Questions de cours 1

1. Donner deux caractérisations de deux matrices semblables.

   - *la définition ;*
   - *la caractérisation.*

   Quelles valeurs invariantes ont-elles en commun ?

   Deux matrices semblables ont en commun le déterminant, la trace, le rang ; et on verra plus tard qu'elles partagent aussi le même polynôme caractéristique, autrement dit les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.

2. Donner une caractérisation de ce que sont plusieurs sous-espaces vectoriels en somme directe.

   En donner une caractérisation en dimension finie.

3. Définir ce que sont plusieurs sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace vectoriel E.

   En donner deux caractérisations en dimension finie.

Exercice 1

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$.

Montrer que f peut être représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in [\![1 ; n]\!]$, et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = r$ et $\mathrm{A}^2 = 0_n$.

   Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B}^2 = 0_n$, et $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{B})$.

   Montrer que les matrices A et B sont semblables.

3. Le résultat est-il encore vrai en remplaçant 2 par 3 ?

Exercice 3

Soit x un réel. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions continues de $[-1\,;1]$ vers $\mathbb{R}$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_1 &= \{f \in \mathrm{E} \mid f \text{ est constante }\}, \\ \mathrm{F}_2 &= \{f \in \mathrm{E} \mid \forall t \in [-1\,;0], f(t)=0\}, \\ \mathrm{F}_3 &= \{f \in \mathrm{E} \mid \forall t \in [0\,;1], f(t)=0\}. \end{aligned}$$

Établir que $\quad \mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{F}_3$.

Exercice 5

Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{F}', \mathrm{G}'$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant

$$\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{F}' \oplus \mathrm{G}' = \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}' \subset \mathrm{G}$$

Montrer

$$\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}' \oplus (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}') = \mathrm{E}.$$

Exercice 6

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour tout $i = 0, \ldots, n$, on note

$$\mathrm{F}_i = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \forall j \in [\![0\,;n]\!] \setminus \{i\}, \mathrm{P}(j) = 0\}$$

Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels et que

$$\mathrm{E} = \mathrm{F}_0 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_n$$

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont p est un projecteur et b est un vecteur. Résoudre l'équation $x + p(x) = b$.

Exercice 8

On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \left\{ P \in E, \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}$, et $G = \text{Vect}\left(1 + X + X^2\right)$.

1. Démontrer que $E = F \oplus G$.
2. Soit u la projection sur F parallèlement à G. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer $u(P)$ en fonction de $\int_0^1 P(t)dt$.

Exercice 9

Soient E un espace vectoriel et F, G, C trois sous-espaces vectoriels de E tels que C soit un supplémentaire de $F \cap G$ dans G . Montrer que $F + G = F \oplus C$.

Exercice 10

Soit p et q deux projecteurs de E qui commutent entre eux.
Montrer que $\text{Ker}\,(p + q) = \text{Ker}\,(p) \cap \text{Ker}\,(q)$.

Exercice 11 – Oral Mines-Ponts

Soit A un élément non nul de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que A^2 est la matrice nulle.

1. Que vaut la dimension de $\text{Ker}(A)$?
2. Déterminer la dimension de $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$.

Exercice 12

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et deux réels a et b tels que $a \neq b$ et

$$(f - a\,\text{id}_E) \circ (f - b\,\text{id}_E) = 0.$$

Montrer que $\quad \text{Ker}(f - a\,\text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - b\,\text{id}_E) = E.$

Exercice 13

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Prouver que

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

Exercice 14

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, qui vérifie $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.

1. Établir que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathrm{E}$.

Exercice 15

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u^2)$.
Montrer que le noyau et l'image de u sont supplémentaires dans E.

Exercice 16

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
Montrer que :

$$\begin{cases} u \circ v = u, \\ \text{et } v \circ u = v \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} u \text{ et } v \text{ sont des projecteurs de } \mathrm{E}, \\ \text{et } \mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, v. \end{cases}$$

Exercice 17

Soit E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent, autrement dit dont une puissance est l'endomorphisme nul.
Montrer que u^n est nul.

Solutions

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

Il s'agit de montrer l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f aura pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- On sait que $f \neq 0$, donc $\text{rg}(f) \geqslant 1$, et par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) \leqslant 2$.
- Mais $f^2 = 0$, donc *(je vous laisse prouver que)* $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, d'où $\text{rg}(f) \leqslant \dim(\text{Ker}(f))$.
  Mais le théorème du rang nous dit que $\text{rg}(f) = 3 - \dim(\text{Ker}(f))$, donc $\dim(\text{Ker}(f)) \geqslant \frac{3}{2}$.
- On en déduit que $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$, et que $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.
- On en déduit donc qu'on peut prendre un vecteur e_2 non nul qui engendre $\text{Im}(f)$.
  Par définition de $\text{Im}(f)$, il existe un vecteur e_3 tel que $f(e_3) = e_2$, et comme $e_2 \neq 0$, $e_3 \notin \text{Ker}(f)$.
  De plus $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, donc $e_2 \in \text{Ker}(f)$, et $f(e_2) = 0$.
  Comme $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2, on peut compléter la famille libre (e_2) en une base (e_1, e_2) de $\text{Ker}(f)$.
  On sait que (e_1, e_2) est libre, et que e_3 n'est pas dans $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1, e_2)$, donc on peut affirmer (d'après le second point de la proposition 2.4) que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.
  Comme elle a le nombre requis de vecteurs, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
- Enfin

$$\begin{aligned}
\underset{(e_1,e_2,e_3)}{\text{Mat}}(f) &= \underset{(e_1,e_2,e_3)}{\text{Mat}}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\
&= \underset{(e_1,e_2,e_3)}{\text{Mat}}(0,, e_2) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

En développant suivant la première ligne :

$$\Delta_n(x) = (1+x^2)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x).$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique (d'inconnue r)

$$r^2 - (1+x^2)r + x^2 = 0$$

dont on trouve les racines x^2 et 1 à l'œil nu vu qu'on se souvient des relations entre racines et coefficients.
On en déduit que si $x \notin \{-1,1\}$, il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_n(x) = a \times 1^n + b \times \left(x^2\right)^n = a + bx^{2n}.$$

À l'aide de $\Delta_1(x) = 1+x^2$ et $\Delta_2(x) = (1+x^2)^2 - x^2 = 1+x^2+x^4$, on obtient $a = \frac{1}{1-x^2}$ et $b = -\frac{x^2}{1-x^2}$, d'où après simplifications

$$\Delta_n(x) = \frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}.$$

Mais $\Delta_n(x)$ est un déterminant, donc si on le développait totalement on obtiendrait une forme polynomiale en x, et en particulier la fonction $x \mapsto \Delta_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
En particulier la continuité en ± 1 nous donne

$$\Delta_n(\pm 1) = \lim_{x \to \pm 1} \Delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

Supposons $x + x' + y = 0$ avec $x \in \mathrm{F}$, $x' \in \mathrm{F}'$ et $y \in \mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$. Puisque $x' \in \mathrm{F}' \subset \mathrm{G}$ et $y \in \mathrm{G} \cap \mathrm{G}' \subset \mathrm{G}$, on a $x' + y \in \mathrm{G}$. Or F et G sont en somme directe donc $x + \left(x' + y\right) = 0$ avec $x \in \mathrm{F}$ et $x' + y \in \mathrm{G}$ entraîne $x = 0$ et $x' + y = 0$. Sachant $x' + y = 0$ avec $x \in \mathrm{F}', y \in \mathrm{G}'$ et F', G' en somme directe, on a $x' = y = 0$.

Finalement, $x = x' = y = 0$ et l'on peut affirmer que les espaces F, F' et $\mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$ sont en somme directe.
Soit $a \in \mathrm{E}$. Puisque $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, on peut écrire $a = x + b$ avec $x \in \mathrm{F}$ et $b \in \mathrm{G}$. Sachant $\mathrm{E} = \mathrm{F}' \oplus \mathrm{G}'$, on peut écrire $b = x' + y$ avec $x' \in \mathrm{F}'$ et $y \in \mathrm{G}'$. Or $y = b - x'$ avec $b \in \mathrm{G}$ et $x' \in \mathrm{F}' \subset \mathrm{G}$ donc $y \in \mathrm{G}$ et ainsi $y \in \mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$. Finalement, on obtient $a = x + x' + y$ avec $x \in \mathrm{F}, x' \in \mathrm{F}'$ et $y \in \mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$. On peut conclure $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}' \oplus (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}')$ puis $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}' \oplus (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}')$.

Une correction de l'exercice 11 *énoncé*

> *Dans cet exercice, une fois de plus, on confond une matrice* A *et son endomorphisme canoniquement associé, ce qui permet de parler de « noyau et image d'une matrice », et même de parler de « la matrice de* A *dans une autre base »…*

1. ➟ La matrice A est non nulle, donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) \neq \mathbb{R}^3$, ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A})) < \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A})) \leqslant 2$.
   ➟ De plus, de $\mathrm{A}^2 = 0_3$, on peut déduire que $\mathrm{Im}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{A})$,

   > *Il est un exercice classique (voir la question (2) de l'exercice de cours 2.6) de prouver que si* $f \circ g = 0$, *alors* $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

   donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A}))$.
   Autrement dit, grâce au théorème du rang, $3 - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A}))$ ce qui donne $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A})) \geqslant \frac{3}{2}$.
   ➟ On peut conclure que $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A})) = 2}$.

2. *L'idée est de trouver la dimension de F en remplaçant A par une matrice beaucoup plus simple qui représenterait A (ou plutôt son endomorphisme canoniquement associé) dans une base bien choisie.*
On va voir qu'on peut carrément trouver une base dans laquelle A a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

➟ De la question précédente, on déduit grâce au théorème du rang que $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 1$. Prenons un vecteur non nul X dans $\mathrm{Im}(A)$, alors $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(X)$.
On sait que $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$, donc $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Comme $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2, on peut compléter en un base (X, Y) de $\mathrm{Ker}(A)$.
Mais d'autre part $X \in \mathrm{Im}(A)$ donc il existe $T \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = AT$, et $T \notin \mathrm{Ker}(A)$ puisque $AT = X \neq 0$.
Ainsi (X, Y, T) est libre, puisque (X, Y) est libre et $T \notin \mathrm{Vect}\,(X, Y)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans cette base, A (ou plutôt l'endomorphisme canoniquement associé à A) a pour matrice

$$\begin{aligned} B &= \underset{(X,Y,T)}{\mathrm{Mat}}\,(AX, AY, AT) = \underset{(X,Y,T)}{\mathrm{Mat}}\,(0, 0, X) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

➟ Considérons l'ensemble

$$D = \{\, M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM + MB = 0_3 \,\}.$$

En posant $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ on constate que

$$\begin{aligned}
M \in G &\iff BM + MB = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \\
&\iff M = a(E_{1,1} - E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3}.
\end{aligned}$$

Donc en bref, les cinq vecteurs de la combinaison linéaire ci-dessus forment une base de G, ce qui donne $\dim(G) = 5$.

- Enfin, comme A et B sont les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes, il existe une matrice inversible de changement de bases P qui vérifie $A = PBP^{-1}$.

  Montrons que l'application $\psi : M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme de F sur G.

  - La linéarité de ψ provient des propriétés du produit matriciel (je vous laisse le vérifier).
  - Si M est dans F, alors $P^{-1}MP$ est dans G car si $M \in F$ alors

$$\begin{aligned}
AM + MA = 0_3 &\iff \left(PBP^{-1}\right) M + M \left(PBP^{-1}\right) = 0_3 \\
&\iff PBP^{-1}M + MPBP^{-1} = 0_3 \\
&\iff BP^{-1}MP + P^{-1}MPB = 0_3 \quad \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1} \textit{ et à droite par } P\textit{)} \\
&\iff B\left(P^{-1}MP\right) + \left(P^{-1}MP\right)B = 0_3 \\
&\iff P^{-1}MP \in G.
\end{aligned}$$

  - L'application $\phi : N \mapsto PNP^{-1}$ est pour les mêmes raisons que ci-dessus une application de G dans F, et $\phi \circ \psi$ est l'identité de F. Donc ψ est bien une bijection de F dans G.

On conclut finalement que F et G sont isomorphes, donc que $\dim(F) = \dim(G) = 5$.

Une correction de l'exercice 12 *énoncé*

Tout d'abord, on remarque que

$$(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E) = f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{id}_E,$$

et

$$(f - b\,\mathrm{id}_E) \circ (f - a\,\mathrm{id}_E) = f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{id}_E,$$

donc l'énoncé nous donne

$$(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E) = 0,$$

mais aussi

$$(f - b\,\mathrm{id}_E) \circ (f - a\,\mathrm{id}_E) = 0.$$

1. Pour montrer que

$$\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) = E.$$

on va montrer que

(a) $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$,
(b) $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) = E$.

> *Dans cet exercice, on ne sait pas si E est de dimension finie, donc on ne peut pas utiliser les dimensions, ni la concaténation des bases.*

(a) ➟ Tout d'abord $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc ils contiennent le vecteur nul, d'où $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) \supset \{0_E\}$.

Quand F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E*, l'inclusion* $\{0_{\mathrm{E}}\} \subset \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ *est tellement évidente qu'on n'en parle même pas la plupart du temps. Ainsi montrer l'égalité* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ *consiste en général à prendre* x *dans* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ *et à montrer que* $x = 0_{\mathrm{E}}$*.*

➟ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$, alors

$$x \in \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}),\ \text{donc } f(x) = ax,$$
$$x \in \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}),\ \text{donc } f(x) = bx.$$

Bien enregistrer que

$$x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \Longleftrightarrow u(x) = \lambda x.$$

donc $ax = bx$, d'où $(a-b)x = 0_{\mathrm{E}}$. Or $a \neq b$, donc on peut conclure que $x = 0_{\mathrm{E}}$.

➟ On a donc établi que

$$\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \{0_{\mathrm{E}}\}.$$

(b) ➟ *Quand* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E*, l'inclusion* $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$ *est tellement évidente qu'on n'en parle même pas la plupart du temps.*
Ainsi, montrer l'égalité $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$ *consiste en général à prendre* x *dans* E *et à montrer que* $x \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$*, autrement dit à montrer qu'il existe* x_{F} *dans* F*, et* x_{G} *dans* G *tels que* $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$*.*

Soit $x \in \mathrm{E}$, cherchons y dans $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$, et z dans $\mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ tels que $x = y + z$.

Phase d'analyse : supposons qu'on dispose de y dans $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$, et z dans $\mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ tels que $x = y + z$. Alors en composant par f, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y+z) \\ &= f(y)+f(z) \quad \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ &= ay+bz \quad \textit{(car } y \in \operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E), \textit{ et } z \in \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)\textit{)} \end{aligned}$$

On obtient les égalités (L1) : $ay+bz = f(x)$ et (L2) : $y+z = x$. En effectuant (L1)$-a$(L2), on obtient $(b-a)z = f(x)-ax$, puis comme $a \neq b$,

$$\begin{aligned} z &= \frac{f(x)-ax}{b-a} \quad \textit{(cette écriture est en vérité impropre, on ne divise pas un vecteur par un scalaire)} \\ &= \frac{1}{b-a}(f(x)-ax). \end{aligned}$$

De la même manière on obtient

$$y = \frac{1}{a-b}(f(x)-bx).$$

La phase d'analyse est achevée : on a donc trouvé les expressions nécessaires, ou plus prosaïquement les seules expressions possibles, pour y et z. La phase de synthèse consiste à vérifier parmi ces valeurs nécessaires (ici il n'y a pas le choix) lesquelles sont bien solutions de notre problème.

Phase de synthèse : montrons que les vecteurs $y = \frac{1}{a-b}(f(x)-bx)$ et $z = \frac{1}{b-a}(f(x)-ax)$ vérifient bien :

$$\begin{cases} y \in \operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \\ z \in \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) \\ x+y = z. \end{cases}$$

Ici la bonne idée est de remarquer que

$$y = \frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id_E})(x)$$
$$\textit{et } z = \frac{1}{b-a}(f - a\,\mathrm{id_E})(x).$$

- Tout d'abord

$$\begin{aligned}(f - a\,\mathrm{id_E})(y) &= (f - a\,\mathrm{id_E})\left(\frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id_E})(x)\right)\\ &= \frac{1}{a-b}(f - a\,\mathrm{id_E})((f - b\,\mathrm{id_E})(x))\\ &= \frac{1}{a-b}\underbrace{((f - a\,\mathrm{id_E})\circ(f - b\,\mathrm{id_E}))}_{=0}(x)\\ &= 0_{\mathrm{E}} \text{ donc } y \in \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id_E}).\end{aligned}$$

- On montre de même que $z \in \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id_E})$, en remarquant en passant que

$$\begin{aligned}(f - b\,\mathrm{id_E})\circ(f - a\,\mathrm{id_E}) &= f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{id_E}\\ &= (f - a\,\mathrm{id_E})\circ(f - b\,\mathrm{id_E}) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.\end{aligned}$$

- Enfin,

$$\begin{aligned}y + z &= \frac{1}{a-b}(f(x) - bx) + \frac{1}{b-a}(f(x) - ax)\\ &= \frac{1}{a-b}(f(x) - bx) - \frac{1}{a-b}(f(x) - ax)\\ &= \frac{1}{a-b}(f(x) - bx - f(x) + ax)\\ &= \frac{1}{a-b}((a-b)x)\\ &= x \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

On a donc prouvé que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id_E}) + \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id_E}) = \mathrm{E}$.

On peut enfin conclure que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id_E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id_E}) = \mathrm{E}$.

Une correction de l'exercice 13 *énoncé*

- Supposons que $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$, et montrons que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)$.
  C'est une double-inclusion.
  - La première $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(f^2)$ est évidente car si $x\in\mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x)=0$, donc a fortiori $f(f(x))=0$, c'est-à-dire $f^2(x)=0$, ce qui prouve que $x\in\mathrm{Ker}(f^2)$.
  - Réciproquement, si $x\in\mathrm{Ker}(f^2)$, alors $f^2(x)=0$, c'est-à-dire $f(f(x))=0$. Ainsi $f(x)\in\mathrm{Ker}(f)$.
    Mais par définition, $f(x)$ est aussi dans $\mathrm{Im}(f)$, donc $f(x)$ est dans $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$.
    Or on a supposé que cette intersection est réduite au vecteur nul, donc $f(x)=0$, et on peut conclure que $x\in\mathrm{Ker}(f)$, C.Q.F.D.
- Supposons que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)$, et montrons que $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$.
  Soit $x\in\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)$, montrons que $x=0$.
  Le vecteur x est dans $\mathrm{Im}(f)$ donc il existe $y\in\mathrm{E}$ tel que $x=f(y)$, mais il est aussi dans $\mathrm{Ker}(f)$, donc $f(x)=0$. Ainsi $f(f(y))=f^2(y)=0$, donc $y\in\mathrm{Ker}(f^2)$.
  Or on a supposé que $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$, donc $y\in\mathrm{Ker}(f)$, d'où $f(y)=0$. Ainsi, comme $x=f(y)$, on a bien prouvé que $x=0$.

Une correction de l'exercice 14 *énoncé*

1. On suppose donc que $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(f^2)$.
   - Montrons que $\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)$.
     - D'une part, si $y\in\mathrm{Im}(f^2)$, alors il existe $x\in\mathrm{E}$ tel que $y=f^2(x)=f(f(x))$, donc en particulier y est de la forme $y=f(\square)$, ce qui prouve que $y\in\mathrm{Im}(f)$.
       Ainsi $\mathrm{Im}(f^2)\subset\mathrm{Im}(f)$.
     - De plus, on sait que $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(f^2)$, donc le rang étant la dimension de l'image, $\dim(\mathrm{Im}(f))=\dim(\mathrm{Im}(f^2))$.
     - L'inclusion et l'égalité des dimensions permettent de conclure que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(f^2)$.
   - Montrons que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f)$.

- D'une part, si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_{\mathrm{E}}$, donc en particulier $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}}$, d'où $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
  Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.

  > *Les inclusions $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ sont vraies pour tout endomorphisme f. On peut même montrons que les $\mathrm{Ker}(f^k)$ et les $\mathrm{Im}(f^k)$ forment des suites croissante pour l'une, et décroissante pour l'autre*
  >
  > $$\mathrm{Ker}(f) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \subset \cdots,$$
  > $$\mathrm{Im}(f) \supset \cdots \supset \mathrm{Im}(f^k) \supset \mathrm{Im}(f^{k+1}) \supset \cdots.$$

- De plus, on sait que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$, donc par le théorème du rang appliqué aux endomorphismes f et f^2, on obtient

  $$\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f^2) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2)),$$

  donc comme on sait que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$, on en déduit que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Im}(f^2))$.
- L'inclusion et l'égalité des dimensions permettent de conclure que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

2. ➟ D'une part, grâce au théorème du rang, on a directement

   $$\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

   ➟ D'autre part, montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors $f(x) = 0$ et il existe $w \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(w)$.
   Ainsi $f^2(w) = f(f(w)) = f(x) = 0_{\mathrm{E}}$ donc $w \in \mathrm{Ker}(f)$, or $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, donc $w \in \mathrm{Ker}(f)$, et par conséquent $x = f(w) = 0_{\mathrm{E}}$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 15

énoncé

1. L'espace E est de dimension finie, donc le théorème du rang nous donne d'ores et déjà la complémentarité des dimensions de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$:

   $$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{E}).$$

2. Il reste à montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont en somme directe, ce pour quoi il suffit de prouver que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.

   Pour cela, prenons x dans $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$ et montrons que $x = 0_E$.

   Comme $x \in \mathrm{Ker}(u)$, on sait que $u(x) = 0_E$, et $x \in \mathrm{Im}(u)$ entraîne qu'il existe $t \in E$ tel que $x = u(t)$.

   Mais alors $u^2(t) = u(u(t)) = u(x) = 0_E$, donc $\boxed{t \in \mathrm{Ker}\left(u^2\right)}$.

   - Or $\mathrm{rg}\left(u^2\right) = \mathrm{rg}(u)$, donc avec le théorème du rang on montre que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^2\right)\right)$.

     Mais il est classique (je vous laisse en retrouver la preuve en une ligne) que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}\left(u^2\right)$, donc étant de même dimensions, ces deux noyaux sont égaux.

   Ainsi notre vecteur t dont on a prouvé au-dessus qu'il est dans $\mathrm{Ker}\left(u^2\right)$ est aussi dans $\mathrm{Ker}(u)$, puisque $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\left(u^2\right)$.

   Par conséquent $u(t) = 0_E$, et comme $x = u(t)$, on conclut que $x = 0_E$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 16 *énoncé*

(i) On suppose d'abord que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$.

En composant la première égalité par v à gauche, on obtient $(v \circ u) \circ v = v \circ u$, ou encore en utilisant cette fois la seconde égalité $v \circ v = v$, C.Q.F.D.

Les rôles de u et v étant symétriques, on obtient aussi $u \circ u = u$, donc u et v sont des projecteurs.

Soit ensuite $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors la deuxième égalité donne $v(u(x)) = v(x)$, donc $0 = v(x)$, donc $x \in \mathrm{Ker}(v)$. On vient de montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$, et ici aussi la symétrie des rôles de u et v prouve l'inclusion inverse, donc l'égalité.

(ii) Réciproquement, supposons que u et v sont des projecteurs de E, et que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(v)$.

Soit $x \in E$, v étant un projecteur de E, x peut s'écrire $x = y + z$ avec

$y \in \mathrm{Im}(v)$ et $z \in \mathrm{Ker}(v)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} v(x) &= v(y+z) = v(y) + v(z) = v(y) \\ &= y \quad \textit{(car } v \textit{ est un projecteur donc } \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}_E)\textit{).} \end{aligned}$$

donc $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(y)$.
D'autre part

$$\begin{aligned} u(x) &= u(y) + u(z) \\ &= u(y) + 0_E = u(y) \quad \textit{(puisque } z \textit{ est dans le noyau de } v \textit{ qui est aussi celui de } u\textit{),} \end{aligned}$$

donc on a prouvé que $(u \circ v)(x) = u(x)$.
On a démontré que $u \circ v = u$, et l'argument de symétrie déjà invoqué permet d'affirmer qu'on a de même $v \circ u = v$.

Une correction de l'exercice 17

énoncé

Première méthode : soit r un entier tel que $u^r = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{r-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Alors il existe un vecteur $e \in E$ tel que $u^{r-1}(e) \neq 0_E$.
Montrons alors que $(e, u(e), \dots, u^{r-1}(e))$ est une famille libre.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}) \in \mathbb{K}^r$ tel que les λ_k ne sont pas tous nuls, et

$$(E) \quad : \quad \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k u^k(e) = 0_E.$$

Comme les λ_k ne sont pas tous nuls, on peut noter p le plus petit entier de $[\![0\ ;\ r-1]\!]$ tel que $\lambda_p \neq 0$, autrement dit tel que $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$ et $\lambda_p \neq 0$.
Ainsi dans (E) il ne reste que

$$(E) \iff \sum_{k=p}^{r-1} \lambda_k u^k(e) = 0_E, \text{ c'est-à-dire } \lambda_p u^p(e) + \cdots + \lambda_{r-1} u^{r-1}(e) = 0_E.$$

Alors en composant (E) par u^{r-1-p}, on obtient

$$\lambda_p u^{r-1}(e) + \lambda_{p+1} u^r(e) + \cdots + \lambda_{r-1} u^{2(r-1)}(e) = 0_E,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_p u^{r-1}(e) = 0_{\mathrm{E}}, \text{ car } u^k = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})} \text{ dès que } k \geqslant r.$$

Or par hypothèse $u^{r-1}(e) \neq 0_{\mathrm{E}}$, donc $\lambda_p = 0$, ce qui contredit l'hypothèse initiale sur λ_p.

Deuxième méthode : (avec les résultats sur la diagonalisation des endomorphismes).

L'endomorphisme u est nilpotent, donc admet pour polynôme annulateur un polynôme de la forme X^r. Par conséquent, il a pour unique valeur propre possible (et certaine puisqu'il en au moins une dans $\mathbb{C}$) 0.

Son polynôme caractéristique est donc X^n, et alors le théorème de Cayley-Hamilton permet d'affirmer que u^n est l'endomorphisme nul.