^2-n+1)}{n!3^n} = \frac{1+n+2n(n-1)}{n!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} + \frac{n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} + 2 \times \frac{n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!}$$

Ainsi pour tout entier N supérieur ou égal à 2,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} + 2\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} \quad \textit{(en enlevant des 0 aux sommes)} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{(n-1)!} + 2\sum_{n=2}^{N} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{(n-2)!} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n!} + 2\sum_{n=0}^{N-2} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} + \frac{2}{9} \times \sum_{n=0}^{N-2} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}^{1/3} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{1/3} + \frac{2}{9}\mathrm{e}^{1/3} = \frac{14}{9}\mathrm{e}^{1/3}.
\end{aligned}$$

On a reconnu et utilisé ci-dessus les sommes partielles de la série exponentielle de $\frac{1}{3}$, on déduit donc du calcul précédent que la série Σu_n est convergente et que sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{14}{9}\mathrm{e}^{1/3}.$$

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

Comme dans l'exercice précédent, en utilisant la série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et ses dérivées, et en m'épargnant les détails de rédaction,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} v_n &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-1/3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{(1-1/3)^2} + \frac{2}{9}\times\frac{2}{(1-1/3)^3} \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

Avec le critère de d'Alembert, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \times \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n \times \frac{\ln(n+1)}{n+1}.$$

Or

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1, \text{ et } \frac{\ln(n+1)}{n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

De plus,

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)\right).$$

Mais

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

donc

$$\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)},$$

d'où

$$n\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln(n)}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0$$

donc enfin

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)\right).\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\mathrm{e}^0=1.$$

On peut ainsi conclure que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0,$$

ce qui nous permet de conclure grâce au critère de d'Alembert que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc que $\sum u_n$ converge.

Une correction de l'exercice 6

énoncé

La formule du binôme

$$\begin{aligned}(1+x)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\\&=1+n\,x+\frac{n(n-1)}{2}\,x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,x^3+\cdots\end{aligned}$$

permet de retrouver le développement limité de $(1+x)^\alpha$ quand x tend vers 0, même quand α n'est pas un entier naturel :

$$(1+x)^\alpha\underset{x\to0}{=}1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,x^3+\mathrm{O}\left(x^4\right).$$

Première méthode : soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}u_n&=\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}u_n\left(a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2}\right)\\&=\end{aligned}$$

Deuxième méthode : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2} = \sqrt{n}\left(a + b\sqrt{1+\frac{1}{n}} + c\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right).$$

En appliquant le développement limité en 0 de $(1+x)^\alpha$, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n}} &= 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}\\ &= \sqrt{n}\left(a + b\sqrt{1+\frac{1}{n}} + c\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left[a + b\left(1 + \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + c\left(1 + \frac{2}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\ &\underset{n\to+\infty}{=} (a+b+c)\sqrt{n} + \left(\frac{1}{2}b + c\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

Ainsi

- si $a+b+c \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (a+b+c)\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- si $a+b+c = 0$ mais $\frac{1}{2}b + c \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (a+b+c)\sqrt{n}\left(\frac{1}{2}b+c\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$, donc par équivalence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable, or l'équivalence nous permet d'affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang, donc $\sum u_n$ diverge ;
- enfin, si $a+b+c = 0$ et $\frac{1}{2}b + c = 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable par domination, d'où $\sum u_n$ converge.

Ainsi $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a+b+c = 0$ et $\frac{1}{2}b + c = 0$, autrement dit si, et seulement si, $a = c$ et $b = -2c$.

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= c \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}\right) \\
&= c \left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} - 2\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+2}\right) \\
&= c \left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{n} - 2\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} + \sum_{k=2}^{n+2} \sqrt{k}\right) \\
&= c \left(\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \sqrt{n}\right) - 2\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} + \sqrt{n+1}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)\right) \\
&= c \left(-1 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right) \\
&= c \left(-1 - \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}}\right)\right) \\
&= c \left(-1 - \sqrt{n}\left(\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right) \\
&= c \left(-1 - \sqrt{n} \times \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -c + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} -c.
\end{aligned}$$

Donc dans le cas où $a = c$ et $b = -2c$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = -c.$$

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

Produit de Cauchy des suites sommables $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, donc suite sommable de somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{n-k}}{k^2(n-k)!}\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\right)\times\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)=e^2\times\frac{\pi^2}{6}.$$

Une correction de l'exercice 8

énoncé

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_n'(x)=3nx^2+n^2\geqslant 1$ car $n^2\geqslant 1$ et $3nx^2\geqslant 0$.

   f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)=-\infty$.

   Donc, $\boxed{\text{il existe un et un seul réel } x \text{ tel que } f_n(x)=0}$. On le note a_n.

2. On constate que $f_n(0)=-2\leqslant f_n(a_n)=0$, or, f_n est *strictement* croissante, donc, $0<a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   De plus

$$\begin{aligned}f_{n+1}(a_n)&=(n+1)a_n^3+(n+1)^2a_n-2\\&=\underbrace{na_n^3+n^2a_n-2}_{=0}+a_n^3+(2n+1)a_n^3+(2n+1)a_n\\&\geqslant 0=f_{n+1}(a_{n+1}),\end{aligned}$$

   Étant donné que f_{n+1} est croissante, on obtient $a_n\geqslant a_{n+1}$.

   $\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est décroissante et minorée par } 0, \text{ donc elle converge.}}$

3. On remarque que $f_n(1)=n+n^2-2>0=f_n(a_n)$ car $n\geqslant 1$. La *stricte* croissance de f_n permet d'affirmer que $0<a_n<1$.

   Ainsi, $0<\frac{a_n^2}{n}<\frac{1}{n}$, et par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2}{n}=0.$$

   De plus,

$$f_n(a_n)=0\iff n^2a_n\left(1+\frac{a_n^2}{n}\right)=2.$$

Or

$$n^2 a_n\left(1+\frac{a_n^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 a_n,$$

donc

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}}.$$

4. Ainsi par critère d'équivalence, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.
5. Pour tout réel α,

$$f_n(a_n)=0 \Longleftrightarrow n^\alpha\left(a_n-\frac{2}{n^2}\right)=-\frac{n^\alpha a_n^3}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8}{n^{7-\alpha}}.$$

Donc, par le critère d'équivalence, la suite de terme général $n^\alpha\left(a_n-\frac{2}{n^2}\right)$ converge si, et seulement si, $\alpha<6$, et comme c'est une suite de signe constant (négatif), ceci équivaut à la convergence de la série considérée.

$$\boxed{\text{converge si et seulement si } \alpha<6}.$$