- *Pour chercher le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, si on étudie le comportement quand n tend vers $+\infty$ de $a_n z^n$, ou celui de $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right|$, je vous exhorte à prendre au préalable $x \in]0\ ;+\infty[$, puis à travailler sur le comportement de $a_n x^n$, ou celui de $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|$.*
  Comme ça vous êtes couvert lorsque vous oubliez la valeur absolue, ou si vous prenez $\ln(x)$, etc.
- *De la même manière, si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs complexes, ou à la rigueur de signe changeant, cherchez le rayon de convergence de la série $\sum |a_n|\, x^n$, qui est le même que celui de $\sum a_n z^n$, vous éviterez ainsi de prendre le logarithme d'un nombre complexe, ou autres joyeuses absurdités...*
- *Pour les élèves qui doutent du rayon de convergence de la fonction puissance, songez que*

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}\right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1,$$

  donc avec d'Alembert on montre que le rayon de convergence est 1.
- *Attention aux sempiternelles erreurs sur les équivalents :*
  - *on ne compose pas à gauche des équivalents, autrement dit ce n'est pas parce que $u \sim v$ que $f \circ u \sim f \circ v$.*
    Par exemple : $n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, mais e^{n^2+n} n'est pas équivalent à e^{n^2} puisque le rapport des deux donne e^n qui tend vers $+\infty$;
  - *de même, il est faux d'affirmer que $(n+1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n$, en effet*

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times (n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^1 \times (n+1) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty.$$

(mis à jour le 19 février 2025)

Questions de cours 1

- Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Que dire de la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la série $\sum a_n z^n$ selon que $|z| < \mathrm{R}$ ou $|z| > \mathrm{R}$?
- Dérivabilité et dérivation de la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence R.
- Donner en fonction de f les coefficients de la série entière d'une fonction f développable en série entière sur $]-r\,;\,r[$?
- Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$, $x \mapsto \sin(x)$, et $x \mapsto (1+x)^\alpha$, ainsi que leurs rayons de convergence respectifs.

Exercice 1

Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n2^n}$.

Exercice 2

Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} x^{2n}$.

Exercice 3

Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum (2+ni)^n z^n$.

Exercice 4

Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{\ln(n)} z^n$.

Exercice 5 – Oral Mines-Ponts

Rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

Exercice 6

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$, et f sa fonction somme.

1. Étudier le rayon de convergence de la série entière dont la suite des coefficients a pour terme général $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
2. Déterminer une expression de sa somme en fonction de f.

Exercice 7 – (*)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de même rayon de convergence $R > 0$, dont on note f et g les fonctions somme.
On suppose que $f \times g$ est la fonction nulle sur $]-R\,;R[$. Prouver que f ou g sont la fonction nulle sur $D(0,R)$.

Exercice 8

Montrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 9

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 5$, $a_2 = 21$, et pour tout entier $n \geqslant 3$, $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 10^n$.
2. Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif R, et calculer sa somme S sur $]-R\,;R[$.
3. Montrer qu'il existe un triplet (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in]-R\,;R[$
$$S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-1/2} + \frac{c}{(x-1/2)^2}.$$
4. Donner l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 10

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, après avoir montré que le rayon de convergence de cette série entière est strictement positif.
En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Exercice 11

Soit $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 *(on pourra utiliser* $\cos(2n\theta)$*)*.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \cos(n\theta)x^n$.
3. Déterminer sa fonction somme sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 12

Déterminer le développement en série entière en 0 de $\ln(1+x-2x^2)$.

Exercice 13

Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{(n+4)n!} x^n$.

Exercice 14 – (**)

Montrer que si une fonction f développable en série entière en 0 s'annule en $\frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang, alors c'est la fonction nulle.

Exercice 15 – (*)

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$.
Donner une expression de sa fonction somme sur l'intervalle ouvert de convergence en utilisant sa dérivée.

Exercice 16 – Oral Mines-Ponts

Soit $\lambda > 1$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{\lambda a_n}{\lambda^{n+1} - 1}.$$

Notons f la somme de la série entière définie par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que le rayon de convergence de f est infini.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f(\lambda x) = (\lambda x + 1) f(x)$.
   En déduire les zéros de f.

Exercice 17

1. Donner le rayon de convergence et une expression de la somme S de la série entière $\sum \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$.

Soient $\alpha > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la série génératrice est $G_X = \alpha S$.

2. (a) Déterminer α et donner l'expression de G_X.
   (b) Donner l'espérance et la variance de X.

Solutions

Une correction de l'exercice 1 — *énoncé*

Soit x un réel strictement positif.
On note $u_n = \frac{(1+i)^n x^{3n}}{n2^n}$, u_n ne s'annule pour aucune valeur de $n \in \mathbb{N}$, et sachant que $|1+i| = \sqrt{2}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\sqrt{2}n}{2(n+1)}x^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^3}{\sqrt{2}}$$

donc d'après le critère de d'Alembert,

- si $\frac{x^3}{\sqrt{2}} < 1$, c'est-à-dire $x < 2^{1/6}$, la série $\sum \frac{(1+i)^n x^{3n}}{n2^n}$ converge, donc $\mathrm{R} \geqslant 2^{1/6}$;
- si $\frac{x^3}{\sqrt{2}} > 1$, c'est-à-dire $x > 2^{1/6}$, la série $\sum \frac{(1+i)^n x^{3n}}{n2^n}$ diverge, donc $\mathrm{R} \leqslant 2^{1/6}$;
- d'où $\mathrm{R} = 2^{1/6}$.

Une correction de l'exercice 2 — *énoncé*

Notons $a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n+1}$, et R le rayon de convergence de $\sum a_n x^{2n}$.
Soit $x > 0$.
Dans un premier temps $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$, donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$.

- Pour $x = \sqrt{2}$, $a_n x^{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\mathrm{R} \leqslant \sqrt{2}$,
- et pour $x < \sqrt{2}$, $\ln\left(x^2/2\right) < 0$, donc par croissances comparées

$$a_n x^{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \mathrm{e}^{n\ln\left(x^2/2\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

  d'où $\mathrm{R} \geqslant \sqrt{2}$.
- Ainsi $\mathrm{R} = 2$.

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

Pour tout réel $x > 0$,

$$|(2+ni)^n x^n| = \left(\sqrt{4+n^2}\right)^n x^n = \left(x\sqrt{4+n^2}\right)^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$$

donc le rayon de convergence est nul.

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

Soit x un réel strictement positif.

$$n^{\ln(n)}x^n = \mathrm{e}^{(\ln(n))^2+n\ln(x)} = \exp\left(n\left(\ln(x)+\frac{\ln(n)^2}{n}\right)\right)$$

et par croissances comparées, $\frac{\ln(n)^2}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, donc, pour $x \neq 1$, $\ln(x) \neq 0$, et on obtient :

$$n\left(\ln(x)+\frac{\ln(n)^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \begin{cases} -\infty & \text{si } x<1, \\ +\infty & \text{si } x>1. \end{cases}$$

Ainsi

$$n^{\ln(n)}x^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x<1, \text{ d'où } \mathrm{R} \leqslant 1, \\ +\infty & \text{si } x>1, \text{ donc } \mathrm{R} \geqslant 1, \end{cases}$$

donc $\mathrm{R} = 1$.

Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

Notons $a_n = n^{(-1)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Comme $a_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$, on peut affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant n,$$

or les séries entières $\sum nz^n$ et $\sum \frac{1}{n}z^n$ ont pour rayon de convergence 1, donc (avec cette proposition)le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est 1.

Le calcul de cette somme se fait assez naturellement en séparant les termes de rang pair des termes de rang impair.
On remarquera aussi qu'il est souvent plus simple de manipuler les termes de rang pair, pour la bonne raison que les entiers pairs peuvent être factorisés par 2.

Soit $x \in]-1\ ;\ 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} 2k x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

même si on est censé savoir que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

je continue à la manière de l'élève qui se souvient seulement de

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n &= 2x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(x^2\right)^{k-1} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} x^{2k}\right) \\
&= 2x^2 \times \frac{1}{(1-x^2)} \quad \text{(en utilisant la dérivée de la série géométrique)} \\
&\quad + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(x^2\right)^k\right) \\
&= 2x^2 \times \frac{1}{(1-x^2)} + \left(-\ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln\left(1-x^2\right)\right) \\
&= \frac{2x^2}{(1-x^2)} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \times 1$ est le coefficient de la série entière obtenue avec le produit de Cauchy de $\sum a_n x^n$ et $\sum x^n$, elle a donc un rayon de convergence R_p supérieur ou égal à 1, et pour tout $|x| < R_p$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{f(x)}{1-x}.$$

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

- Pour tout $z \in D(0,R)$, grâce au produit de Cauchy :

$$(f \times g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \text{ avec } c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell.$$

  Or $f \times g$ est nulle sur $D(0,R)$ donc $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Supposons que ni f, ni g n'est nulle sur $]-R\,;R[$, alors les suites de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas nulles. Prenons alors p (*resp.* q) le plus petit des indices n tels que a_n (*resp.* b_n) est non nul.
  Mais alors $c_{p+q} = a_p b_q \neq 0$, ce qui contredit le premier point.

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

Notons R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$.

- De $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(na_n)$ on déduit directement que $R_a \geqslant R_b$.
- Réciproquement, si $x \in]0\,;R_a[$, alors, pour un réel $r \in]x\,;R_a[$,

$$na_n = (a_n r^n) \times \left(n \times \left(\frac{x}{r}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

car
  - $a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque $r < R_a$;
  - $n^\beta \left(\frac{x}{r}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées vu que $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$,

donc $x \in]0 ; R_b]$.
Ainsi $R_a \leqslant R_b$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 9 *énoncé*

1. *La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une récurrence d'ordre 3, autrement dit chaque terme de la suite est défini avec les trois précédents, il est donc naturel de penser à prouver une propriété sur les a_n à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur trois termes, qui nécessite une initialisation avec les trois premiers termes de la suite. Ne pas confondre avec une récurrence forte qui ne s'initialise que sur le premier terme !*

   La proposition $\mathscr{P}(n)$: $|a_n| \leqslant 10^n$ est vraie pour $n \in \{0,1,2\}$.
   Supposons que $\mathscr{P}(n-3)$, $\mathscr{P}(n-2)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ sont vraies, pour un entier $n \geqslant 3$, alors

   $$\begin{aligned} |a_n| &= \left|5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}\right| \\ &\leqslant 5\left|a_{n-1}\right| + 8\left|a_{n-2}\right| + 4\left|a_{n-3}\right| \\ &\leqslant 5\times 10^{n-1} + 8\times 10^{n-2} + 4\times 10^{n-3} \quad \text{(par hypothèses de récurrence)} \\ &\leqslant (500+80+4)\times 10^{n-3} \leqslant 1000\times 10^{n-3} = 10^n, \end{aligned}$$

   Ici l'élève Chaprot garde le signe « - » devant le 8…

   C.Q.F.D.

2. On déduit de la question précédente que R_a est supérieur au rayon de convergence de $\sum 10^n x^n$ qui est égal à $\frac{1}{10}$, donc $R_a > 0$.

Pour tout $x \in]-R_a\ ;\ R_a[$,

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n \\
&= 5x + 21x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}\right) x^n \\
&= 5x + 21x^2 + 5\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-1}x^n - 8\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-2}x^n + 4\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3}x^n
\end{aligned}$$

(ces trois sommes existent car $\sum a_{n-1}x^n$, $\sum a_{n-2}x^n$, et $\sum a_{n-3}x^n$ gardent pour rayon de convergence R_a)

$$\begin{aligned}
&= 5x + 21x^2 + 5\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 8\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+2} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+3} \\
&= 5x + 21x^2 + 5x\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n - 8x^2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 4x^3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= 5x + 21x^2 + 5x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 0 - 5x\right) \\
&\qquad - 8x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 0\right) + 4x^3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= 5x + 21x^2 + 5x\left(S(x) - 5x\right) - 8x^2 S(x) + 4x^3 S(x)
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&(1 - 5x + 8x^2 - 4x^3)S(x) = 5x - 4x^2 \\
&\qquad \Longleftrightarrow -(x-1)(4x^2 - 4x + 1)S(x) = -x(4x-5) \\
&\qquad \Longleftrightarrow -(x-1)(2x-1)^2 S(x) = -x(4x-5).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en prenant $R = \min(R_a, \frac{1}{2})$, alors pour tout $x \in]-R\ ;\ R[$, $(x-1)(2x-1)^2 \neq 0$, et

$$S(x) = \frac{x(4x-5)}{(x-1)(2x-1)^2}.$$

Vérification : on remarque que
- $S(0) = 0$, *ce qui correspond bien à* $a_0 = 0$,
- $\frac{S(x)-S(0)}{x-0} = \frac{(4x-5)}{(x-1)(2x-1)^2} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 5$ *qui correspond à* $a_1 = 5$.

Ceci nous préserve déjà des plus courantes erreurs de calcul.

3. **Première méthode :** pour tout $x \in\ ]-R\ ;\ R[$ on met sur le même dénominateur

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-1/2}+\frac{c}{(x-1/2)^2}&\\ &= \frac{a(x-1/2)^2+b(x-1)(x-1/2)+c(x-1)}{(x-1)(x-1/2)^2}\\ &= \frac{a(2x-1)^2+2b(x-1)(2x-1)+4c(x-1)}{4(x-1)(x-1/2)^2}\\ &= \frac{(4a+4b)x^2-(4a+6b+4c)x+(a+2b-4c)}{4(x-1)(x-1/2)^2}\end{aligned}$$

et en identifiant les coefficients des numérateurs, on remarque qu'il suffit de prendre

$$\left\{\begin{array}{c} 4a+4b=4\\ 4a+6b+4c=-5\\ a+2b-4c=0\end{array}\right.$$

que l'on résout avec le pivot de Gauss en $(a, b, c) = (-1, 2, 3/4)$. Ainsi

$$S(x) = \frac{4}{2x-1}+\frac{3}{(2x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

Deuxième méthode : on suppose que pour tout $x \in\ ]-R\ ;\ R[$,

$$S(x) = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-1/2}+\frac{c}{(x-1/2)^2},$$

alors

➟ $(x-1)S(x) = \begin{cases} a+(x-1)\left(\frac{b}{x-1/2}+\frac{c}{(x-1/2)^2}\right) \xrightarrow[x\longrightarrow 1]{} a \\ \frac{x(4x-5)}{(2x-1)^2} \xrightarrow[x\longrightarrow 1]{} -1 \end{cases}$ donc par unicité de la limite $\boxed{a=-1}$.

➟ $(x-1/2)^2S(x) = \begin{cases} c+(x-1/2)^2\left(\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-1/2}\right) \xrightarrow[x\longrightarrow 1/2]{} c \\ \frac{x(4x-5)}{4(x-1)} \xrightarrow[x\longrightarrow 1/2]{} \frac{3}{4} \end{cases}$ d'où $\boxed{c=\frac{3}{4}}$.

➟ Enfin, on remplace x par 0 dans

$$S(x) = -\frac{1}{x-1}+\frac{b}{x-1/2}+\frac{3}{4(x-1/2)^2},$$

on obtient $0=1-2b+3$, d'où $\boxed{b=2}$.

4. Il nous reste alors à développer en série entière cette nouvelle expression de $S(x)$ pour identifier les coefficients.
Pour tout $x \in]-1/2\ ;\ 1/2[$,

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\frac{1}{x-1/2} = -2\frac{1}{1-2x} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2^{n+1})x^n$$

puis par produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x-1/2}\right)^2 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-2^{n+1})x^n\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-2^{k+1})\times(-2^{n-k+1})\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^{n+2}x^n,\end{aligned}$$

ou tout aussi bien avec la dérivée de la série géométrique :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x-1/2}\right)^2 &= \frac{4}{(1-2x)^2} = 4\times\sum_{n=1}^{+\infty} n(2x)^{n-1}\\ &= 4\times\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^{n+2}x^n.\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$,

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(x) &= -\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-1/2}+\frac{3}{4(x-1/2)^2}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-2^{n+1})x^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^{n+2}x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-2^{n+2}+3(n+1)2^n\right)x^n,\end{aligned}$$

donc sachant que d'autre part $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$ aussi, on peut conclure par unicité du développement en série entière que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = 1-2^{n+2}+3(n+1)2^n.$$

Une correction de l'exercice 10 *énoncé*

> *Le but final de cet exercice est de trouver une expression de a_n en fonction de n, on ne va donc pas utiliser le théorème connu sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.*

- On démontre par une récurrence sur 2 termes que, par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 2^n$.
  On en déduit grâce à la proposition 13.4 *(remarquons qu'une inégalité est un cas particulier de domination)* que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum 2^n x^n$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ (car $\sum (2x)^n$ converge si, et seulement si, $|2x| < 1$), donc R est effectivement strictement

positif.

➟ Pour x dans $]-R,R[$, on a :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=1+x+\sum_{n=2}^{+\infty}a_nx^n=1+x+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+2}x^{n+2}$$

$$=1+x+\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}+a_n)x^{n+2}$$

$$=1+x+x\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1}+x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

(car les séries entières définies par les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont le même rayon de convergence)

$$=1+x+x(f(x)-1)+x^2f(x),$$

d'où

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

➟ Je vous laisse établir que $1-x-x^2$ a pour racines $\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et en $\beta=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, donc que

$$1-x-x^2=-\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}1}{2}\right),$$

puis que pour tout réel x différent de α et β :

$$\frac{1}{1-x-x^2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha\sqrt{5}}\times\frac{1}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)}-\frac{1}{\beta\sqrt{5}}\times\frac{1}{1-\left(\frac{x}{\beta}\right)}$$

chacune des deux fractions ci-dessus peut être développée en série entière, avec pour rayons de convergence respectifs $|\alpha|$ et $|\beta|$. Or $|\alpha|<|\beta|$,

donc elles sont toutes les deux développables en série entière sur $x \in]-|\alpha|\,;\,|\alpha|[$.
Grâce à la série géométrique, on a pour tout $x \in]-|\alpha|\,;\,|\alpha|[$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x-x^2} &= \frac{1}{\alpha\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)} - \frac{1}{\beta\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\left(\frac{x}{\beta}\right)}\\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{5}} \times \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n - \frac{1}{\beta\sqrt{5}} \times \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\beta}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}}\right) x^n.\end{aligned}$$

Ainsi pour x dans le plus petit des deux intervalles $]-R\,;\,R[$ et $x \in]-|\alpha|\,;\,|\alpha|[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}}\right) x^n,$$

donc par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on conclut que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}}\right),\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left((-\beta)^{n+1} - (-\alpha)^{n+1}\right) \ \ (\textit{car } \alpha\beta = -1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 11 *énoncé*

1. Supposons que θ est un réel, qui n'est pas multiple de 2π, et que $u_n = \cos(n\theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Alors

$$u_{2n} = \cos(2n\theta) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$$
$$u_{2n} = \cos(2n\theta) = 2\cos(n\theta)^2 - 1 \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 2\ell^2 - 1$$

donc $\ell = 2\ell^2 - 1$, c'est-à-dire $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$, ce qui donne $\ell = 1$ ou $\ell = -\frac{1}{2}$.
Par conséquent, la suite $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On peut même montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas du tout : dans le cas où θ est un multiple impair de π, alors $u_n = \cos(n\theta) = (-1)^n$ ne converge pas.
Sinon, θ est alors un réel non multiple de π, donc $\sin(\theta) \neq 0$, d'où

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

donc

$$\begin{aligned}\sin(n\theta) &= -\frac{1}{\sin(\theta)}\left(\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)\cos(\theta)\right)\\ &= -\frac{1}{\sin(\theta)}\left(u_{n+1} - u_n\cos(\theta)\right),\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\sin(n\theta) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -\frac{1}{\sin(\theta)}(\ell - \ell\cos(\theta)) = -\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\ell.$$

Mais de même

$$\begin{aligned}\sin(n\theta) &= \frac{1}{\sin(\theta)}\left(\cos((n-1)\theta) - \cos(n\theta)\cos(\theta)\right)\\ &= -\frac{1}{\sin(\theta)}\left(u_{n-1} - u_n\cos(\theta)\right),\\ &\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{\sin(\theta)}(\ell - \ell\cos(\theta)) = +\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\ell\end{aligned}$$

donc $+\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\ell = -\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\ell$, ce qui entraîne $\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\ell = 0$, puis comme $\cos(\theta) \neq 1$, $\ell = 0$ ce qui contredit les seules valeurs possibles 1 et $-\frac{1}{2}$ de ℓ déjà obtenues plus haut.
En conclusion, si $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas du tout.

2. Pour $x = 1$, d'après ce qui précède, la suite $(\cos(n\theta)x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas donc $R \leqslant 1$, mais elle est bornée donc $R \geqslant 1$. Ainsi $R = 1$.

3. Pour tout réel $x \in]-1\ ;\ 1[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{in\theta} x^n\right) \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{in\theta} x^n\right) \quad \textit{(car cette dernière série converge absolument, vu que } \left|\mathrm{e}^{in\theta} x^n\right| = |x|^n \textit{ et } |x| < 1\textit{)} \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(x\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n\right) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{i\theta}}\right) \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{1 - x\mathrm{e}^{-i\theta}}{\left(1 - x\mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(1 - x\mathrm{e}^{-i\theta}\right)}\right) \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{1 - x\cos(\theta) + ix\sin(\theta)}{(1 - x\cos(\theta))^2 + (x\sin(\theta))^2}\right) \\
&= \frac{1 - x\cos(\theta)}{(1 - x\cos(\theta))^2 + (x\sin(\theta))^2} = \frac{1 - x\cos(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 12

énoncé

- Pour tout réel x, $(1 + x - 2x^2) = -2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$,

  Ici l'élève Chaprot fait systématiquement la même erreur qui consiste à oublier le terme dominant : il écrit

  $$(1 + x - 2x^2) = (x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

  donc la fonction $x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$ est définie sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$.

- Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$,

$$\ln(1 + x - 2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n - 1}{n} x^n, \quad (\mathrm{R} = \frac{1}{2}).$$

Une correction de l'exercice 13 *énoncé*

Tout d'abord

$$\frac{n^2+4n-1}{(n+4)n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n\times n!} = \frac{1}{(n-1)!},$$

Dès qu'on peut trouver un équivalent plus simple b_n de a_n, on le prend, ainsi on cherche plus facilement le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ qui est égal à celui de $\sum a_n z^n$.

et on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^{n+1} = x\times \mathrm{e}^x,$$

ainsi la série entière $\sum \frac{1}{(n-1)!}x^n$, et donc par équivalence $\sum \frac{n^2+4n-1}{(n+4)n!}x^n$, ont pour rayon de convergence $+\infty$.

On a beau tourner les fractions dans tous les sens, on n'arrive pas à faire apparaitre des sommes de $\frac{1}{n!}x^n$ sans le $n+4$ au dénominateur, donc de guerre lasse, on est allé chercher une autre méthode.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n^2+4n-1}{(n+4)n!} = \frac{(n+4)n-1}{(n+4)n!} = \frac{(n+4)n}{(n+4)n!} - \frac{1}{(n+4)n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+4)n!},$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{(n+4)n!}x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+4)n!}\right)x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+4)n!}x^n \quad \textit{(car ces deux sommes convergent)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+4)n!}x^n \\
&= x\mathrm{e}^x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+4)n!}x^n.
\end{aligned}$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+4)n!}x^n &= \frac{1}{x^4} \times \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+4}x^{n+4} \\
&= \frac{1}{x^4} \times \frac{1}{n!} \times \int_0^x t^{n+3}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^4} \times \int_0^x t^3 \times \frac{1}{n!}t^n\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

donc, la série entière $\sum \frac{1}{n!}t^n$ ayant pour rayon de convergence $+\infty$, on peut intégrer terme à terme entre 0 et x qui sont bien tous les deux dans son intervalle de convergence :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+4)n!}x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \times \int_0^x t^3 \times \frac{1}{n!}t^n\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^4} \times \int_0^x t^3 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}t^n\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^4} \times \int_0^x t^3 \times \left(\mathrm{e}^t - 1\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^4} \times \int_0^x t^3\mathrm{e}^t\mathrm{d}t - \frac{1}{x^4} \times \int_0^x t^3\mathrm{d}t \quad \textit{(on effectue 3 intégrations par parties successives sur la première intégrale)} \\
&= \frac{1}{x^4} \times \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x - \frac{1}{x^4} \times \frac{1}{4}x^4,
\end{aligned}$$

donc finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{(n+4)n!}x^n = \begin{cases} x\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^4} \times \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{4}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Une correction de l'exercice 14 *énoncé*

Pour montrer qu'une fonction développable en série entière est nulle (au moins au voisinage du point où elle est développable) il suffit de montrer que la suite des coefficients de son développement en série entière est la suite nulle.

Soit f une fonction développable en série entière en 0.

➟ Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in]-\alpha\,;\,\alpha[,\ \ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

Supposons que f est non nulle, alors au moins un des coefficients est non nul. Prenons le coefficient non nul d'indice minimal p, qui est donc $\frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

Bien repérer cette technique qui consiste à prendre le coefficient non nul de plus petit indice p, pour écrire

$$f(t) = a_p t^p + a_{p+1} t^{p+1} + \cdots$$

Cet indice minimal p a tellement d'intérêt pratique qu'il porte un nom : la « valuation ».

Alors

$$\begin{aligned}\forall t \in]-\alpha\,;\,\alpha[,\ \ f(t) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n &= t^p \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^{n-p} \\ &= t^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+p)}(0)}{(n+p)!} t^n \\ &= t^p \times S(t),\end{aligned}$$

où S est la somme d'une série entière, donc en particulier S est une fonction continue en 0.

➟ Mais la fonction S vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ S\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^p} \times f\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

ce qui entraîne par continuité

$$0 = \lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} S\left(\frac{1}{n}\right) = S(0) = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

donc $f^{(p)}(0) = 0$, ce qui contredit la définition de p.

Une correction de l'exercice 15 *énoncé*

1. Avec D'Alembert, $R = 1$.
2. Pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x^{2n}}{n} - \frac{x^{2n}}{n+1}\right].$$

Or pour tout $|\square| < 1$, $-\ln(1-\square) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\square^n}{n}$, donc si $x \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = -\ln(1-x^2),$$

$$\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{n} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\frac{1}{x^2}\left(\ln(1-x^2) - x^2\right),$$

d'où pour tout x non nul de $]-1\ ;\ 1[$,

$$\begin{aligned} S'(x) &= -\ln(1-x^2) + \frac{1}{x^2}\ln(1-x^2) + 1 \\ &= -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\ln(1-x^2) + 1. \end{aligned}$$

Comme on sait que S est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\ ;\ 1[$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, pour tout réel $x \in]-1 ; 1[$,

$$\begin{aligned}
S(x) &= S(0) + \int_0^x S'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x S'(t)\mathrm{d}\ t \ \ \textit{(car } S(0)=0\textit{)} \\
&= \int_0^x \left(-\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\ln(1-t^2)+1\right)\mathrm{d}\ t \ \ \textit{(avec l'expression de } S' \textit{ valable sur }]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[\textit{)} \\
&= -\int_0^x \left(1-\frac{1}{t^2}\right)\ln(1-t^2)\mathrm{d}t \ + x.
\end{aligned}$$

D'où en intégrant par parties, comme les fonctions $u : t \mapsto t+\frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \ln(1-t^2)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0 ; x]$, et que

$$u(t)\times v(t) = \left(t+\frac{1}{t}\right)\ln(1-t^2) \underset{t\to 0}{\sim} -\left(t+\frac{1}{t}\right)t^2 \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
S(x) &= -\left[\left(t+\frac{1}{t}\right)\ln(1-t^2)\right]_{t\to 0}^{x} + \int_0^x \left(t+\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-2t}{1-t^2}\right)\mathrm{d}t + x \\
&= x - \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln(1-x^2) + 2\int_0^x \frac{t^2-1+2}{t^2-1}\mathrm{d}t \\
&= x - \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln(1-x^2) + 2\int_0^x \left(1+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= 3x - \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln(1-x^2) + 2\ln\frac{1-x}{1+x}
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 16 *énoncé*

1. Avec d'Alembert

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{\lambda}{\lambda^{n+1}-1}|x| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \ \ \textit{(car } \lambda > 1\textit{)},$$

donc rayon de convergence infini.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda x+1)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda x^{n+1} + f(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(\lambda^{n+1}-1)x^{n+1} + f(x) \quad \text{(par définition de la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\lambda^{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} + f(x) \quad \text{(car ces deux sommes existent vu que le rayon de convergence est infini)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\lambda^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + f(x) \quad \text{(avec un piti changement d'indice)}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\lambda^n x^n - 1\right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 1\right) + f(x)$$

$$= (f(\lambda x)-1) - (f(x)-1) + f(x) = f(\lambda x), \quad \text{C.Q.F.D.}$$

➟ On remarque que

$$f(-1) = f\left(\lambda \times \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right) = (-1+1)f\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = 0,$$

puis par récurrence, si au rang $n \in \mathbb{N}$, $f(-\lambda^n) = 0$ alors

$$f\left(-\lambda^{n+1}\right) = f(\lambda \times (-\lambda^n)) = \left(-\lambda^{n+1}+1\right) f(-\lambda^n) = 0.$$

Donc tous les $-\lambda^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont des zéros de f.

➟ Réciproquement, si x annule f et $x \notin \{-\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, alors

$$0 = f(x) = f\left(\lambda \times \left(-\frac{1}{\lambda}x\right)\right) = (x+1)f\left(-\frac{1}{\lambda}x\right),$$

donc, comme $x \notin \{-\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, alors en particulier $x+1 \neq 0$, on en déduit que $f\left(-\frac{1}{\lambda}x\right) = 0$, puis de même, par récurrence *(toujours avec l'argument que $x \notin \{-\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\}$)*, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(-\frac{1}{\lambda^n}x\right) = 0.$$

Mais $-\frac{1}{\lambda^n}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car $\lambda > 1$, et comme f est continue en 0 *(en tant que fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$)*, par composition des limites, on obtient

$$f\left(-\frac{1}{\lambda^n}x\right)\begin{cases} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) = a_0 = 1 \end{cases}$$

donc par unicité de la limite, on obtient $0 = 1$, ce qui est inexact.

➟ On peut conclure que l'ensemble des zéros de f est

$$\{-\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Une correction de l'exercice 17 *énoncé*

1. Avec d'Alembert le rayon de convergence est $+\infty$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n+1}{n!}t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)+2n+1}{n!}t^n \\ &= t^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}t^n + 2t\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}t^n \\ &= (t+1)^2\mathrm{e}^t.\end{aligned}$$

2. ➟ Pour tout $t \in [-1\ ;\ 1]$, $\mathrm{G_X}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)\,t^n$.

   On sait par propriété des variables aléatoires que $\mathrm{G_X}(1) = 1$, mais d'autre part $\mathrm{G_X}(1) = \alpha \mathrm{S}(1) = 4\mathrm{e}$, donc $\alpha = \frac{1}{4\mathrm{e}}$.

   Ainsi $\mathrm{G_X} : t \mapsto \frac{(t+1)^2\mathrm{e}^t}{4\mathrm{e}}$.

   ➟ La fonction $\mathrm{G_X}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, donc en particulier $\mathrm{G_X}$ est deux fois dérivable en 1, ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = \alpha S'(1) &= \frac{1}{4e} \times \Big[2(t+1)e^t + (t+1)^2 e^t\Big]_{t=1}\\ &= \frac{1}{4e} \times \Big[(t^2+4t+3)e^t\Big]_{t=1} = \frac{1}{4e} \times 8e = 2\\ \textit{et}\ \ \mathbb{V}(X) &= G_X''(1) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2\\ &= \frac{1}{4e} \times \Big[(2t+4)e^t + (t^2+4t+3)e^t\Big]_{t=1} + 2 - 4 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$