Colles de la semaine 11. Suites et séries de fonctions, convergence dominée et intégration terme à terme

Questions de cours 1

Définir la convergence simple et la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
Définir la convergence simple, la convergence uniforme, et la convergence normale d'une série de fonctions.
Caractère $\mathscr{C}^k$ de la limite d'une suite de fonctions (ou de la somme d'une série de fonctions).
Théorèmes de convergence dominée (suites et séries), et théorème d'intégration terme à terme.

Exercice 1

Étudier selon les valeurs du réel $a \geqslant 0$, les convergences sur $[0\ ;\ 1]$ de la suite des fonctions $x \mapsto n^a x^n(1-x)$.

Exercice 2

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto nx\mathrm{e}^{-nx^2}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction impaire.
3. Montrer que $\sum f_n$ est normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}^*$. Que peut-on en déduire pour S ?
4. Soit $a > 0$, calculer $\int_a^x S(t)\mathrm{d}\,t$ pour tout $x > 0$, et en déduire S.

Exercice 3

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-nt^2}}{n^2+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle tend vers 1 en $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Montrer que la série des fonctions $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.
3. Justifier que S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
   Indication : en supposant que cette limite est finie et en minorant la somme par une somme partielle, montrer qu'on obtient une contradiction.

Exercice 5 – 🔥

Étudier le mode de convergence sur $\mathbb{R}_+^*$ de la suite des applications $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$, *(on pourra montrer que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$).*

Exercice 6 – 🔥🔥

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ dont la dérivée seconde est bornée sur $\mathbb{R}$.
Étudier la convergence simple, puis uniforme, sur $\mathbb{R}$ de la suite des fonctions

$$t \mapsto n\left(f\left(t+\frac{1}{n}\right)-f(t)\right).$$

Convergence dominée et autres

Exercice 7

On veut montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

1. Justifier l'existence des deux membres de cette égalité.
2. Montrer que pour tout $t>0$, $\displaystyle\frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-nt}$.
3. Calculer, à l'aide d'un changement de variable, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$. *(on admettra que $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).*
4. Conclure.

Exercice 8

Montrer que pour tout réel $a>0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+na}$.

Exercice 9

Établir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 10 – X-ESPCI

Déterminer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(1-x^n)}{1-x}\mathrm{d}x$.

Exercice 11 – Centrale PC

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante qui tend vers $+\infty$ de réels strictement positifs.
Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Colles de la semaine 11. Suites et séries de fonctions, convergence dominée et intégration terme à terme

Solutions

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

- ➔ Pour $x = 1$, $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f_n(0) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

  ➔ Pour $x \in [0,1[$,

$$f_n(x) = (1-x)\,n^a \mathrm{e}^{n\ln(x)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0,$$ *(par croissances comparées car $\ln(x) < 0$)*

  Donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;\,1]$ vers la fonction nulle.

- Pour étudier la convergence uniforme sur $[0\,;\,1]$, on doit étudier la suite de terme général $\|f_n - 0\|_\infty^{[0\,;\,1]}$.
  Pour cela, on profite de ce que f_n est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$ pour trop lui dériver sa face :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n^{a+1}x^{n-1}(1-x) - n^a x^n = n^a x^{n-1}\left(n(1-x)-x\right) \\ &= -n^a(n+1)x^{n-1}\left(x - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

  Ainsi, f_n' est positive sur $\left[0\,;\,\frac{n}{n+1}\right]$, puis négative, donc f_n est croissante sur $\left[0\,;\,\frac{n}{n+1}\right]$, puis décroissante.
  Par conséquent, puisque $f_n(0) = f_n(1) = 0$, on déduit des variations de f_n que

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty^{[0\,;\,1]} &= \left|f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)\right| \\ &= n^a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{n^a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n^{a-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n. \end{aligned}$$

  Or en passant par l'exponentielle et le logarithme, il est classique que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \mathrm{e}^{-1}.$$

On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty^{[0\,;1]} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{a-1}\times \mathrm{e}^{-1} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n^{1-a}}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (f_n) \text{ converge uniformément si, et seulement si,}}$ $\|f_n\|_\infty^{[0\,;1]} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, c'est-à-dire par équivalence si, et seulement si, $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n^{1-a}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, ce qui revient à $1-a>0$, c'est-à-dire $\boxed{a<1}$.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

1. Soit $x\in\mathbb{R}$.
   - si $x=0$, la série de terme général $f_n(0)=0$ converge.
   - si $x\neq 0$, $-x^2<0$, donc par croissances comparées $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui prouve que $\sum f_n(x)$ converge.

   Donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x, et tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(-x)=-f_n(x)$ car f_n est impaire, donc pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n(-x) = -\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n(x),$$

   or par convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$, les séries de termes généraux $f_n(-x)$ et $f_n(x)$ convergent, donc quand $\mathrm{N}\to+\infty$,

$$\mathrm{S}(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = -\mathrm{S}(x),$$

   ce qui prouve que S est impaire sur $\mathbb{R}$.
3. ➟ Soit $[a\,;\,b]\subset\,]0\,;+\infty[$, pour tout $x\in[a\,;\,b]$,

$$|f_n(x)| = \left|nx\mathrm{e}^{-nx^2}\right| \leqslant nb\mathrm{e}^{-na^2}$$

   donc $\|f_n\|_\infty^{[a\,;\,b]} \leqslant nb\mathrm{e}^{-na^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui prouve que $\sum \|f_n\|_\infty^{[a\,;\,b]}$ converge.

Il est souvent pertinent d'essayer dans un premier temps de majorer la norme infinie plutôt que de calculer cette norme infinie !

➟ Puis comme f_n est impaire, alors $|f_n|$ est paire, donc pour tout $[a\,;\,b] \subset\,]-\infty\,;\,0[$, $\|f_n\|_\infty^{[a\,;\,b]} = \|f_n\|_\infty^{[-b\,;\,-a]} \leqslant n\,|a|\,\mathrm{e}^{-nb^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'où la convergence normale de $\sum f_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}^\star$.

On peut en déduire que la fonction S est continue sur $]0\,;\,+\infty[$, car les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, et $\sum f_n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur tout segment de $]0\,;\,+\infty[$.

4. Soit $a > 0$, et $x > 0$, la série des f_n converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $\mathbb{R}^\star$, donc en particulier sur le segment entre a et x.

   Comme de plus, les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, donc sur ce même segment, on peut intégrer terme à terme sur le segment entre a et x :

$$\int_a^x \mathrm{S}(t)\mathrm{d}\,t = \int_a^x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}\,t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}\,t \quad \textit{(en intégrant terme à terme)}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^x nt\mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}\,t = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-nt^2}\right]_a^x$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-nx^2} - \mathrm{e}^{-na^2}\right].$$

   Or pour tout $t > 0$, grâce à la série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)^n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t^2}} \quad \textit{(car } 0 < \mathrm{e}^{-t^2} < 1\textit{)}$$

   donc

$$\int_a^x \mathrm{S}(t)\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x^2}} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-a^2}}\right).$$

   Mais par le théorème fondamental de l'analyse, comme S est continue sur $]0\,;\,+\infty[$, on sait que $x \mapsto \int_a^x \mathrm{S}(t)\mathrm{d}\,t$ est une primitive de S sur $]0\,;\,+\infty[$, donc pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x^2}} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-a^2}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\times\left(+\frac{-2x\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)^2}\right) = \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Puis par imparité de S, pour tout $x < 0$,

$$\begin{aligned}
S(x) = -S(-x) &= -\frac{(-x)\mathrm{e}^{-(-x)^2}}{\left(1-\mathrm{e}^{-(-x)^2}\right)^2} \quad \textit{(par le calcul ci-dessus)} \\
&= \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Et comme on sait que $S(0) = 0$, cette expression est finalement valable pour tout réel x, autrement dit

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx\mathrm{e}^{-nx^2} = \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)^2}.$$

Le résultat ci-dessus n'est pas miraculeux puisque grâce à notre connaissance de la première dérivée de la série géométrique, pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} nx\mathrm{e}^{-nx^2} &= x\times\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^n = x\mathrm{e}^{-x^2}\times\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^{n-1} \\
&= x\mathrm{e}^{-x^2}\times\frac{1}{\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)^2} = \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(t)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-nt^2}}{n^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Donc la fonction f_n est bornée sur $\mathbb{R}$, avec $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or la suite de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ est sommable, donc par majoration, la suite de terme général $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ est aussi sommable, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, et a fortiori simplement, sur $\mathbb{R}$.

On peut en déduire entre autres que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ existe, donc que la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$, et on vient de voir que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De même, la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ permet d'appliquer en $+\infty$ le théorème de la double limite, qui nous donne

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} f_n(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f_n'(t) = \frac{-2nt\mathrm{e}^{-nt^2}}{n^2+1}$$

elle-même dérivable et de dérivée

$$f_n''(t) = \frac{(4n^2t^2 - 2n)\mathrm{e}^{-nt^2}}{n^2+1} = \left(t^2 - \frac{1}{2n}\right)\frac{4n^2\mathrm{e}^{-nt^2}}{n^2+1}.$$

Une étude rapide montre alors que

$$\|f_n'\|_\infty^{\mathbb{R}} = \left|f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right| = \frac{\sqrt{2n}}{n^2+1}\mathrm{e}^{-1/2}.$$

On remarque alors que

$$\left\|f_n'\right\|_\infty^{\mathbb{R}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-1/2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc par domination $\sum \left\|f_n'\right\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge aussi, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Je vous laisse utiliser ce résultat dans le théorème de dérivation terme à terme pour conclure que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathscr{C}^1$ de dérivée

$$f' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n' : t \mapsto -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n\,t\,\mathrm{e}^{-n\,t^2}}{n^2+1}.$$

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

1. ➟ Pour tout réel x, on déduit de $\arctan(\square) \underset{\square\to 0}{\sim} \square$ que

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \times \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où par domination la sommabilité de la suite de terme général $f_n(x)$, donc la convergence de la série de terme général $f_n(x)$.

Par conséquent, la série des fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$.

➟ La fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}$ et impaire, donc pour tout réel $a > 0$,

$$\|f_n\|_\infty^{[-a\,;\,a]} = |f_n(a)|$$

dont on vient de voir ci-dessus que c'est le terme général d'une suite sommable. Ainsi $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[-a\ ;\ a]$, donc comme tout segment de $\mathbb{R}$ peut être plongé dans un tel intervalle, on peut conclure que $\sum f_n$ est normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ainsi $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$, or toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, donc la continuité se prolongeant à la limite uniforme, on peut conclure que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Toutes les fonctions f_n sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de derivées

$$f_n' : x \mapsto \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2},$$

donc $\left\|f_n'\right\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{n^2}$, ce qui prouve que $\sum f_n'$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Les autres conditions théorème de dérivation terme à terme des sommes de séries de fonctions sont vérifiées, donc S est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $S' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.

Cette dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc S est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Grâce au théorème de la limite monotone, on déduit de sa croissance que S admet une limite en $+\infty$, cette limite pouvant être finie ou infinie.

Supposons que cette limite est un réel ℓ, alors, toujours par le théorème de la limite monotone, ℓ est le plus petit des majorants de la fonction croissante S.

De plus, les fonctions f_n sont positives sur $[0 \,;\, +\infty[$, croissante, donc pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \leqslant S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \ell.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{n}\frac{\pi}{2},$$

donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Ainsi, par conservation des inégalités larges à la limite :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant \ell,$$

d'où

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant \frac{2\ell}{\pi}.$$

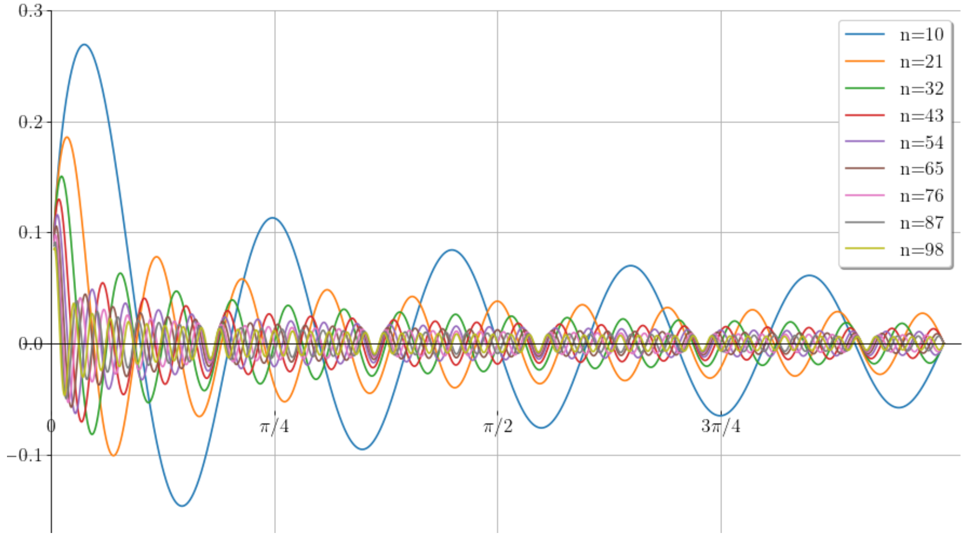
Ainsi la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, qui est une série à termes positifs, a toutes ses sommes partielles majorées, ce qui entraîne que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge…

Mais ! Par la peste ! Mon sang ne fait qu'un tour ! La série harmonique est divergente, parbleu !

On a donc prouvé par l'absurde que la limite de S en $+\infty$ n'est pas finie, donc cette limite est $+\infty$.

Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

D'abord un petit dessin, qui n'est pas franchement éclairant, mais j'aime bien les petits graphiques avec Python et matplotlib.



- Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

  Puis pour tout $x > 0$,

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{x}},$$

  donc par domination $f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

  Ainsi la suite f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $]0\,;+\infty[$.

- Pour étudier la convergence uniforme,

  on remarque d'abord que pour tout $x > 0$,

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{nx}} = \frac{1}{\sqrt{n}}g(nx),$$

  où g est la fonction

$$x \longmapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

  Prouvons que g est bornée :

- d'abord, g est continue sur $]0,+\infty[$,
- de plus la fonction sin est bornée sur $\mathbb{R}$, donc $\sin(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}(1)$, et par conséquent $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, d'où par domination, $g(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 0$,
- d'autre part en 0, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$, d'où par équivalence $g(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0$.

La fonction g est continue sur $]0\ ;+\infty[$ et admet des limites finies en 0 et $+\infty$, donc elle est bornée sur $]0\ ;+\infty[$.

En vérité, ce théorème n'est pas officiellement au programme, il vaut donc mieux savoir le prouver :

- *la fonction g tend vers 0 en 0 (à droite) et en $+\infty$, donc par définition de la limite (en prenant $\varepsilon = 1$), il existe un réel $\delta > 0$ et un réel A tels que*

$$\forall t \in [\mathrm{A}\ ;+\infty[,\ \ |g(t)| \leqslant 1,$$
$$\forall t \in]0\ ;\delta],\ \ |g(t)| \leqslant 1,$$

  donc g est bornée sur les intervalles $]0\ ;\delta]$ et $[\mathrm{A}\ ;+\infty[$.
- *Puis par le théorème des bornes atteintes, g est continue sur le **segment** $[\delta\ ;\mathrm{A}]$, donc elle est bornée sur ce segment (et elle atteint ses bornes mais ici on s'en fiche).*

On peut conclure que g est bornée sur $]0\ ;+\infty[$.

- Notons alors $\mathrm{M} = \|g\|_\infty^{[0\,;+\infty[}$.
On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x > 0,\ \ |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \times \mathrm{M}$$

et $f_n(0) = 0$, donc

$$\forall x > 0,\ \ |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \times \mathrm{M}$$

d'où

$$\|f_n\|_\infty^{]0\,;+\infty[} \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{n}},$$

ce qui prouve la convergence uniforme vers la fonction nulle de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Une correction de l'exercice 6

énoncé

f est dérivable donc $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x)+hf'(x)+o(h)$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\varphi_n(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right) \underset{n\to+\infty}{=} f'(x)+o(1)$$

La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ainsi simplement sur $\mathbb{R}$ vers f'. f étant de classe $\mathscr{C}^2$ et f'' bornée, l'inégalité de Taylor-Lagrange nous permet d'écrire pour tous $a, b\in\mathbb{R}$,

$$\left|f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\left\|f''\right\|_\infty^{\mathbb{R}}$$

L'inégalité devient ici, pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)-\frac{f'(x)}{n}\right| \leqslant \frac{\left\|f''\right\|_\infty^{\mathbb{R}}}{2n^2}$$

Ainsi, $\left|\varphi_n(x)-f'(x)\right| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty^{\mathbb{R}}}{2n}$ et donc,

$$\left\|\varphi_n-f'\right\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{\left\|f''\right\|_\infty^{\mathbb{R}}}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La convergence est bien uniforme.

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

1. Je vais limiter la rédaction au strict nécessaire, mais pas suffisant.
   Pour l'intégrale :
   - la fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$,
   - $\frac{\sqrt{t}}{e^t-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{t}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\frac{1}{t^2}$,
   - $\frac{\sqrt{t}}{e^t-1} \underset{t\to0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{t^{1/2}}$,

   donc $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
   Pour la série, $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ est une suite de Riemann sommable.
2. Pour tout $t > 0$,
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{t}}{e^t-1} &= \frac{\sqrt{t}}{e^t}\times\frac{1}{1-e^{-t}}\\ &= \frac{\sqrt{t}}{e^t}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-t}\right)^n \quad \textit{(car } t>0\textit{, donc } \left|e^{-t}\right|<1\textit{)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{t}e^{-(n+1)t}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{t}e^{-nt}.\end{aligned}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
   - la fonction $f_n : t \mapsto \sqrt{t}e^{-nt}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et, par croissances comparées, négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$, donc elle est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
   - On va poser $y^2 = nt$, c'est-à-dire $y = \sqrt{nt}$, ou encore $t = \frac{1}{n}y^2$.

     La fonction $y \mapsto \frac{1}{n}y^2$ est $\mathscr{C}^1$ strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, et réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$, donc on peut effectuer le changement de variables $t = \frac{1}{n}y^2$, qui donne $\sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{n}}y$, et $\mathrm{d}t = \frac{1}{n}2y\,\mathrm{d}y$, d'où
$$\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}y^2e^{-y^2}\,\mathrm{d}y,$$

puis en posant $u(y) = y$ et $v(y) = -\frac{1}{2}e^{-y^2}$

- qui sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\ ;\ +\infty[$,
- et dont le produit tend vers 0, par croissances comparées, en $+\infty$,

on effectue une intégration par parties qui donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y^2} \mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty} u \times v' = \Big[u \times v\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u' \times v \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4},\end{aligned}$$

ainsi

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}.$$

4. On constate que la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n|$ est convergente, car

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

et je vous laisse vérifier les autres conditions du théorème d'intégration terme à terme, dont la simple application donne l'égalité voulue.

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

➡ Pour tout $x \in [0\ ;\ 1[$, $|-x^a| = |x^a| < 1$ car $a > 0$, donc

$$\frac{1}{1+x^a} = \frac{1}{1-(-x^a)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{na},$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{na}\mathrm{d}x$$

et on va prouver qu'on peut intégrer terme à terme.

➠ On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\ ;\ 1[$, $f_n(x) = (-1)^n x^{na}$ et on applique le théorème de convergence dominée pour les séries. Je ne détaille que l'inégalité de domination :
pour tout $x \in [0\ ;\ 1[$, et tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n x^{na}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-x^a)^n\right| = \left|\frac{1-(-x^a)^{\mathrm{N}+1}}{1+x^a}\right| \leqslant \frac{2}{1+x^a},$$

et $x \mapsto \frac{2}{1+x^a}$ est continue sur le segment $[0\ ;\ 1]$, donc a fortiori intégrable sur $[0\ ;\ 1[$, C.Q.F.D.

> *En général, on commence par essayer d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme (car il est souvent compliqué d'évaluer les sommes partielles pour pouvoir les majorer) mais ici ce théorème ne s'applique pas car :*
>
> $$\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |(-1)^n x^{na}|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{na}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{na+1},$$
>
> *qui n'est pas sommable.*

➠ Après vérification des autres conditions, on applique le théorème de convergence dominée qui nous permet d'intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{na}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{na}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}, \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Colles de la semaine 11. Suites et séries de fonctions, convergence dominée et intégration terme à terme

Une correction de l'exercice 9 *énoncé*

On applique le théorème d'intégration terme à terme avec en particulier

$$\forall t \in [0\,;\,1[\,,\qquad \frac{\arctan(t)}{t} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n},$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n}\right|\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2n+1}\int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

donc la série $\sum\int_0^1\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n}\right|\mathrm{d}\,t$ converge.

Une correction de l'exercice 10 *énoncé*

Pour $n \geqslant 1$, on pose $f_n\colon x \in [0,1[\ \mapsto \frac{x^n(1-x^n)}{1-x} = x^n(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$. Comme f_n est prolongeable par continuité en 1 (par la valeur n), l'intégrale I_n est faussement impropre, et converge. On propose deux solutions.

- **Un calcul élémentaire**

  En développant le produit $x^n(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$, on obtient $\mathrm{I}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+k/n}$, qui est une somme de Riemann régulière d'ordre n de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur le segment $[0,1]$. Le théorème sur les sommes de Riemann dit alors que

  $$\lim \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2.$$

  On peut aussi reconnaître dans $\mathrm{I}_n = \sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}$ la différence $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n$ de deux nombres harmoniques. On dispose du développement asymptotique $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + \pm(1)$ quand n tend vers l'infini, issu du théorème de comparaison série intégrale (qui affirme que $\sum w_n$ converge avec $w_n = \int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t - f(n)$, où f est continue par morceaux, décroissante et positive). On en déduit que $\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n = \ln(2n)+\gamma-(\ln n+\gamma)+\pm(1) = \ln 2+\pm(1)$, et on retrouve le même résultat.

- **La convergence dominée**
  La fonction $\varphi : u \in \,]0,1[\, \mapsto u^{1/n}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective et f_n est intégrable sur $]0,1[$. On peut donc effectuer le changement de variable $x = \varphi(u)$, qui donne

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{u(1-u)}{1-u^{1/n}} \frac{u^{-1+1/n}}{n} \mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{1/n}(1-u)}{n(1-u^{1/n})} \mathrm{d}u.$$

  On pose $g_n : x \in \,]0,1[\, \mapsto \frac{u^{1/n}(1-u)}{n(1-u^{1/n})}$. On fixe $u \in \,]0,1[$.

$$\begin{aligned} n(1-u^{1/n}) &= n\left(1-\exp\left(\frac{\ln u}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1-\left(1+\frac{\ln u}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\ln u + \mathrm{o}(1). \end{aligned}$$

  La suite (g_n) converge donc simplement vers la fonction $g_n : x \in \,]0,1[\, \mapsto \frac{u-1}{\ln u}$, qui est continue par morceaux. Par ailleurs,

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \,]0,1[, \quad |g_n(u)| = u^{1/n} \frac{1+u^{1/n}+\cdots+u^{(n-1)/n}}{n} \leqslant u^{1/n} \leqslant 1.$$

  La fonction constante 1 étant continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$, le théorème de convergence dominée dit que $\lim \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln u} \mathrm{d}u$.

La comparaison des deux méthodes donne l'égalité intéressante

$$\int_0^1 \frac{u-1}{\ln u} \mathrm{d}u = \ln 2.$$

Une correction de l'exercice 11 *énoncé*

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, $f_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}$

➟ Pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$, on montre sans difficulté que la suite de terme général $f_n(x)$ vérifie les

conditions du critère spécial des séries alternées, qui nous permet d'affirmer que la série $\sum f_n(x)$ converge.
Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$, ce qui justifie que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}$ est définie sur $]0\,;+\infty[$.

- De même, comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$, on montre sans difficulté que la suite de terme général $\frac{(-1)^n}{a_n}$ vérifie les conditions du critère spécial des séries alternées, qui nous donne l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}$.
- On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a_n x}\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

- La convergence uniforme est inopérante sur l'intervalle d'intégration $]0\,;+\infty[$ qui n'est pas un segment.
  On remarque que

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a_n}$$

  et rien ne nous permet d'affirmer que $\sum \frac{1}{a_n}$ converge, donc le théorème d'intégration terme à terme ne peut pas s'appliquer.
  On va donc appliquer le théorème de convergence dominée pour les séries.
  - Il est évident que les fonctions f_n sont continues sur $]0\,;+\infty[$;
  - on a déjà vu que $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$,
  - pour savoir si la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, on n'a pas d'autre choix que la convergence uniforme, rendue facile par le critère spécial des séries alternées.

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, le critère spécial des séries alternées appliqué à $\sum f_n(x)$ permet d'affirmer que

$$|R_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant \left|f_{N+1}(x)\right| = e^{-a_{N+1}x},$$

et cette fonction $x \mapsto e^{-a_{N+1}x}$ est décroissante, donc pour tout segment $[\alpha ; \beta] \subset]0 ; +\infty[$,

$$\forall x \in [\alpha ; \beta], \ |R_N(x)| \leqslant e^{-a_{N+1}\times\alpha},$$

d'où

$$\|R_N\|_\infty^{[\alpha ; \beta]} \leqslant e^{-a_{N+1}\times\alpha}$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur le segment car $e^{-a_{N+1}\times\alpha} \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} 0$.

Ainsi $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0 ; +\infty[$, donc sa somme est continue sur $]0 ; +\infty[$.