



- ⇒ Rappelons que la phrase « *le polynôme caractéristique de  $\square$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  » est une manière savante de dire que  $\square$  a toutes ses valeurs propres dans  $\mathbb{K}$ .*
- ⇒ Bien comprendre que la [proposition 12.16](#) est en deux parties :
  - ⊕ la première affirme que si jamais on trouve un polynôme annulateur de  $\square$  scindé à racines simples, alors  $\square$  est diagonalisable ;
  - ⊕ et de plus, si  $\square$  est diagonalisable alors en particulier le polynôme  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(\square)} (X - \lambda)$  annule  $\square$ .
- ⇒ Même si le premier réflexe pour trouver les valeurs propres d'une matrice  $M$  est de chercher le polynôme caractéristique, il est parfois plus facile de trouver les valeurs propres et leurs ordres de multiplicité par des considérations comme
  - ⊕ la somme des lignes de  $M$  est constante, donc  $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \square \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  
donc  $\square$  est une valeur propre de  $M$  ;
  - ⊕ la trace de  $M$ , on remarque une colonne où seul le terme de la diagonale est non nul, *etc*,et d'en déduire le polynôme caractéristique.
- ⇒ Lorsqu'une matrice est diagonalisable, alors elle est semblable à la matrice diagonale dont la diagonale est constituée des valeurs propres, chacune étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité (algébrique ou géométrique) avec pour matrice de passage  $P$  la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres respectifs aux valeurs propres de la diagonale.  
C'est entre autres ce qu'affirme la [remarque 12.12](#).

### Questions de cours 1

1. Définir une valeur propre d'un endomorphisme, et ses ordres de multiplicité algébrique et géométrique. Comparer ces deux ordres.
2. Définir un endomorphisme diagonalisable, et une matrice diagonalisable.
3. Dans un espace vectoriel de dimension finie, donner quatre caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable (dont une avec un polynôme annulateur).
4. Donner une condition suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

### Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ?  
 Déterminer les puissances de A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 2

1. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de la matrice A ci-contre. Est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que la matrice  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  est semblable à A.
3. Déterminer  $B^n$  pour tout entier naturel  $n$ , et en déduire  $A^n$ .

### Exercice 3

1. Diagonaliser  $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ , et en déduire l'expression de  $A^n$ .
2. On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites définies par  $u_0 = v_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déduire de la première question l'expression de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

## Colles des semaines 14. Réduction des endomorphismes et matrices carrées

### Exercice 4

1. Diagonaliser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .
2. En déduire que son commutant (c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec  $A$ ) est  $\text{Vect}(I_2, A)$ .

### Exercice 5

On note  $J_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1, et pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on note  $M(a, b)$  la matrice dont les termes diagonaux valent  $a$ , et dont les autres coefficients valent  $b$ .

1. Donner le rang et le polynôme caractéristique de  $J_n$ . Montrer que  $J_n$  est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.
2. En déduire que  $M(a, b)$  est diagonalisable, donner ses valeurs propres et sous-espaces propres.

### Exercice 6

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $M = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $M$  est diagonalisable ; déterminer son spectre.

### Exercice 7

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + I_n$  ne soit pas inversible.

1. Montrer qu'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  tel que  $AX = iX$  et  $X \neq 0$ .
2. Montrer que  $A$  est semblable sur  $\mathbb{R}$  à une matrice de la forme

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & B \\ -1 & 0 & \\ \hline 0_{n-2,2} & & C \end{array} \right), \text{ avec } B \in \mathcal{M}_{2,n-2}(\mathbb{R}), \\ \text{et } C \in \mathcal{M}_{n-2,n-2}(\mathbb{R}).$$

### Exercice 8

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , avec  $n \geq 3$ , de rang 2, de trace nulle et telle que  $A^n \neq 0_n$ .

Montrer que  $A$  est diagonalisable et donner son spectre.

### Exercice 9

Soient  $n \geq 2$  un entier pair et  $A = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & \cdots & n \\ 2 & n-1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & n-2 & 3 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & n & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ .

Déterminer le rang de  $A$ .

Montrer que  $A$  est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

### Exercice 10

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice diagonalisable et  $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ .

Donner les valeurs propres de  $B$  et la dimension des sous-espaces propres correspondants.

À quelle condition  $B$  est-elle diagonalisable ?

### Exercice 11

Soient  $\implies n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ ,

$\implies A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les termes valent 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls,

$\implies$  et l'application  $u : M \in \mathcal{M}_n \mapsto M + \text{tr}(M)A$ .

1. Prouver que le polynôme  $X^2 - 2X + 1$  est annulateur de  $u$ .
2. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ? Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

## Colles des semaines 14. Réduction des endomorphismes et matrices carrées

### Exercice 12 – Mines-Ponts 2019

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de  $E$  admet un supplémentaire stable par  $u$ .

### Exercice 13 – Mines-Ponts 2019

Une matrice stochastique est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que la somme des coefficients sur chacune de ses lignes est égale à 1.

1. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont stochastiques, alors  $A \times B$  l'est aussi.
2. Vérifier que 1 est une valeur propre de la matrice stochastique  $A$  et que toute valeur propre complexe de  $A$  a un module inférieur ou égal à 1.
3. Trouver toutes les matrices stochastiques  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversibles telles que  $A^{-1}$  soit stochastique.

### Exercice 14 – Mines-Ponts 2019

On considère une suite complexe  $(a_n)_{n \geq 1}$  telle que  $a_2 \neq 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on introduit la matrice  $A_n$  ci-contre dont on note  $\chi_n$  le polynôme caractéristique :

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer  $\chi_2$  et  $\chi_3$ .
2. Montrer que  $\chi_n$  est divisible par  $X^{n-2}$ .
3. On pose  $b_n = \sum_{k=2}^n a_k^2$ . Montrer alors que  $\chi_n = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_n)$ .
4. Selon que  $b_n$  est nul ou non, étudier la diagonalisabilité de  $A_n$ .

## Solutions

### Une correction de l'exercice 1

énoncé



On voit que cette matrice est symétrique réelle, donc le théorème spectral nous permet d'affirmer que cette matrice est diagonalisable.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ 0 & X & 1 \\ -1 & 1 & X+1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + XL_3 - L_2 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 + X(X+1) \\ 0 & X & 1 \\ -1 & 1 & X+1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+1}(-1) \begin{vmatrix} 0 & -2 + X(X+1) \\ X & 1 \end{vmatrix} \\ &= X(-2 + X(X+1)) = X(X^2 + X - 2) \\ &= X(X-1)(X+2), \end{aligned}$$

donc A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes qui sont 0, 1 et -2. On peut en déduire que A est diagonalisable et que les trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Les résolutions successives des systèmes  $AX = 0$ ,  $(A - I_3)X = 0$  et  $(A + 2I_3)X = 0$  donnent

$$E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), E_0(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), E_{-2}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Ainsi } A = PDP^{-1}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Puis par la méthode du pivot, ou méthode de Gauss-Jordan (on transforme

## Colles des semaines 14. Réduction des endomorphismes et matrices carrées

avec des opérations sur les lignes  $(A|I_3)$  en  $(I_3|P^{-1})$  on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & -1/6 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ , ce qui donne :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1/3 + 1/6 (-2)^n & -1/3 - 1/6 (-2)^n & 1/3 - 1/3 (-2)^n \\ -1/3 - 1/6 (-2)^n & 1/3 + 1/6 (-2)^n & -1/3 + 1/3 (-2)^n \\ 1/3 - 1/3 (-2)^n & -1/3 + 1/3 (-2)^n & 1/3 + 2/3 (-2)^n \end{pmatrix}.$$

### Une correction de l'exercice 2

énoncé

1. Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & 12 & -2 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -4 & -8 & x-3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_1 + (x-1)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 12 + (x-1)^2 & -x-1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ 0 & -4(x+1) & x+1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \end{array} \\ &= -(-1) \begin{vmatrix} 12 + (x-1)^2 & -x-1 \\ -4(x+1) & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1) \begin{vmatrix} 12 + (x-1)^2 & -x-1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1) \left[ 12 + (x-1)^2 - (-4)(-x-1) \right] \\ &= (x+1) \left[ 12 + (x^2 - 2x + 1) - 4x - 4 \right] \\ &= (x+1) \left[ x^2 - 6x + 9 \right] = (x+1)(x-3)^2. \end{aligned}$$

Donc  $A$  admet deux valeurs propres : 3 est valeur propre d'ordre 2, et 1 est valeur propre d'ordre 1.

En résolvant  $(A - 3I_3)X = 0$  et  $(A + I_3)X = 0$ , on obtient  $E_3(f) = \text{Vect}(-2,1,4)$  et  $E_{-1}(f) = \text{Vect}(-1,0,1)$ .

La somme des dimensions des sous-espaces propres ne donne pas 3 qui est la dimension de  $\mathbb{R}^3$ , donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

2. On doit montrer qu'il existe une base  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle  $A$  (ou plutôt l'endomorphisme  $u_A$  canoniquement associé à  $A$ ) a pour matrice  $B$ , autrement dit

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(u_A) = \begin{pmatrix} Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

ce pourquoi il faut que

$$\begin{cases} Ae_1 = -e_1 \\ Ae_2 = 3e_2 \\ Ae_3 = e_2 + 3e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} (A + I_3)e_1 = 0 \\ (A - 3I_3)e_2 = 0 \\ (A - 3I_3)e_3 = e_2 \end{cases}$$

On prend pour les deux premiers vecteurs les deux vecteurs propres  $e_1 = (-1,0,1)$  et  $e_2 = (-2,1,4)$  respectivement associés à  $-1$  et  $3$  que l'on a trouvé dans la première question.

Enfin, en résolvant le système de matrice augmentée  $(A - 3I_3|e_2)$ , on constate que le vecteur  $e_3 = (1,0,0)$  convient.

On vérifie de nouveau que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  de la façon de notre choix, par exemple en calculant le déterminant dans la base canonique de la famille :

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

qui vaut  $-1$  en développant par la dernière colonne.

D'où c.q.f.d.

3.  $\Rightarrow$  Par récurrence, on montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B^n$  est de la forme

$$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & u_n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

## Colles des semaines 14. Réduction des endomorphismes et matrices carrées

avec  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 3u_n + 3$ , donc on déduit (suite arithmético-géométrique) que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{3}{2} \times (3^n - 1)$ .

→ Par la formule de changement de base, on pose  $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1, e_2, e_3)$ , et alors

$$A = \underset{\mathcal{C}}{\text{Mat}}(f) = P \times B \times P^{-1}$$

→ Puis par récurrence (ou par changement de base pour  $f^n$  remarquons!), pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A^n = P \times B^n \times P^{-1}$$

et je vous laisse faire le calcul qui donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^n = \begin{pmatrix} 4 \times 3^n - 3 & -10 \times 3^n + 4(-1)^n + 6 & 4 \times 3^n - (-1)^n - 3 \\ -\frac{3}{2} \times 3^n + \frac{3}{2} & 4 \times 3^n - 3 & -\frac{3}{2} \times 3^n + \frac{3}{2} \\ -6 \times 3^n + 6 & 16 \times 3^n - 4(-1)^n - 12 & -6 \times 3^n + (-1)^n + 6 \end{pmatrix}$$

ce qui est vraiment super chouette.

### Une correction de l'exercice 3

énoncé

1. Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$(X - 7)(X - 1) - (-2) \times 4 = X^2 - 8X + 15 = (X - 5) \cdot (X - 3),$$

donc les valeurs propres de  $A$  sont 3 et 5.

La résolution de  $(A - 3I_2)X = 0$  donne  $E_3(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ , et celle

de  $(A - 5I_2)X = 0$  donne  $E_5(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .

2. La matrice  $A$  est dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et possède 2 valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

De plus, d'après les calculs précédents, en notant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  et

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ , on a la diagonalisation suivante de  $A$  :

$$A = P \times D \times P^{-1},$$

dont on tire par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} A^n &= P D^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. (a) De manière évidente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ .

(b) On en déduit par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= X_n = A^n X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2 \times 5^n \\ -3^{n+1} + 4 \times 5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Une correction de l'exercice 4

énoncé

1. On obtient le polynôme caractéristique  $\chi_A = (X-3)(X+2)$  et donc  $\text{Sp}A = \{-2, 3\}$ .

Après résolution des équations  $AX = 3X$  et  $AX = -2X$ , on obtient :

$$E_3 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_{-2} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right).$$

On peut donc conclure que

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}_{=P} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{=D} \times P^{-1},$$

sachant que la méthode de Gauss-Jordan nous donne

$$P^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Notons  $\mathcal{C}(A)$  le commutant de  $A$ .

→ Il est évident que  $I_2$  et  $A$  sont dans  $\mathcal{C}(A)$ , et je vous laisse prouver que  $\mathcal{C}(A)$  est stable par combinaison linéaire, donc on a l'inclusion  $\text{Vect}(I_2, A) \subset \mathcal{C}(A)$ .

→ Réciproquement, soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff AM = MA \iff (PDP^{-1})M = M(PDP^{-1})$$

$$\iff D \times (P^{-1}MP) = (P^{-1}MP) \times D \quad (\text{en multipliant à gauche par } P^{-1} \text{ et à droite par } P).$$

$$\iff D \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times D \quad \begin{matrix} (\text{en posant} \\ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2b = 3b \\ 3c = -2c \end{cases} \iff b = c = 0$$

$$\iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \iff M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\iff M = a \underbrace{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{=U} + d \underbrace{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}}_{=V}$$

$$\iff M \in \text{Vect}(U, V).$$

Ainsi  $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(U, V)$ , et les matrices  $U$  et  $V$  n'étant pas colinéaires, on peut conclure que  $(U, V)$  est une base de  $\mathcal{C}(A)$ , et donc que  $\dim(\mathcal{C}(A)) = 2$ .

→ Comme  $\text{Vect}(I_2, A)$  et  $\mathcal{C}(A)$  sont de même dimension, et que l'un est inclus dans l'autre, on peut conclure qu'ils sont égaux.

Une correction de l'exercice 5

énoncé

1.  $\Rightarrow$  **Première méthode :** Le rang de cette matrice est 1, donc son noyau (en vérité c'est le noyau de son endomorphisme canoniquement associé) est de dimension  $n - 1$ , ce qui revient à dire que 0 est une valeur propre de  $J_n$  d'ordre de multiplicité géométrique  $n - 1$ , et d'ordre de multiplicité algébrique supérieur ou égal à  $n - 1$ .

Par conséquent,  $X^{n-1}$  divise le polynôme caractéristique  $\chi_{J_n}$  qui est unitaire de degré  $n$ , donc se factorise donc sous la forme

$$\chi_{J_n}(X) = X^{n-1}(X - \lambda), \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Autre méthode :**  $\chi_{J_n}(X) = X^{n-1}(X - \lambda)$ , où  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- $\Rightarrow$  Ce polynôme caractéristique est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ , donc on sait que la trace de  $J_n$ , c'est-à-dire  $n$ , est égale à la somme des valeurs propres, qui vaut ici  $\lambda$ . On en déduit donc que  $\lambda = n$ , puis que  $\chi_{J_n}(X) = X^{n-1}(X - n)$ , et enfin que 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité algébrique  $n - 1$ , et  $n$  valeur propre d'ordre 1.



La somme des termes de chaque ligne donne  $n$ , d'où

$$J_n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne une autre manière de prouver que  $n$  est valeur propre de  $J_n$ , et que  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé.

- $\Rightarrow$  On sait déjà que  $\dim(E_0(J_n)) = n - 1$ .

D'autre part,  $n$  est valeur propre de  $J_n$  d'ordre de multiplicité algébrique 1, donc  $\dim(E_n(J_n)) = 1$ ,



Rappelons que l'égalité entre l'ordre de multiplicité géométrique, c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre, et l'ordre de multiplicité algébrique est toujours vraie pour les valeurs propres simples, c'est-à-dire les valeurs propres d'ordre de multiplicité algébrique 1.

et par conséquent  $J_n$  est diagonalisable.

## Colles des semaines 14. Réduction des endomorphismes et matrices carrées

⇒ On remarque que les  $n - 1$  vecteurs  $E_1 - E_i$ , où les  $E_i$  forment la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , pour  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  sont dans  $E_0(J_n)$  et forment une famille libre, donc une base de  $E_0(J_n)$ .

D'autre part, on a vu que la colonne  $C$  remplie de 1 est dans  $E_n(J_n)$  qui est de dimension 1, donc  $E_n(J_n) = \text{Vect}(C)$ .

⇒ En conclusion,  $J_n$  est diagonalisable de la façon suivante :

$$J_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}}_{=D} \times P^{-1}.$$

Ou, ce qui revient au même,  $P^{-1} \times J_n \times P = D$ .

2. On remarque que  $M(a, b) = bJ_n + (a - b)I_n$ , donc

$$\begin{aligned} P^{-1} \times M(a, b) \times P &= P^{-1} (bJ_n + (a - b)I_n) P \\ &= bP^{-1}J_nP + (a - b)P^{-1}I_nP = bD + (a - b)I_n \\ &= \text{Diag} \left( \underbrace{a - b, \dots, a - b}_{n-1 \text{ fois}}, a + (n - 1)nb \right). \end{aligned}$$

On en déduit que  $M(a, b)$  est diagonalisable, que ses valeurs propres sont  $a - b$  d'ordre  $n - 1$ , et  $a + (n - 1)b$  d'ordre 1, avec la même matrice de passage  $P$ , donc les mêmes sous-espaces propres que  $J_n$  :  $E_{a-b}(M(a, b)) = E_0(J_n)$ , et  $E_{a+(n-1)b}(M(a, b)) = E_n(J_n)$ .

### Une correction de l'exercice 6

énoncé

La matrice  $M$  est diagonalisable car elle est symétrique réelle.

### Méthode empirique

L'observation de la somme des termes de chaque ligne de  $M$  nous permet d'avancer que

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 4a \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc  $4a$  est une valeur propre de  $M$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé.

Puis avec encore plus d'astuce en additionnant la première et la troisième colonne, ainsi que la deuxième et la quatrième :

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

donc  $0$  est valeur propre, puis

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donc  $2b$  est valeur propre, d'ordre de multiplicité géométrique au moins 2. On en déduit que le spectre de  $M$  est  $\{0, 4a, 2b\}$ , avec les ordres de multiplicité géométriques et algébriques respectivement égaux à 1, 1, 2.

**Autre méthode**

Calculons le polynôme caractéristique de  $M$  : l'opération élémentaire  $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$  donne :

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} a+b-\lambda & a & a-b & a \\ a & a+b-\lambda & a & a-b \\ a-b & a & a+b-\lambda & a \\ a & a-b & a & a+b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4a-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-b & a+b-\lambda & a & a-b \\ a-b-\lambda & a & & \\ a & a-b & a & a+b-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ensuite les opérations  $L_i \leftarrow L_i - aL_1$  pour  $i = 2,3,4$  donnent :

$$\chi_M(\lambda) = (4a-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-\lambda & 0 & -b \\ -b & 0 & b-\lambda & 0 \\ 0 & -b & 0 & b-\lambda \end{vmatrix}$$

Enfin avec les opérations  $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$  et  $C_4 \leftarrow C_4 - C_2$  il vient :

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= (4a-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 0 & -2b+\lambda \\ -b & 0 & 2b-\lambda & 0 \\ 0 & -b & 0 & 2b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4a-\lambda)(2b-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 0 & -1 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (4a-\lambda)(2b-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-\lambda & -1 \\ 0 & -b & 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4a)(\lambda-2b)^2. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $M$  sont donc dans le cas général où  $0, 2b$  et  $4a$  sont distincts (c'est-à-dire  $a \neq 0, b \neq 0$  et  $b \neq 2a$ ) :  $0$  et  $4a$  valeurs propres simples et  $2b$  valeur propre double.

Une correction de l'exercice 7

énoncé

→ La matrice  $A^2 + I_n$  elle n'est pas inversible, donc

$$\det(A^2 + I_n) = 0,$$

or  $A^2 + I_n = (A - iI_n)(A + iI_n)$ , d'où par propriété du déterminant

$$\det(A - iI_n) \det(A + iI_n) = 0.$$

Ainsi l'un des deux facteurs de ce produit est nul, ce qui prouve que  $i$ , ou  $-i$  est valeur propre de  $A$ .



*J'espère qu'il est clair qu'un scalaire  $\lambda$  est valeur propre de  $\square$  si, et seulement si,  $\square - \lambda \text{id}_{\mathbb{E}}$  n'est pas inversible (ou bijectif).*

Mais comme  $A$  est une matrice à coefficients réels, on en déduit que  $i$  ET  $-i$  sont valeurs propres de  $A$ , donc en particulier qu'il existe  $X$  non nul dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  tel que

→ On écrit le vecteur  $X$  de la question (a) sous la forme  $U + iV$  avec  $U$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ . La relation  $AX = iX$  se traduit alors par  $A(U + iV) = i(U + iV)$ , c'est-à-dire par

$$AU = -V$$

$$AV = U.$$

Il est impossible que  $U$  ou  $V$  soit nul, sinon  $U$  et  $V$  le seraient, donc  $X$  serait nul, ce qui n'est pas le cas. Par suite, si  $(U, V)$  est une famille liée, on peut supposer sans perte de généralité que  $U = kV$  avec  $k \in \mathbb{R}$ . De la première équation ci-dessus, on tire  $AV = -V/k$ , et de la seconde,  $AV = kV$ , d'où l'on déduit  $(1 + k^2)V = 0$ , donc  $V = 0$  (puisque  $k$  est réel), mais on vient de voir que cela est impossible. La famille  $(U, V)$  est donc libre, et on peut compléter cette famille pour former une base de  $\mathbb{R}^n$ , identifié ici à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Les deux relations  $AU = -V$  et  $AV = U$  montrent que  $A$  est semblable à une matrice de la forme décrite dans l'énoncé.

Une correction de l'exercice 8

énoncé

→ Par le théorème du rang,  $E_0(A) = \text{Ker}(A)$  est de dimension  $n - 2$ , donc  $\chi_A(X) = X^{n-2}Q$ , avec  $\deg(Q) = 2$  (mais rien n'empêche a priori  $Q$  de s'annu-

## Colles des semaines 14. Réduction des endomorphismes et matrices carrées

ler en 0).

→ Soient  $a$  et  $b$  les autres racines, éventuellement complexes, de  $Q$ , alors

$$\chi_A = X^{n-2}(X-a)(X-b),$$

et

$$\text{Tr}(A) = (n-2) \times 0 + a + b,$$

d'où  $a = -b$  car  $\text{Tr}(A) = 0$ .

→ Si  $a = b = 0$ , alors le polynôme caractéristique de  $A$  est  $X^n$ , mais alors le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que  $A^n = 0_n$ , ce qui contredit l'énoncé.

Ainsi  $a$  est non nul.

→ On en déduit que  $a$  et  $-a$  sont deux valeurs propres distinctes, non nulles et comme 0 est déjà d'ordre de multiplicité algébrique au moins  $n-2$ ,  $a$  et  $-a$  sont des valeurs propres simples, c'est-à-dire d'ordre de multiplicité algébrique 1.

Ainsi  $\chi_A$  est scindé, et les 3 sous-espaces propres ont une dimension égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante, donc  $A$  est diagonalisable.

### Une correction de l'exercice 9

énoncé



On commence par remarquer que la définition de la matrice impose que  $n$  soit un entier pair.

→ Il est clair que  $\text{rg}(A) = 2$  donc par le théorème du rang 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité géométrique  $n-2$ , et par un coup d'œil affuté :

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

→ On remarque que la somme des lignes est constante et vaut  $\frac{n(n+1)}{2}$  donc  $\frac{n(n+1)}{2}$  est valeur propre et  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé.

→ Comme  $\text{Tr}(A) = \frac{n^2}{2}$ , la dernière valeur propre  $\lambda$  (fut-elle en théorie complexe, ou égale à une des deux précédentes) vérifie

$$(n - 2) \times 0 + \frac{n(n + 1)}{2} + \lambda = \frac{n^2}{2},$$

d'où  $\lambda = -\frac{n}{2}$ .

→ Ainsi A admet pour valeurs propres 0 à l'ordre de multiplicité géométrique  $n - 2$ , et deux autres valeurs propres  $\frac{n(n+1)}{2}$  et  $-\frac{n}{2}$ , non nulles et distinctes entre elles.

Ainsi, comme les sous-espaces propres sont en somme directe dans  $\mathbb{R}^n$ , les sous-espaces propres associés à  $\frac{n(n+1)}{2}$  et  $-\frac{n}{2}$  sont des droites vectorielles. En particulier, on sait déjà que

$$E_{\frac{n(n+1)}{2}}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc il nous suffit donc de trouver un vecteur propre particulier de S associé à la valeur propre  $-\frac{n}{2}$ .

→ Si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est un tel vecteur propre, alors  $SX = -\frac{n}{2}X$ , ce qui équivaut à

$$\forall k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad k \times x_1 + (n - k + 1) \times x_2 + k \times x_3 + \dots \\ \dots + (n - k + 1) \times x_n = -\frac{n}{2}x_k$$

Notons A, resp. B, la somme des coefficients d'indices impairs, resp. pairs, de X. Remarquons en passant que  $A + B = \sum_{k=1}^n x_k$ .

## Colles des semaines 14. Réduction des endomorphismes et matrices carrées

Alors  $SX = -\frac{n}{2}X$  équivaut à

$$\forall k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, k \times A + (n - k + 1) \times B = -\frac{n}{2}x_k.$$

En additionnant ces égalités pour  $k$  de 1 à  $n$ , on obtient

$$\sum_{k=1}^n k A + \sum_{k=1}^n (n - k + 1) B = -\frac{n}{2} \sum_{k=1}^n x_k = -\frac{n}{2}(A + B)$$

c'est-à-dire  $\frac{n(n+1)}{2}A + \frac{n(n+1)}{2}B = -\frac{n}{2}(A + B)$

d'où  $A + B = 0$ , donc  $B = -A$ .

Ainsi

$$SX = -\frac{n}{2}X \iff \forall k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, k \times A - (n - k + 1) \times A = -\frac{n}{2}x_k$$

$$\iff \forall k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, x_k = \frac{2A}{n}(2k - n - 1)$$

$$\iff X = \frac{2A}{n} \begin{pmatrix} -(n-1) \\ -(n-3) \\ \vdots \\ -1 \\ +1 \\ \vdots \\ +(n-1) \end{pmatrix}.$$

Ainsi ce dernier vecteur colonne ci-dessus est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $-\frac{n}{2}$ , et il forme à lui tout seul une base de  $E_{-\frac{n}{2}}(A)$ .

### Une correction de l'exercice 10

énoncé

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors on a :

$$BX = \lambda X \iff \begin{cases} Ay = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} Ay = \lambda^2 y \\ x = \lambda y \end{cases}$$

Ainsi,  $\lambda$  est valeur propre de  $B$  si et seulement si  $\lambda^2$  est valeur propre de  $A$ .

On a aussi prouvé ci-dessus que l'application  $E_{\lambda^2}(A) \rightarrow E_{\lambda}(B)$  définie par  $y \mapsto \begin{pmatrix} \lambda y \\ y \end{pmatrix}$  est une bijection, et donc  $\dim(E_{\lambda}(B)) = \dim(E_{\lambda^2}(A))$ .

Puisque  $A$  est diagonalisable, on sait que

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_A(\mu_i)) = n,$$

où  $\mu_1, \dots, \mu_p$  sont les valeurs propres de  $A$ . Si  $\mu_i \neq 0$  pour tout  $i$ , chaque  $\mu_i$  admet deux racines carrés complexes distinctes  $\pm \lambda_i$ , et on a

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_B(\lambda_i)) + \sum_{i=1}^p \dim(E_B(-\lambda_i)) = 2 \sum_{i=1}^p \dim(E_A(\lambda_i^2)) = 2n,$$

et donc  $B$  est diagonalisable.

Au contraire, si  $\mu_1 = 0$ , alors on obtient une seule carrée, qui vaut 0, et la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $B$  vaut

$$\dim(E_1) + 2 \sum_{i=2}^p \dim(E_{\mu_i}) = 2n - \dim(E_1) < 2n.$$

On en conclut que  $B$  est diagonalisable si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de  $A$ .

### Une correction de l'exercice 11

énoncé

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ .

La matrice  $A$  a pour terme général  $a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j, \\ 1, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

1. Prouvons que  $P = X^2 - 2X + 1$  est annulateur de  $u$  c'est-à-dire que  $P(u) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ , autrement dit que pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $P(u)(M) = 0_n$ .

On remarque que

$$\begin{aligned} u^2(M) &= u \circ u(M) = (M + \text{tr}(M)A) + \text{tr}(M + \text{tr}(M)A)A \\ &= M + \text{tr}(M)A + \text{tr}(M)A + \text{tr}(M)\text{tr}(A)A \quad (\text{par linéarité de la trace}) \\ &= M + 2\text{tr}(M)A \quad (\text{car } \text{Tr}(A) = 0). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u^2(M) - 2u(M) + \text{Id}(M) &= M + 2\text{tr}(M)A - 2M - 2\text{tr}(M)A + M \\ &= 0_n \quad \text{c.Q.F.D.} \end{aligned}$$

2. Le polynôme  $P = (X - 1)^2$  est annulateur de  $u$ , donc  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1\}$ .  
 Or  $u(A) = A$  et  $A \neq 0_n$  donc 1 est bien valeur propre, et  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \{1\}$ .  
 Si  $u$  est diagonalisable alors d'après le cours,  $(X - 1)$  est un polynôme annulateur de  $u$ , autrement dit  $u - \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$  est l'endomorphisme nul, donc  $u = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ , ce qui n'est pas.  
 Donc  $u$  n'est pas diagonalisable.
3. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ , alors il existe une matrice non nulle  $M$  telle que  $u(M) = \lambda M$ , c'est-à-dire  $M + \text{Tr}(M)A = \lambda M$ , ce qui entraîne que  $(\lambda - 1)M = \text{Tr}(M)A$ .

→ Si  $\lambda = 1$ , alors  $u(M) = M$  si, et seulement si,  $\text{Tr}(M) = 0$ , et comme la trace est une forme linéaire non nulle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on en déduit que son rang vaut 1, donc grâce au théorème du rang que son noyau est de dimension  $n^2 - 1$ .

Donc 1 est valeur propre de  $u$  d'ordre de multiplicité géométrique  $n^2 - 1$ .

→ Si  $\lambda \neq 1$ , alors  $u(M) = \lambda M \iff M = \frac{\text{Tr}(M)}{\lambda - 1}A \implies M \in \text{Vect}(A)$ .

On a donc

$$\begin{aligned} u(M) = \lambda M &\iff \begin{cases} M = \lambda M \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, M = \mu A \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - \lambda)M = 0_n \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, M = \mu A \end{cases} \\ &\iff M = 0_n \quad (\text{car } \lambda \neq 1) \end{aligned}$$

donc  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $u$ .

On a donc prouvé que 0 est la seule valeur propre de  $u$  et que son ordre de multiplicité géométrique est  $n^2 - 1$ , et celle-ci étant strictement inférieure à  $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ , on peut conclure que  $u$  n'est pas diagonalisable.

Une correction de l'exercice 12

énoncé

⇒ Supposons que  $u$  est diagonalisable, alors il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , de base  $(x_1, \dots, x_p)$ , grâce au théorème de la base incomplète, on complète cette famille libre  $(x_1, \dots, x_p)$  avec des vecteurs de la base  $(x_1, \dots, x_p)$ , en une nouvelle base de  $E$ .

On peut noter cette base  $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{n-p})$ , quitte à réordonner les vecteurs  $e_i$ .

Ainsi  $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_{n-p})$  est un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $F$  stable par  $u$ .

⇒ Pour la réciproque

**Première méthode : par l'absurde.** Supposons que  $u$  n'est pas diagonalisable, et trouvons un sous-espace vectoriel qui n'a pas de supplémentaire stable par  $u$ .

L'endomorphisme  $u$  n'est pas diagonalisable, donc

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$  différent de  $E$ .

Prenons alors un supplémentaire  $G$  de  $F$  dans  $E$ , et montrons que  $G$  n'est pas stable par  $u$ .

De nouveau par l'absurde, supposons que  $G$  est stable par  $u$ , alors  $u$  induit un endomorphisme de  $G$  que l'on note  $u_G$ . Comme  $G$  est de dimension au moins 1, le polynôme caractéristique de  $u_G$  est de degré au moins 1, donc il admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$  (c'est le théorème de d'Alembert-Gauss!), et cette racine est alors une valeur propre de  $u_G$ . Il existe alors un vecteur non nul  $x$  dans  $G$  tel que  $u_G(x) = \lambda x$ , mais par définition de  $u_G$ ,  $u_G(x) = u(x)$ , donc  $u(x) = \lambda x$ , donc  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ , et  $x \in E_\lambda(u)$ , donc par définition de  $F$ ,  $x \in F$ .

Avoir supposé que  $G$  est stable par  $u$  nous a donc permis de construire un vecteur non nul qui est dans  $F \cap G$ , ce qui contredit le fait que  $G$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ . Donc  $G$  n'est pas stable par  $u$ , et l'exercice est bouclé.

**Deuxième méthode : par récurrence sur la dimension de  $E$ .**  $\odot$  Si

$\dim(E) = 1$ , quel que soit l'endomorphisme  $u$  de  $E$ , quoi que l'on suppose sur les sous-espaces vectoriels de  $E$  stables ou non,  $u$  est diagonalisable, je vous laisse vous en convaincre sans moi.

- $\odot$  Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, supposons que la réciproque vraie dans un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n - 1$ , et montrons qu'elle est vraie dans un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

Plaçons-nous dans un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , et prenons un endomorphisme  $u$  de  $E$  tel que tout sous-espace vectoriel de  $E$  admet un supplémentaire stable par  $u$ .

Le polynôme caractéristique de  $u$  admet au moins une racine complexe (encore par le théorème de d'Alembert-Gauss), donc  $u$  admet au moins une valeur propre. Notons  $e_1$  un de ses vecteurs propres, et  $D = \text{Vect}(e_1)$ .

Par hypothèse,  $D$  admet un supplémentaire  $H$  stable par  $u$ , qui est donc un hyperplan de  $E$ . Le sous-espace vectoriel  $H$  est un hyperplan de  $E$ , autrement dit  $\dim(H) = n - 1$ .

Notons alors  $u_H$  l'endomorphisme de  $H$  induit par  $u$ , et montrons que  $u_H$  vérifie aussi la propriété suivante : « tout sous-espace vectoriel de  $H$  admet un supplémentaire stable par  $u_H$  ».

Notons aussi  $p$  la projection sur  $H$  parallèlement à la droite vectorielle  $D$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $H$ .

Alors  $D + F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , donc par hypothèse sur  $u$ , il existe un sous-espace vectoriel  $G$  supplémentaire de  $D + F$  dans  $E$ , et stable par  $u$ .

On va montrer que  $p(G)$  est stable par  $u_H$ , et que c'est un supplémentaire de  $F$  dans  $H$ .

→ Tout d'abord  $p(G)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $H$ .

→ Montrons qu'il est stable par  $u$  : soit  $x \in p(G)$  alors il existe  $x_0 \in G$  tel que  $x = p(x_0)$ .

Par définition de  $p$ ,  $x - p(x_0) \in D = \text{Vect}(e)$ , donc il existe  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $x_0 = ae + p(x_0)$ .

En appliquant  $u$ , on obtient

$$u(x_0) = au(e) + u(p(x_0)) = au(e) + u(x).$$

En appliquant à présent  $p$ , on obtient

$$p(u(x_0)) = 0_E + p(u(x)).$$

Mais  $p(G) \subset H$ , donc  $x \in H$ , ainsi comme  $H$  est stable par  $u$ , on sait que  $u(x) \in H$ , d'où  $p(u(x)) = u(x)$ .

Ainsi  $u(x) = p(u(x_0))$ , et comme  $x_0 \in G$  et  $G$  est stable par  $u$ , on sait que  $u(x_0) \in G$ , et donc  $u(x)$ , c'est-à-dire  $p(u(x_0))$  est bien dans  $p(G)$ , c.Q.F.D.

→ Montrons que  $p(G)$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $H$ .

⇒ Comme  $F \subset H$  et  $p(G) \subset H$ , il va sans dire que  $F + p(G) \subset H$ .

Réciproquement, soit  $x \in H$ , alors  $G$  étant un supplémentaire de  $D + F$  dans  $E$ , il existe  $x_1 = b e + x_F \in D + F$  et  $x_G \in G$  tels que  $x = (b e + x_F) + x_G$ .

Alors d'une part  $p(x) = x$  car  $x \in H$ ; et d'autre part

$$p(x) = b p(e) + p(x_F) + p(x_G) = 0_E + x_F + p(x_G) \quad (\text{car } x_F \in F \subset H),$$

donc  $x \in F + p(G)$ .

On a bien établi que  $H = F + p(G)$ .

⇒ Si  $x \in F \cap p(G)$ , alors  $x = p(x_0)$  avec  $x_0 \in G$ , mais  $x \in F \subset H$ , donc  $x = p(x)$ . Ainsi  $p(x) = p(x_0)$ , donc  $x - x_0 \in \text{Ker}(p) = D$ , d'où l'existence d'un  $c \in \mathbb{C}$  tel que  $x = x_0 + c e$ .

Mais alors  $x_0 = x - c e$ , donc  $x_0 \in D + F$ , or  $x_0 \in G$  et  $G$  et  $D + F$  sont en somme directe, donc  $x_0 = 0_E$ , puis  $x = p(x_0) = 0_E$ , c.Q.F.D.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $u_H$ , qui permet de conclure que  $u_H$  est diagonalisable, autrement dit qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $H$  formée de vecteurs propres de  $u_H$ , qui sont aussi des vecteurs propres de  $E$ .

Dans ce cas la famille obtenue en concaténant la base  $(e)$  de  $D$  et cette base  $\mathcal{B}$  de  $H$  est une base de  $E$  puisque  $D$  et  $H$  sont supplémentaires, et elle est formée de vecteurs propres de  $u$ , donc  $u$  est diagonalisable.

**Une correction de l'exercice 13**

*énoncé*

1. Soient  $A, B$  stochastiques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (A \times B)_{i,j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} (B)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (A)_{i,k} (B)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} \sum_{j=1}^n (B)_{k,j} \\ &= \qquad \qquad \qquad \times 1 = 1, \text{ c.Q.F.D.} \end{aligned}$$

2. On vérifie que  $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc 1 est valeur propre de  $A$  de vecteur propre associé  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ , et  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  un vecteur propre associé, alors pour tout  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,

$$\sum_{k=1}^n (A)_{i,k} x_k = \lambda x_i.$$

Le vecteur  $X$  est non nul, donc un au moins de ses coefficients est non nul, prenons  $|x_p|$  le maximum des  $|x_i|$ .

Alors pour  $i = p$ ,

$$\sum_{k=1}^n (A)_{p,k} x_k = \lambda x_p.$$

En prenant le module, grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n (A)_{p,k} x_k \right| &= |\lambda| |x_p| \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{(A)_{p,k}}_{\geq 0} \underbrace{|x_k|}_{\leq |x_p|} \\ &\leq \sum_{k=1}^n (A)_{p,k} |x_p| = 1 \times |x_p| \end{aligned}$$

donc comme  $|x_p| > 0$ , on en déduit que  $|\lambda| \leq 1$ .

3. Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice stochastique d'inverse  $A^{-1} = (b_{i,j})$  stochastique.

Soit  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ , et  $j_0 \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  tel que  $a_{i,j_0}$  est le plus grand des coefficients de la ligne  $i$ .

Alors on sait que  $\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = 1$ .

Or pour tout  $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,  $0 \leq a_{i,k} \leq a_{i,j_0}$ , et  $b_{k,j} \geq 0$ , donc  $a_{i,k} b_{k,j} \leq a_{i,j_0} b_{k,j}$ , d'où

$$1 = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \leq \sum_{k=1}^n a_{i,j_0} b_{k,j} = a_{i,j_0} \sum_{k=1}^n b_{k,j} = a_{i,j_0}.$$

On obtient que  $a_{i,j_0} \geq 1$ .

Mais ce même nombre additionné aux autres coefficients positifs de la même ligne doit donner 1, donc il faut que  $a_{i,j_0} \leq 1$ .

Par conséquent,  $a_{i,j_0} = 1$ , et les autres termes de la  $i^e$  ligne sont nuls.

En conclusion, la matrice  $A$  est une matrice qui a sur chaque ligne un seul 1, et des 0.

### Une correction de l'exercice 14

énoncé

- $\chi_2(X) = X(X - a_1) - a_2^2$ ,  $\chi_3(X) = X^3 - a_1 X^2 + (-a_2^2 - a_3^2) X$ .
- Comme  $a_2 \neq 0$ ,  $\text{rg}(A_n) = 2$ , donc par le théorème du rang  $\dim(\text{Ker}(A_n)) = n - 2$ , donc 0 est valeur propre de  $A_n$  pour  $n \geq 3$  avec pour ordre de multiplicité  $m_0 \geq n - 2$ . Ainsi  $(X - 0)^{n-2} = X^{n-2}$  divise  $\chi_n$ .

## Colles des semaines 14. Réduction des endomorphismes et matrices carrées

3. Récurrence en développant selon la dernière colonne.
4.  $\Rightarrow$  Si  $b_n = 0$ , alors  $\chi_n = X^{n-1}(X - a_1)$ , donc 0 est valeur propre de  $A_n$  d'ordre  $n - 1$  strictement supérieur à la dimension du sous-espace propre associé, donc  $A_n$  n'est diagonalisable.
  - $\Rightarrow$  Si  $b_n \neq 0$ , alors  $X^2 - a_1X - b_n$  est un polynôme du second degré de discriminant  $\Delta = a_1^2 + 4b_n^2 > 0$  (car  $a_2 \neq 0$ ), donc il admet deux racines  $\alpha$  et  $\beta$  réelles distinctes, et non nulles.

Ainsi  $\chi_n$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ , et les ordres de multiplicité de ses valeurs propres 0,  $\alpha$  et  $\beta$  sont  $n - 2$ , 1 et 1, donc sont égales aux dimensions de sous-espaces propres, donc  $A_n$  est diagonalisable.