## Questions de cours

➟ Définir la convergence de $\int_a^b f$, où $f$ est continue par morceaux sur $[a\,;\,b[$, puis $]a\,;\,b[$.

- Si $f$ est continue par morceaux sur $\mathrm{I}=[a\,;\,b[$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente lorsque $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie quand $x$ tend vers $b$ par valeurs inférieures.
- Si $f$ est continue par morceaux sur $\mathrm{I}=]a\,;\,b[$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente lorsqu'il existe un réel $\gamma \in ]a\,;\,b[$ pour lequel $\int_a^\gamma f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\gamma^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent.

  Dans ce cas, pour tout $c \in ]a\,;\,b[$, $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent, et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

➟ Définir une fonction intégrable sur un intervalle.

On dit qu'une fonction est intégrable sur I lorsque

- elle est continue par morceaux sur I,
- son intégrale sur I est **absolument** convergente.

➟ Quelles sont les fonctions intégrables de référence ?

- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable « en $\pm\infty$ » si, et seulement si, $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha)>1$,
- $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable « en $a$ » si, et seulement si, $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha)<1$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0\,;\,+\infty[$ si, et seulement si, $\mathbb{R}\mathrm{e}(\alpha)>0$.
- Le logarithme est intégrable sur $]0\,;\,1]$.

➟ Donner les trois critères de comparaison.

**Critère de domination :**

**Si**
- $f$ et $g$ sont continues par morceaux sur I,
- $\forall x \in \mathrm{I},\ |f(x)| \leqslant |g(x)|$,

**alors** l'intégrabilité de $g$ sur I implique celle de $f$ sur I.

**Critère de domination :**

**si**
- $f$ et $g$ sont continues par morceaux sur $[a\,;\,b[$ (*resp.* $]b\,;\,a]$),
- $f = \underset{b}{\mathrm{O}}(g)$,
- $g$ est intégrable sur $[a\,;\,b[$ (*resp.* sur $]b\,;\,a]$),

**alors** $f$ est intégrable sur $[a\,;\,b[$ (*resp.* sur $]b\,;\,a]$).

**Critère d'équivalence :**

**si**
- $f$ et $g$ sont continues par morceaux sur $[a\,;\,b[$ (*resp.* $]b\,;\,a]$),
- $f \underset{b}{\sim} g$,

**alors** $f$ est intégrable sur $[a\,;\,b[$ (*resp.* sur $]b\,;\,a]$) si, et seulement si $g$ l'est aussi.

➠ **Si**
- les fonctions $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$,
- $f \times g$ a une limite finie à droite en $a$ ainsi qu'à gauche en $b$,

**alors**
- $\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature,
- en cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \Big[f \times g\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

où on note $\Big[f \times g\Big]_a^b = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} b} f(x)g(x) - \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x)g(x)$.

## Exercice 1

Étudier la nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}(t)\ln(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)}\mathrm{d}\ t$.

## Exercice 2

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}\,t$.

## Exercice 3

Montrer que la fonction $\theta \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\tan\theta}}$ est intégrable sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

## Exercice 4

Étudier l'intégrabilité sur $]0\ ;+\infty[$ de $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.

## Exercice 5

La fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2\ ;+\infty[$ ?

## Exercice 6

Soit $a>0$, la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0\ ;+\infty[$ ?

## Exercice 7

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}\,t$.
2. Calculer la valeur de cette intégrale en utilisant le changement de variable $u=\frac{1}{t}$.

## Exercice 8

Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente, et la calculer :

$$\int_0^{\pi} \sin(t)\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

## Exercice 9

Montrer que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x^4}\,\mathrm{d}x$ converge, et en posant $y = x^3$, montrer que $\mathrm{I} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{y(y+1)}\,\mathrm{d}y$, puis calculer la valeur de I.

## Exercice 10

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de $\mathrm{I}_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En posant $x = \frac{1}{u}$, montrer que $\mathrm{I}_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$, puis à l'aide du changement $v = u - \frac{1}{u}$, calculer $\mathrm{I}_1$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_{n+1} = \frac{4n-1}{4n}\mathrm{I}_n$.
   (b) Calculer alors $\mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sous forme d'un produit.
4. En déduire la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

## Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \sin^{2n}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de $\mathrm{I}_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et calculer $\mathrm{I}_0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{I}_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\mathrm{I}_{n-1}$.
3. Déterminer un équivalent de $\frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} - 1$ et en déduire la limite de $\mathrm{I}_n$.

### Exercice 12

Soit $f$ continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$, montrer que si $f$ admet une limite finie $\ell$ en $+\infty$ et si $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\ell = 0$.

### Exercice 13 – Centrale

1. Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.
2. Trouver une relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$.
3. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{1/3}}$.

### Exercice 14 – Mines

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $f$ une fonction continue et positive sur $[a\,;+\infty[$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante qui tend vers $+\infty$ qui vérifie $u_0 \geqslant a$.
   Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, la série de terme général $\int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x \sin^2(x)}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

### Exercice 15 – Mines

Étudier l'intégrabilité sur $]0\,;1[$ de $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$.

### Exercice 16 – Mines

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n}\mathrm{d}t$.

1. Trouver une relation entre $\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{I}_{n+1}$.
2. Déterminer un équivalent de $\mathrm{I}_n$. Nature de la série $\sum \mathrm{I}_n$ ?

### Exercice 17 – Mines

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$.

### Exercice 18 – Mines

Nature et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

### Exercice 19 – ENS

Soit $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $u$ et $u'$ soient de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $u(x) \xrightarrow[x \longrightarrow \pm\infty]{} 0$.
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (u(x))^2 \leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \times \int_{-\infty}^{+\infty} u'^2\right)^{1/2}.$$

### Exercice 20 – X ESPCI

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$ est-elle convergente ? Absolument convergente ?

### Exercice 21 – X-ESPCI

Étudier la convergence et la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^a)}{x^b}\mathrm{d}x$ selon les valeurs des réels strictement positifs $a$ et $b$.

## Solutions

### Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

- La fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(t)\ln(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)}$ est continue sur $]0\ ;\ 1]$, comme rapport de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- « En 0 » :

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2}\Big((1+t+o(t)) - (1-t+o(t))\Big)\\ &\underset{t\to 0}{=} t + o(t) \underset{t\to 0}{\sim} t,\end{aligned}$$

et $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t \underset{t\to 0}{=} o(\sqrt{t})$, donc $\sqrt{t} - \sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} \sqrt{t}$.

> *Rappelons qu'une somme de termes est équivalente au terme dominant.*

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{sh}(t)\ln(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)} &\underset{t\to 0}{\sim} \frac{t\times\ln(t)}{\sqrt{t}} \quad \textit{(rappelons qu'équivalences et produits, et donc les fractions, font « bon ménage » !)}\\ &= \sqrt{t}\ln(t) \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} 0.\end{aligned}$$

donc :

> **(un argument :)** *la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(t)\ln(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)}$ est prolongeable par continuité sur $[0\ ;\ 1]$ donc intégrable sur $]0\ ;\ 1]$ ;*
>
> **(autre argument :)** $\dfrac{\mathrm{sh}(t)\ln(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}(1)$, *et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0\ ;\ 1]$ donc par équivalence la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(t)\ln(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)}$ est intégrable sur $]0\ ;\ 1]$.*

Donc l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}(t)\ln(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)}\mathrm{d}\ t$$

converge.

## Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

- La fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
- Sur $]0\,;1]$.
  Pour tout $t \in ]0\,;1]$, $\left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \leqslant 1$, et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0\,;1]$, donc $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est intégrable sur $]0\,;1]$.
- Sur $[1\,;+\infty[$.
  $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, donc $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
- On peut conclure que $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Donc a fortiori, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}\,t$ converge.

## Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

- $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\tan\theta}}$ est continue sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, comme composée de
  - tan, qui est continue sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,
  - à valeurs dans $\tan\left(\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\right) = ]0\,;+\infty[$,
  - par $\square \mapsto \square^{-\frac{1}{2}}$ qui est continue sur $]0\,;+\infty[$.
- Sur $\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ (« en 0 »).
  $\tan(\theta) \underset{\theta\to0}{\sim} \theta$, donc $\frac{1}{\sqrt{\tan\theta}} \underset{\theta\to0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\theta}}$.
  Or $\theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{\theta}} = \frac{1}{\theta^{1/2}}$ est intégrable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ (c'est une fonction de Riemann), donc par équivalence, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\tan\theta}}$ est aussi intégrable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.
- Sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ (« en $\frac{\pi}{2}$ »).
  $\frac{1}{\sqrt{\tan(\theta)}} \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}]{} 0$, donc $\frac{1}{\sqrt{\tan(\theta)}} \underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{=} O(1)$, et $\theta \mapsto 1$ est intégrable sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\tan\theta}}$ est intégrable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, donc elle est intégrable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

## Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

- La fonction $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
- Sur $]0\,;1]$.
  Pour tout $x \in ]0\,;1]$,
$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) &= \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \ln(x^2+1)-\ln(x^2)\\ &= \ln(x^2+1)-2\ln(x)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -2\ln(x) \quad \text{(une somme de termes est équivalente au terme dominant),}\end{aligned}$$
  or $x \mapsto -2\ln(x)$ est intégrable sur $]0\,;1]$ (car ln l'est aussi), donc par équivalence $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est intégrable sur $]0\,;1]$.
- Sur $[1\,;+\infty[$.
  $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, donc par équivalence $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ aussi.
- $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est intégrable sur $]0\,;1]$ et sur $[1\,;+\infty[$, donc elle est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

## Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

- La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est continue sur $]2,+\infty[$.
- Sur $]2\,;3]$.
  $$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} \underset{x\to 2}{\sim} \frac{e^{-2}}{2} \times \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}} \underset{x\to 2}{=} O\left(\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}}\right).$$
  Or $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]2,3]$ car $\dfrac{1}{2} < 1$ donc c'est une fonction de Riemann intégrable sur $]2,3]$.
  Donc, par équivalence, $f$ est intégrable sur $]2,3]$.
- Sur $[3\,;+\infty[$.
  $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$, or $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc sur

$[3,+\infty[$, on en déduit par équivalence que $f$ est intégrable sur $[3,+\infty[$.

On peut conclure que $f$ est intégrable sur $]2,+\infty[$.

## Une correction de l'exercice 6 énoncé

Soit $a$ un réel strictement positif.

On pose pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$.

- $f$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leqslant |\ln(x)|$, et ln est intégrable sur $]0\,;\,1]$, donc $f$ est intégrable sur $]0,1]$.
- $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^a}$, et la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^a}$ est continue sur $[1\,;\,+\infty[$.
  - si $a > 1$,
    - $\frac{\ln(x)}{x^a} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{a+1}{2}}}\right)$,
    - $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{+1}{2}}}$ est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$ car $\frac{a+1}{2} > 1$,
    - donc par domination, $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^a}$ est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$,
    - donc par équivalence $f$ aussi est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$.
  - si $a \leqslant 1$,
    - $\frac{1}{x^a} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln(x)}{x^a}\right)$,
    - $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ n'est pas intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$ car $a > 1$,
    - donc par (la contraposée de la) domination, $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^a}$ n'est pas intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$,
    - et par équivalence, on en déduit que $f$ n'est pas intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$.

  En bref, $f$ est intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$ si, et seulement si, $a > 1$.

## Une correction de l'exercice 7 énoncé

1. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0\,;\,+\infty[$, équivalente en 0 à ln qui est intégrable sur $]0\,;\,1]$, et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^{3/2}}$ (voir le

raisonnement pour les intégrales de Bertrand), donc intégrable finalement sur $]0\,;+\infty[$.

2. Le changement de variables $u=\frac{1}{t}$ ou $t=\frac{1}{u}$, licite car $t\mapsto\frac{1}{t}$ est $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et bijective de $]0\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$, donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t&=\int_{+\infty}^{0}\frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\frac{-\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u=-\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Donc $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t=0$.

## Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

(i) ➟ La fonction $t\mapsto\sin(t)\ln(\sin(t))$ est continue sur $]0\,;\pi[$.

➟ D'une part $\sin(t)\underset{t\to0}{=}\left(t+o\left(t^2\right)\right)\underset{t\to0}{\sim}t$,

$$\begin{aligned}\text{et }\ln(\sin(t))&\underset{t\to0}{=}\ln\left(t+o\left(t^2\right)\right)\underset{t\to0}{=}\ln(t(1+o(t)))\\&\underset{t\to0}{=}\underbrace{\ln(t)}_{\to\infty}+\underbrace{\ln(1+o(t))}_{\to0}\underset{t\to0}{\sim}\ln(t),\end{aligned}$$

donc « compatibilité des équivalences et du produit »

$$\begin{aligned}\sin(t)\ln(\sin(t))&\underset{t\to0}{\sim}t\ln(t)\\&\underset{t\to0}{=}o(1)\quad\textit{(par croissances comparées)}\end{aligned}$$

donc comme

- $t\mapsto t\ln(t)$ et $t\mapsto1$ sont continues par morceaux sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,
- et $t\mapsto1$ est intégrable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

on en déduit par domination que $t \mapsto t\ln(t)$ est intégrable sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, puis comme

- $t \mapsto \sin(t)\ln(\sin(t))$ et $t \mapsto t\ln(t)$ sont continues par morceaux sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$,
- et $t \mapsto t\ln(t)$ est intégrable sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$,

on en déduit par équivalence que $t \mapsto \sin(t)\ln(\sin(t))$ intégrable sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ converge.

- Le changement de variables $u = \pi - t$ *(dont on ne vérifie même pas les conditions tellement il est banal)* dans l'intégrale ci-dessus donne exactement $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\ln(\sin(t))\mathrm{d}t$, donc celle-ci aussi converge.

On peut conclure que $\int_0^{\pi} \sin(t)\ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ converge.

> *Dans cet exercice, vous remarquerez qu'en plus de prouver sa convergence, il faut calculer la valeur de cette intégrale. En général, le calcul de l'intégrale, par divers moyens comme la recherche d'une primitive, un changement de variables, une intégration par parties, etc, donne en même temps la convergence. Ainsi les personnes malveillantes pourraient se moquer de moi, voire me harceler sur les réseaux sociaux, en disant que j'ai fait tout ça pour rien, mais qu'elles sachent que j'ai préféré le faire quand même pour les élèves qui en souhaitent la correction.*

(ii) On applique à l'intégrale $\int_0^{\pi} \sin(t)\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ le changement de variables $u = -\cos(t)$, car $-\cos$ est bien une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0\ ;\ \pi[$ sur $]-1\ ;\ 1[$.

Ce changement de variables donne $\mathrm{d}u = \sin(t)\mathrm{d}t$, $\sin(t) = \sqrt{1-u^2}$ (car $\sin \geqslant 0$ sur $]0\ ;\ \pi[$), et permet d'affirmer que $\int_0^{\pi} \sin(t)\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\int_{-1}^{1} \ln\left(\sqrt{1-u^2}\right)\mathrm{d}u$, et sont égales si elles convergent.

Or pour tout $u \in ]-1\ ;\ 1[$,

$$\ln\left(\sqrt{1-u^2}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1-u) + \ln(1+u))$$

est comme ln est intégrable sur $]0\ ;\ 1]$, on en déduit

- par le changement de variables $t = 1+u$, que $\int_{-1}^{1} \ln(1+u)\mathrm{d}u$ est de même nature que $\int_0^2 \ln(t)\mathrm{d}t$ qui converge et vaut

$$\Big[t\ln(t) - t\Big]_{t\to 0}^{2} = 2\ln(2) - 2,$$

  donc $\int_{-1}^{1} \ln(1+u)\mathrm{d}u = 2\ln(2) - 2$ ;
- de même avec $t = 1-u$, que $\int_{-1}^{1} \ln(1-u)\mathrm{d}u = 2\ln(2) - 2$.

Ainsi, par combinaison linéaire, $\int_{-1}^{1} \ln\left(\sqrt{1-u^2}\right)\mathrm{d}u$ converge et vaut

$$\int_{-1}^{1} \ln\left(\sqrt{1-u^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(2\ln(2) - 2 + 2\ln(2) - 2) = 2\ln(2) - 2.$$

(iii) Donc par changement de variables

$$\int_0^{\pi} \sin(t)\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \ln\left(\sqrt{1-u^2}\right)\mathrm{d}u = 2\ln(2) - 2.$$

## Une correction de l'exercice 9 — *énoncé*

(i) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x+x^4}$ est continue sur $[1\ ;\ +\infty[$. De plus, quand $x$ tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x+x^4} \sim \frac{1}{x^4}$, et $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ est intégrable sur $[1\ ;\ +\infty[$, donc $x \mapsto \frac{1}{x+x^4}$ est intégrable sur $[1\ ;\ +\infty[$, et a fortiori $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x^4}\mathrm{d}x$ converge.

(ii) L'application $x \mapsto x^3$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, de $[1\ ;\ +\infty[$ sur $[1\ ;\ +\infty[$. Le changement de variable $y = x^3$ (qui équivaut à $x = y^{1/3}$) donne $\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x$, donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{3y^{2/3}}\mathrm{d}y$, et transforme l'intégrale I en

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{1/3}+y^{4/3}} \times \frac{1}{3y^{2/3}} \mathrm{d}\,y = \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2/3} \times \left(y^{1/3}+y^{4/3}\right)} \mathrm{d}\,y$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{1}{y+y^2} \mathrm{d}\,y = \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{1}{y(y+1)} \mathrm{d}\,y,$$

et comme on a vu que I converge, cette dernière intégrale est aussi convergente.

(iii) On remarque que pour tout réel $y$ différent de 0 et $-1$, $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$, donc

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{y(y+1)} \mathrm{d}\,y &= \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{1}{y(y+1)} \mathrm{d}\,y \\
&= \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{1}{y(y+1)} \mathrm{d}\,y \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left( \int_1^{A} \frac{1}{y} \mathrm{d}\,y - \int_1^{A} \frac{1}{y+1} \mathrm{d}\,y \right) \\
&= \lim_{A\to+\infty} (\ln(A) - \ln(A+1) + \ln(2)) \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left( \ln(2) - \ln\left(\frac{A+1}{A}\right)\right) \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left( \ln(2) - \ln\left(1+\frac{1}{A}\right)\right) = \ln(2).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{I = \frac{1}{3}\ln(2)}.$$

## Une correction de l'exercice 10

*énoncé*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^4)^n}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et

$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{4n}}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, donc $f_n$ est intégrable sur

2. $u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, et bijective de $]0\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$, donc en posant $x=\frac{1}{u}$,

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = (\dots) = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u,$$

or

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$$

donc par linéarité :

$$2\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$$

ce qui donne le résultat voulu.

La fonction $u \mapsto u-1/u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ de dérivée $u \mapsto 1+1/u^2>0$, donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, et réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[=\mathbb{R}$.
On pose $v=u-1/u$, d'où $v^2+2=\frac{u^4+1}{u^2}$, et $\frac{u^2+1}{u^4+1}=\frac{u^2}{u^4+1}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v^2+2}\,\mathrm{d}v \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

3. Avec une intégration par parties

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= 4n\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= 4n\int_0^{+\infty} \frac{1+x^4-1}{(1+x^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= 4n(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1}).
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{I}_{n+1} = \frac{4n-1}{4n}\mathrm{I}_n$, et

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_1 \prod_{p=1}^{n-1} \left( \frac{4p-1}{4p} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \prod_{p=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{1}{4p} \right).$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence que $\mathrm{I}_n > 0$, donc en prenant le logarithme :

$$\ln(\mathrm{I}_n) = \ln(\mathrm{I}_1) + \sum_{p=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{4p}\right).$$

Or

$$\ln\left(1 - \frac{1}{4p}\right) \underset{p \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{4p}$$

donc par équivalence $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{4p}\right)$ est une série divergente. Comme les termes de cette série sont négatifs, par le théorème de la limite monotone :

$$\sum_{p=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{4p}\right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} -\infty.$$

Ainsi $\ln(\mathrm{I}_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$, et en composant par l'exponentielle, $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

## Une correction de l'exercice 11 *énoncé*

1. La fonction $t \mapsto \sin^{2n}(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0\ ;+\infty[$, et

$$\forall t \in [0\ ;+\infty[,\ \left|\sin^{2n}(t)\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

or $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0\ ;+\infty[$, donc $t \mapsto \sin^{2n}(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0\ ;+\infty[$.
On sait que $\mathrm{I}_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

2. Avec deux intégrations par parties successives, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= 2n\left(\int_0^{+\infty}\left((2n-1)\sin^{2n-2}(t)\cos^2(t)-\sin^{2n}(t)\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t\right)\\ &= 2n\left((2n-1)\mathrm{I}_{n-1}-2n\mathrm{I}_n\right)\end{aligned}$$

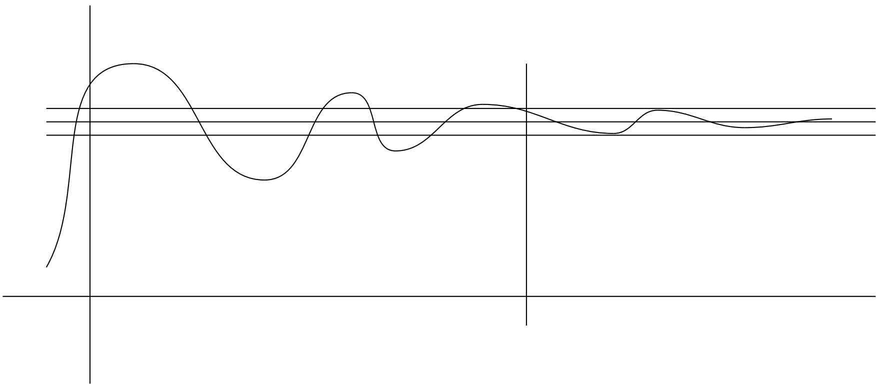
d'où le résultat.

On en déduit que $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_0\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k(2k+1)}{4k^2+1}\right) = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(4k^2+1)}$.

3. $v_n - 1 = \frac{-2n-1}{4n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

$\ln(\mathrm{I}_n) = \sum_{k=1}^{n}\ln(v_k)$, or $\ln(v_n) = \ln(1+(v_n-1)) \sim -\frac{1}{2n}$, donc série divergente à termes négatifs, avec $\sum_{k=1}^{n}\ln(v_k) \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} -\infty$, $-\infty$, d'où $\mathrm{I}_n$ tend vers 0.

## Une correction de l'exercice 12 *énoncé*



Soit $f$ continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$. Supposons que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

➟ Dans le cas où $\ell > 0$, par définition de la limite, il existe un réel $\mathrm{A} > 0$ tel que pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, $f(x) > \frac{\ell}{2}$.

Ainsi pour tout $X \geqslant A$, par croissance de l'intégrale

$$\int_A^X f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_A^X \frac{\ell}{2}\mathrm{d}t = \frac{\ell}{2}(X-A),$$

donc comme $\frac{\ell}{2}(X-A) \xrightarrow[X\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, on en déduit par comparaison que $\int_A^X f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[X\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, donc que $\int_A^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge, et a fortiori que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge aussi.

- Dans le cas où $\ell < 0$, alors $-f$ tend vers $-\ell > 0$, donc d'après le cas précédent, l'intégrale de $-f$ diverge, donc celle de $f$ aussi.

## Une correction de l'exercice 13 *énoncé*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   - De plus

     $$\frac{1}{(1+t^3)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}},$$

     et $t \mapsto \frac{1}{t^{3n}}$ est intégrable sur $[1\ ;\ +\infty[$, donc par équivalence, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   - On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc que l'intégrale définissant $u_n$ est bien convergente.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
   - les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n} = (1+t^3)^{-n}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\ ;\ +\infty[$,
   - et $u(t)\times v(t) = \frac{t}{(1+t^3)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n-1}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ car $3n-1>0$,

   donc grâce à une intégration par parties, comme $u_n = \int_0^{+\infty} u \times v'$ est convergente, on peut affirmer que $u_n = \int_0^{+\infty} u' \times v$ converge aussi, et qu'on a l'égalité :

$$
\begin{aligned}
u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{(1+t^3)^n} &= \int_0^{+\infty} u'(t)\times v(t)\mathrm{d}\,t \\
&= \Big[u(t)\times v(t)\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)\times v'(t)\mathrm{d}\,t \\
&= \left[t\times\frac{1}{(1+t^3)^n}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t\times\left(-n\times 3t^2\times(1+t^3)^{-n-1}\right)\mathrm{d}\,t \\
&= [0-0] + 3n\int_0^{\infty}\frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\mathrm{d}\,t \\
&= 3n\int_0^{\infty}\frac{(1+t^3)-1}{(1+t^3)^{n+1}}\mathrm{d}\,t \ \ \textit{(« l'astuce du belge »)} \\
&= 3n\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+t^3)^n}-\frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}\right)\mathrm{d}\,t \\
&= 3n\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^3)^n}\mathrm{d}\,t - \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}\mathrm{d}\,t\right) \\
&\textit{(car on sait que ces deux intégrales convergent)} \\
&= 3n\left(u_n-u_{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi $u_n = 3n\left(u_n - u_{n+1}\right)$, d'où

$$u_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}u_n = \left(1-\frac{1}{3n}\right)u_n.$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln\left(n^{\frac{1}{3}}u_n\right)$, alors

$$v_n = \frac{1}{3}\ln(n) + \ln(u_n),$$

et

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{1}{3}\ln(n+1)+\ln(u_{n+1}) \\
&= \frac{1}{3}\ln(n+1)+\ln\left((1-\frac{1}{3n})u_n\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3n}\right)+\ln(u_n) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3n}\right)+\underbrace{\frac{1}{3}\ln(n)+\ln(u_n)}_{=v_n}
\end{aligned}$$

donc, grâce au développement limité de $\ln(1+\square)$ en $0$ :

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\left(-\frac{1}{3n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

d'où la sommabilité de la suite $(v_{n+1}-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui entraîne la convergence de la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$, qui enfin par la relation suite-série permet de conclure la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$, alors par composition des limites

$$n^{\frac{1}{3}}u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{e}^{\ell}>0,$$

d'où, en posant $\alpha=\mathrm{e}^{\ell}$, on peut conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^{1/3}}$.

## Une correction de l'exercice 14

*énoncé*

1. ➟ Supposons que $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, et montrons que la série de terme général $\mathrm{I}_n=\int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Soit $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{n=0}^{N} I_n = \sum_{n=0}^{N} \int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t)\mathrm{d}t = \int_{u_0}^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t \textit{ (par la relation de Chasles)}$$

or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, donc $u_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, et $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge donc par définition

$$\int_a^{\square} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[\square\to+\infty]{} \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t,$$

ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} I_n &= \int_{u_0}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t \quad \textit{(Chasles car } f \textit{ est continue sur } [a\,;\,u_0]\textit{)}\\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_{u_0}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \quad \textit{(par composition des limites)}\\ &= \int_{u_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ qui est bien une limite finie,}\end{aligned}$$

donc $\sum I_n$ converge.

- Supposons que la série de terme général $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t)\mathrm{d}t$ converge, et montrons que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
Comme $f$ est continue sur $[a\,;+\infty[$, et $u_0 \geqslant a$, la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ revient à la convergence de $\int_{u_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.
Soit X un réel supérieur à $a$, alors comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe N tel que $X \leqslant u_{N+1}$, ainsi

$$\int_{u_0}^{X} f(t)\mathrm{d}t = \int_{u_0}^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t + \int_{u_{N+1}}^{X} f(t)\mathrm{d}t = \int_{u_0}^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{X}^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Or $f$ est positive continue sur $[a\,;+\infty[$, donc en particulier sur $[X\,;\,u_{N+1}]$, donc par positivité de l'intégrale, $\int_X^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Ainsi

$$\int_{u_0}^{X} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{u_0}^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \int_{u_n}^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t$$ *(avec la relation de Chasles).*

Or la série de terme général $\int_{u_n}^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, à termes positifs, donc

$$\sum_{n=0}^{N} \int_{u_n}^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{u_n}^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\int_{u_0}^{X} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{u_n}^{u_{N+1}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci est vrai pour tout réel $X \geqslant a$, donc la fonction $X \mapsto \int_{u_0}^{X} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée. Or elle est croissante, puisque la fonction $f$ est positive sur $[a\,;+\infty[$, donc par le théorème de la limite monotone, la fonction $X \mapsto \int_{u_0}^{X} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale la fonction $\int_{u_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, C.Q.F.D.

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x\sin^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas.
   D'après la question précédente, comme $f$ est positive, elle est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ si, et seulement si, la série de terme général $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t$.
   Or pour tout $x \in [n\pi\,;(n+1)\pi]$

## Une correction de l'exercice 15 *énoncé*

➟ La fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, donc sa primitive $x \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$, primitive sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, et a fortiori continue sur $]0\,;1]$.

➟ Pour tout $x > 0$

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt + \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt + \ln(x).$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est continue sur $]0\ ;\ 1]$, et tend vers $1$ (voir le développement limité de l'exponentielle en 0) en $0$, donc elle est intégrable sur $]0\ ;\ 1]$.
Ainsi $\int_1^x \frac{e^t-1}{t} dt$ a une limite finie en $0$, donc a fortiori est négligeable devant $\ln(x)$ (qui tend vers l'infini) quand $x$ tend vers $0$. Par conséquent

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \ln(x) + o(\ln(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x),$$

et comme ln est aussi intégrable sur $]0\ ;\ 1]$, on peut conclure par équivalence que fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est intégrable sur $]0\ ;\ 1]$.

## Une correction de l'exercice 16 *énoncé*

On pose $f_n \colon t \in [0, +\infty[ \ \mapsto \frac{t^2}{(1+t^4)^n}$. Comme $f_n(t) \sim \frac{1}{t^{4n-2}}$ au voisinage de l'infini et comme $4n - 2 \geqslant 2$, la fonction $f_n$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale $I_n$ est bien définie.

1. On intègre $I_n$ par parties en dérivant le dénominateur :

$$I_n = \left[\frac{t^3}{3(1+t^4)^n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t^3 \times 4nt^3}{3(1+t^4)^{n+1}} dt = \frac{4n}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^{n+1}} dt$$
$$= \frac{4n}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^2(1+t^4-1)}{(1+t^4)^{n+1}} dt = \frac{4n}{3}\left(I_n - I_{n+1}\right).$$

Il en résulte que $I_{n+1} = \frac{4n-3}{4n} I_n = (1 - \frac{3}{4n}) I_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

2. On déduit de la question précédente que $I_n = I_1 \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{3}{4k})$.

La question revient donc à calculer un équivalent de $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{3}{4k})$.

*On va montrer qu'il existe une constante $k > 0$ et un exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $p_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$, ce qui revient à montrer que la suite de terme général $a_n = n^\alpha p_n$ converge vers une limite strictement positive, on encore que la suite de terme général $b_n = \ln(a_n)$ converge, ce qui, par la relation suite-série, revient à prouver que la série de terme général $c_n = b_{n+1} - b_n$ converge.*

Prenons un réel $\alpha$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $b_n = \ln(n^\alpha p_n)$.
Alors

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{3}{4[n+1]}\right)\right] \\ &= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{3}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{\alpha - 3/4}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Il en résulte que si $\alpha = \frac{3}{4}$, la série de terme général $b_{n+1} - b_n$ converge, donc par la relation suite-série la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers une limite $b$, d'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a = \mathrm{e}^b$ qui est strictement positif donc non nul.
Ainsi $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{n^{3/4}}$, et enfin

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a\mathrm{I}_1}{n^{3/4}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right).$$

On en déduit que la série $\sum \mathrm{I}_n$ diverge.

## Une correction de l'exercice 17

*énoncé*

On pose $f : x \in [0,1[ \,\mapsto \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$. Cette fonction est continue sur $[0,1[$ et vérifie $f(1-h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{h}}$ avec $h \mapsto \frac{1}{4\sqrt{h}}$ intégrable sur $]0,1]$. En effectuant le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif $\varphi : u \in [0,1[ \,\mapsto x = u^2 \in$

$[0,1[$, pour lequel $\mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u$, on obtient

$$\mathrm{I} := \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)\sqrt{1-u^2}}.$$

En effectuant le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif $\psi\colon t \in ]0,\frac{\pi}{2}] \mapsto u = \cos t \in [0,1[$, pour lequel $\mathrm{d}u = -\sin t\mathrm{d}t$, on obtient

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{(1+\cos t)\sqrt{1-\cos^2 t}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t},$$

puisque $\sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t| = \sin t$ sur $]0,\frac{\pi}{2}]$. Enfin, le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif $\theta\colon v \in [0,1[ \mapsto t = 2\arctan(v) \in [0,\frac{\pi}{2}[$, pour lequel $\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}v}{1+v^2}$, ainsi que la relation $\cos t = \frac{1-v^2}{1+v^2}$, fournissent

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{1+\frac{1-v^2}{1+v^2}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}v = \frac{1}{2}.$$

## Une correction de l'exercice 18

énoncé

On pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

Il s'agit d'une fonction continue et paire, et l'équivalent $f(x) \sim \frac{1}{x^{5/2}}$ au voisinage de l'infini prouve que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le changement de variable $x = \varphi(t) := 2\,\mathrm{sh}(t)$ avec $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même montre que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= 2\int_0^{+\infty} (f\circ\varphi)(t)|\varphi'(t)|\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{2\operatorname{ch} t}{(1+4\operatorname{sh}^2 t)\sqrt{4+4\operatorname{sh}^2 t}}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4\operatorname{sh}^2 t}\\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{2t}}{e^{4t}-e^{2t}+1}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Le changement de variable $t=\psi(u)=\frac{1}{2}\ln u$ de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ donne ensuite

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}\\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u-1/2)^2+3/4}\\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(u-1/2)}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{+\infty}\\ &= \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}.\end{aligned}$$

## Une correction de l'exercice 19 *énoncé*

1. L'inégalité $|2uu'|\leqslant u^2+u'^2$ montre que $2uu'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. La fonction $\mathrm{F}\colon x\in\mathbb{R}\mapsto\int_{-\infty}^x 2u(t)u'(t)\mathrm{d}t$ est donc définie sur $\mathbb{R}$, et est de classe $\mathscr{C}^1$, car $u$ l'est, avec $\mathrm{F}'=2uu'=(u^2)'$. Il existe donc une constante $c$ telle que $u^2=\mathrm{F}+c$. Comme $\lim_{-\infty}\mathrm{F}=0$, on a $\lim_{-\infty}u^2=c$, et comme $u^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on ne peut avoir que $c=0$. Il en résulte que $\lim_{-\infty}u^2=\lim_{-\infty}\mathrm{F}=0$, et on en déduit que $\lim_{-\infty}u=0$. On établit le résultat analogue en $+\infty$ en utilisant la fonction $\mathrm{G}\colon x\mapsto\int_x^{+\infty}$, qui est une primitive de $-2uu'$ (ou bien en considérant la fonction $v\colon x\in\mathbb{R}\mapsto u(-x)$).

Finalement,

$$\lim_{\pm\infty} u = 0.$$

2. La question précédente a montré que $\mathrm{F} = u^2$, et l'inégalité de Cauchy et Schwarz montre que

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad (u(x))^2 &= 2\int_{-\infty}^{x} u(t)u'(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2\int_{-\infty}^{x} |u(t)u'(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)u'(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (u(t))^2\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} (u'(t))^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

## Une correction de l'exercice 20 *énoncé*

La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Il suffit donc d'examiner la convergence de $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$. Le changement de variable $t \mapsto \sqrt{t}$ de classe $\mathscr{C}^1$, effectué sur un segment $[1, y]$, suivi d'une intégration par parties, donne

$$\begin{aligned}
\int_1^y \sin(x^2)\mathrm{d}x &= \int_1^{y^2} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}}\right]_1^{y^2} - \int_1^{y^2} \frac{\cos(t)}{4t^{3/2}}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\cos(y^2)}{2y} + \frac{\cos(1)}{2} - \frac{1}{4}\int_1^{y^2} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Il est clair que $\lim_{y\to+\infty} \frac{\cos(y^2)}{y} = 0$, et que $\int_1^{y^2} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$ possède une limite finie quand $y$ tend vers $+\infty$, car la majoration $|\frac{\cos(t)}{t^{3/2}}| \leqslant \frac{1}{t^{3/2}}$ prouve l'intégrabilité de la fonction en jeu. Par conséquent, $\int_1^y \sin(x^2)\mathrm{d}x$ possède une limite finie quand $y$ tend vers $+\infty$, et on a démontré que l'intégrale de Fresnel

$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$ est convergente.

## Une correction de l'exercice 21 *énoncé*

Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(x^a)}{x^b}$ la fonction intégrée. On sépare la résolution en deux parties.

**Étude « en 0 » :** comme $f(x) \sim \frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}}$ au voisinage de zéro, et comme les fonctions intégrées y sont de signe fixe, l'intégrale $\int_{]0,1]} f$ converge si et seulement si $b - a < 1$.

**Étude « en $+\infty$ » :** soit $M > 1$. Le changement de variable $u = x^a$, qui est licite car $x \mapsto x^a$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, strictement croissante (puisque $a > 0$), et bijective de $[1\,;+\infty[$ sur lui-même, montre que

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

est de même nature que

$$\frac{1}{a} \times \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^c}\mathrm{d}u, \quad \text{avec } c = \frac{b+a-1}{a}.$$

Cette dernière intégrale est la partie imaginaire de $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^c}\mathrm{d}t$.

On pose $u'(t) = \mathrm{e}^{it}$, d'où $u(t) = -i\mathrm{e}^{it}$, et $v(t) = \frac{1}{t^c}$ donc $v'(t) = \frac{-c}{t^{c+1}}$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$, et

$$|u(t) \times v(t)| = \frac{1}{t^c} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^c}\mathrm{d}t$$

est de même nature que

$$-ic \times \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^{c+1}}\mathrm{d}t$$

qui de la même manière est de même nature que

$$\text{Cstte} \times \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^{c+2}} \mathrm{d}\, t,$$

et cette dernière intégrale est convergente si, et seulement si, converge absolument car $\left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{t^{c+1}}\right| = \frac{1}{t^{c+1}}$ qui est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ car $c+1>1$.

Donc par l'intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^c} \mathrm{d}\, t$ converge, d'où la convergence des deux intégrales de départ.

Or on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^c} \mathrm{d}u$ converge si et seulement si $c>0$ (voir l'exercice **??**). Comme $a>0$, on a $\lim_{\mathrm{M}\to+\infty} \mathrm{M}^a = +\infty$, et $\int_{[1,+\infty[} f$ converge si et seulement si $b+a-1>0$. En conclusion, l'intégrale proposée converge si et seulement si $1-a<b<1+a$, ou encore $|b-1|<a$.