Colles de la semaine 20. Intégrales à paramètre

Questions de cours 1

1. Théorème de convergence dominée à paramètre continu.
2. Caractère $\mathscr{C}^k$ d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.
3. Caractère $\mathscr{C}^\infty$ d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.
4. Soient a et b des fonctions continues sur un intervalle I.
   Si on connaît une solution f sur I de $y' + a(x)y = 0$, et une solution g sur I de $y' + a(x)y = b(x)$, quel est l'ensemble des solutions sur I de $y' + a(x)y = b(x)$?
5. Soient c une fonction continue sur un intervalle I, et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$
   Si on connaît deux fonctions f et g non colinéaires solutions sur I de $y'' + ay' + by = 0$, et une solution h sur I de $y'' + ay' + by = c(x)$, quel est l'ensemble des solutions sur I de $y'' + ay' + by = c(x)$?

Exercice 1

Montrer que la fonction

$$\mathrm{L} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $[0 ; +\infty[$, et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0 ; +\infty[$.
Calculer $\mathrm{L}''(x)$ pour tout $x > 0$, et en déduire $\mathrm{L}(x)$, en admettant que L et L′ tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 2

Montrer que la fonction

$$\mathrm{F} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)(1 + i\,tx)} \,\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

(mis à jour le 19 mars 2025)

Exercice 3

1. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre, et en déduire une expression de $f(x)$.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f admet un développement en série entière que l'on précisera.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ en justifiant grâce à une intégration par parties que f est solution d'une équation différentielle.

Exercice 5

On pose $\mathrm{F}(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(a\sin(x))\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que F définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire
$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_0^{\pi} \sin(a\sin(x))\mathrm{d}x.$$

Exercice 6

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \arctan(x\tan t)\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. La fonction f est-elle monotone ?
3. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
4. Calculer $f'(x)$.

Exercice 7

Soient

$$f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par g. En déduire g puis f.

Exercice 8

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, telle que $f'(x) + f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} \ell$.
Montrer que $f'(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 0$.
(On peut peut-être commencer par le cas $\ell = 0$.)

Solutions

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

(i) ➟ La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme rapport de deux fonctions continues sur $]0\,;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

➟ On connaît le développement limité de cos en 0

$$\cos(t) \underset{t\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}t^2+o(t^2),$$

qui nous donne

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2}+o(1) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2},$$

donc φ est prolongeable par continuité en 0 et par conséquent intégrable sur $]0\,;1]$.

On peut aussi déduire de la limite finie que $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} O(1)$, et comme $t \mapsto 1$ est intégrable en 0, et conclure par domination.

➟ Pour tout $t>0$,

$$|\varphi(t)| \leqslant \frac{2}{t^2},$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, donc comparaison, φ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

On peut alors conclure que φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

(ii) Soit f définie sur $\mathbb{R}^+\times]0\,;+\infty[$ par $f : (x,t) \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$.

➟ Pour tout $t>0$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (la fonction exponentielle est continue)

➟ Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$ (produit de fonctions continues).

➟ Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+\times]0\,;+\infty[$, $xt \geqslant 0$ donc $0 \leqslant \mathrm{e}^{-xt} \leqslant 1$. Ainsi

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

où $\varphi : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ d'après le point précédent.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre permet donc de conclure que L est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

(iii) Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrons que L est $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[a\ ;\ b]$.

- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a\ ;\ b]$, car la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est un rapport de deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas, et la fonction exponentielle est aussi $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

  Pour tout $x \in [a\ ;\ b]$,
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-xt}$$
  et
  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}.$$
- Pour tout $x \in [a\ ;\ b]$, on sait déjà que $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
- Pour tout $x \in [a\ ;\ b]$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
- Pour $x \in [a\ ;\ b]$, $t > 0$, et $k \in \{1,2\}$,
  $$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)t^k\mathrm{e}^{-at}.$$
  La fonction $t \mapsto \varphi(t)t^k\mathrm{e}^{-at}$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant φ en $+\infty$ car par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^k\mathrm{e}^{-at} = 0$.

  Comme φ est intégrable sur $]0\ ;\ +\infty[$, par comparaison, $t \mapsto \varphi(t)t^k\mathrm{e}^{-at}$ l'est aussi.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous permet alors de conclure que L est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a\ ;\ b]$.

Comme ceci est vrai pour tout segment de $]0\ ;\ +\infty[$, on peut conclure que L est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$.

(iv) Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, donc la fonction $t \mapsto \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}$ aussi qui est majorée par la première, et par dérivation d'une intégrale à paramètre :

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ \mathrm{L}'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}(-t)\times \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
\text{et } \mathrm{L}''(x) &= \int_0^{+\infty} (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}''(x) &= \int_0^{+\infty} (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \cos t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-(x-i)t}$ est une fonction intégrable de référence sur $]0\,;+\infty[$ de référence car $\mathbb{R}\mathrm{e}(x-i) = x > 0$, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-(x-i)t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-i)t}\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{(d'après ce résultat sur l'intégration des fonctions complexes)} \\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{1}{x-i}\right) \quad \text{(toujours par le même résultat} \\
&= \frac{1}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathrm{L}''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}.$$

(v) Par le théorème fondamental de l'analyse, comme L' est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned}\mathrm{L}'(x) &= \mathrm{L}'(1) + \int_1^x \mathrm{L}''(t)\mathrm{d}t = \mathrm{C} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| \\ &= \mathrm{C} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) \quad \textit{(où } \mathrm{C}\in\mathbb{R}\textit{)}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{L}'(x) = \mathrm{C}$.
Ainsi, puisque l'énoncé suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{L}'(x) = 0$, on obtient que $\mathrm{C}=0$ puis, pour tout $x>0$, $\mathrm{L}'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
Une primitive de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $x \mapsto x\ln x - x$, ainsi de nouveau par le théorème fondamental de l'analyse

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t^2+1)\mathrm{d}\,t &= [t\ln(t^2+1)]_1^x - \int_1^x \frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}\,t \\ &= x\ln(x^2+1) - \ln 2 - 2\int_1^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\mathrm{d}\,t \\ &= x\ln(x^2+1) - \ln 2 - 2(x-1) + 2\mathrm{Arctan}(x) - 2\mathrm{Arctan}(1)\end{aligned}$$

Par conséquent *(grâce une fois de plus au théorème fondamental de l'analyse)* pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(x) = \mathrm{L}(1) + \int_1^x \mathrm{L}'(t)\mathrm{d}t &= \mathrm{D} + x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x) \\ &= \mathrm{D} + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - \mathrm{Arctan}(x) \\ &= \mathrm{D} + \frac{1}{2}x\ln\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) - \mathrm{Arctan}(x).\end{aligned}$$

D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$, et d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ donc

$$\begin{aligned}x\ln\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right) &\underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \left(-\frac{1}{x^2+1}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x} \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Comme l'énoncé suppose aussi que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{L}(x) = 0$, on obtient finalement $\mathrm{D} = \frac{\pi}{2}$.
Enfin on obtient que, pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{L}(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre avec en particulier l'inégalité de domination :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \forall x \in \mathbb{R},\qquad \left|\frac{1}{(1+t^2)(1+i\,tx)}\right| = \frac{1}{(1+t^2)\,|1+i\,tx|)}$$
$$= \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, en appliquant ce résultat du cours, car sa primitive arctan tend vers une limite finie en $\pm\infty$.

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

On rappelle que la fonction ln est intégrable sur $]0\ ;\ 1]$ avec $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}\,t = -1$.

1. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, avec *(et je vous laisse vérifier les autres conditions)* pour tout segment $[a\ ;\ b] \subset\ ]0\ ;\ +\infty[$, l'inégalité de domination :

$$\forall x \in [a\ ;\ b],\ \forall t \in\ ]0\ ;\ +\infty[,$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-t\ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant |t\ln(t)|\,\mathrm{e}^{-at}$$

où la fonction $t \mapsto |t\ln(t)|\,\mathrm{e}^{-at}$

- est continue sur $]0\ ;\ +\infty[$,
- tend vers 0 en 0 par croissances comparées,
- et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ encore par croissances comparées,

donc est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

2. Pour tout $x > 0$, les fonctions $u : t \mapsto -t\ln(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-xt}$

- sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$,
- et vérifient $u \times v \underset{0}{\longrightarrow} 0$ et $u \times v \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées,

donc par intégration par parties

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^{+\infty} \underbrace{-t\ln(t)}_{u(t)}\underbrace{\mathrm{e}^{-xt}}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-t\ln(t) \times \frac{-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (\ln(t)+1) \times \frac{-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\mathrm{d}t \\
&= 0 - 0 - \frac{1}{x}\left[\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t\right] \\
&= -\frac{1}{x}\left[f(x) + \frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x^2},
\end{aligned}$$

ainsi f est solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}$.

L'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution de l'équation homogène $y' = -\frac{1}{x}y$, et par la variation de la constante $x \mapsto -\frac{\ln(x)}{x}$ est une solution de $y' = -\frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}$, donc les solutions de $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}$ sont de la forme

$$x \mapsto \frac{-\ln(x) + \mathrm{C}}{x}, \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

Donc il existe un réel C tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{-\ln(x) + \mathrm{C}}{x},$$

mais pour l'instant je n'arrive pas à voir comment trouver la valeur de C correspondante.

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

1. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0\ ;\ +\infty[$, notons $u(t,x) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.
   - ➠ Pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivées successives données pour tout $k \in \mathbb{N}$ par
   $$\frac{\partial^k u}{\partial x^k} : (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} t^k \cos\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right).$$

     Je vous rappelle les dérivées successives des fonctions trigonométriques
   $$\cos^{(k)}(\square) = \cos\left(\square + k \times \frac{\pi}{2}\right),$$
   $$\text{et } \sin^{(k)}(\square) = \sin\left(\square + k \times \frac{\pi}{2}\right).$$
   - ➠ Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0\ ;\ +\infty[$, et de plus
   $$\forall t \in [0\ ;\ +\infty[,\quad \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant t^k \mathrm{e}^{-t^2},$$
   et $t \mapsto t^k \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0\ ;\ +\infty[$ car continue sur $\mathbb{R}$ et dominée par croissances comparées en $+\infty$ par $\frac{1}{t^2}$.
   - ➠ En particulier les majorations ci-dessus assurent par domination que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $[0\ ;\ +\infty[$; donc pour $k = 0$, on a bien l'intégrabilité de $t \mapsto u(x,t)$.

   Les conditions du théorème donnant le caractère $\mathscr{C}^\infty$ d'une intégrale à paramètre sont bien vérifiées, donc f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (xt)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-t^2} t^{2n}}{(2n)!} x^{2n}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

notons pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0\ ;\ +\infty[$,

$$\varphi_n(t) = \frac{(-1)^n e^{-t^2} t^{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(t)\right| \leqslant e^{-t^2} \sum_{n=0}^{N} \frac{|xt|^{2n}}{(2n)!} \leqslant e^{-t^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|xt|^{2n}}{(2n)!} = e^{-t^2} \times \mathrm{ch}(|xt|)$$
$$\leqslant e^{-t^2} \times e^{|x|t} = e^{-t(|x|+t)}$$

Je vous laisse vérifier que pour tout réel u, $\mathrm{ch}(u) \leqslant e^{|u|}$

et la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \times \mathrm{ch}(xt)$ est

- continue sur $[0\ ;\ +\infty[$,
- et dominée par croissances comparées par $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$,

donc elle est intégrable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Je vous laisse vérifier les autres conditions du théorème de convergence dominée pour les séries qui nous permet d'affirmer alors que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-t^2} t^{2n}}{(2n)!} x^{2n} \mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-t^2} t^{2n}}{(2n)!} \mathrm{d}t \right) x^{2n}.$$

On a bien prouvé que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel x, $f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) \mathrm{d}t$.
   Mais une intégration par parties (que je ne détaille pas) donne pour tout réel x,

$$f'(x) = -\frac{x}{2} f(x).$$

   Donc il existe un réel C tel que f est de la forme $x \mapsto Ce^{-x^2/4}$.
   Or $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'où $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}.$$

Une correction de l'exercice 5

énoncé

1. Notons $f : (a,x) \mapsto \sin(a\sin(x))$.
   - Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f(a,\bullet) : x \mapsto \sin(a\sin(x))$ est continue sur $[0\ ;\ \pi]$, donc en particulier intégrable sur ce *segment*.
   - Pour tout $x \in [0\ ;\ \pi]$, $f(\bullet,x) : a \mapsto \sin(a\sin(x))$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \sin(x) \times \cos(a\sin(x))$, donc

   $$\forall (a,x) \in [0\ ;\ \pi] \times \mathbb{R},\quad \left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| \leqslant 1,$$

     et $x \mapsto 1$ est intégrable sur $[0\ ;\ \pi]$.

   On peut donc appliquer la règle de Leibniz (de dérivation des fonctions définies par une intégrale), qui nous permet d'affirmer que :
   - la fonction $\mathrm{F} : a \mapsto \int_0^\pi \sin(a\sin(x))\mathrm{d}x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
   - Pour tout réel a,

   $$\mathrm{F}'(a) = \int_0^\pi \sin(x) \times \cos(a\sin(x))\,\mathrm{d}x.$$

2. En particulier, on peut en déduire que F est dérivable en 0, autrement dit par définition :

   $$\frac{\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(0)}{a - 0} = \frac{1}{a}\int_0^\pi \sin(a\sin(x))\mathrm{d}x \xrightarrow[a \longrightarrow 0]{} \mathrm{F}'(0)$$

   et

   $$\begin{aligned} \mathrm{F}'(0) &= \int_0^\pi \sin(x) \times \cos(0 \times \sin(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = 2. \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

1.(i). La fonction tan est continue sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, et arctan est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x,t) = \arctan(x\tan(t))$ est continue sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

De plus, $|\arctan| \leqslant \frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$,

$$|g(x,t)| = |\arctan(x\tan(t))| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Or $t \mapsto \frac{\pi}{2}$ est continue sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, donc a fortiori intégrable sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi, non seulement pour tout $x \in \mathbb{R}$ par domination $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui assure le fait que f est définie sur $\mathbb{R}$, mais aussi par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, f est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii). Pour tout $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour les mêmes raisons que sa continuité, et a pour dérivée

$$\frac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{\tan t}{1 + x^2\tan^2(t)}.$$

Pour tout réel $a > 0$, on a

$$\forall (x,t) \in [a\ ;\ +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{\tan(t)}{1 + a^2\tan^2(t)}.$$

Comme $t \mapsto \frac{\tan t}{1+a^2\tan^2 t}$ est continue sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et de limite nulle en $\frac{\pi}{2}$, elle est prolongeable par continuité sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, donc intégrable sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètres permet d'affirmer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\ ;\ +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0\ ;\ +\infty[$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(t)}{1 + x^2\tan^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Comme arctan est impaire, on en déduit que f aussi est impaire, donc qu'elle aussi $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

(iii). Pour la dérivabilité de f en zéro, on va utiliser le théorème de limite de la dérivée.

Pour tout $x > 0$, par positivité de l'intégrale, comme $\arctan(\frac{1}{x}) \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &\geqslant \int_0^{\arctan(1/x)} \frac{\tan t}{1+(x\tan t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_0^{\arctan(1/x)} \tan t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln|\cos t|\right]_0^{\arctan(1/x)} = -\frac{1}{2}\ln\left(\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Comme le minorant tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro à droite, on conclut que $\lim\limits_{0^+} f' = +\infty$.

Et comme de plus, f est continue en zéro, cela prouve par le théorème de limite de la dérivée que f n'est pas dérivable en zéro et que son graphe y présente une tangente verticale.

2. La fonction arctan étant croissante sur $\mathbb{R}$, et $\tan(t)$ étant positif sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, on montre par inégalités successives, avec la croissance de l'intégrale que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Le théorème de convergence dominée à paramètre continu, avec la domination de $|g(x,t)|$ par $\frac{\pi}{2}$ comme pour la continuité de f, permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}.$$

Du caractère impair de f on déduit que $\lim_{-\infty} f(x) = -\frac{\pi^2}{4}$.

4. Déjà fait.

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

Préambule : on pose

$$h\colon (x,t)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2} \text{ et } k\colon (x,t)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}.$$

Ce sont des fonctions $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fractions rationnelles définies sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout réel x, pour tout réel t,

$$|h(x,t)| \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^2} \text{ et } |k(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2},$$

et les majorants sont des fonctions intégrables de la variable t car continues sur $\mathbb{R}$ et équivalentes à $\frac{1}{t^4}$ ou $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$, donc par domination les fonctions $t\mapsto h(x,t)$ et $t\mapsto k(x,t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

On a prouvé en passant que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$. Et même qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}$ grâce aux inégalités ci-dessus qui donnent de bonnes inégalités de domination.

1. On sait que la fonction h est de classe $\mathscr{C}^2$ avec

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = it\frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2} \quad\text{et}\quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = (it)^2\frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}.$$

Ces dérivées partielles satisfont les hypothèses de domination

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) := \frac{|t|}{(1+t^2)^2},$$
$$\text{et}\quad \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \psi(t) := \frac{t^2}{(1+t^2)^2},$$

où φ et ψ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (équivalentes à $\frac{1}{|t|^3}$ ou à $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$). Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique et prouve que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad f'(x) = i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad f''(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

2. *Pour la fonction g, on ne peut pas faire la même démonstration, car $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial x}(x,t) = i\mathrm{e}^{itx} \times \frac{t}{1+t^2}$ n'est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour aucun x réel. On commence donc par transformer l'expression de g par une intégration par parties dont je vous laisse vérifier les conditions.*

Pour tout $x \in]0\ ;+\infty[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \left[\frac{\mathrm{e}^{itx}}{ix(1+t^2)}\right]_{t=-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

et on montre alors comme à la question précédente que $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce dont on déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

3. On déduit de l'égalité ci-dessus que pour tout $x \in]0\ ;+\infty[$,

$$ixg(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

et on en déduit que

$$i(xg'(x)+g(x)) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{it^2\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties *(que je vous laisse justifier en amont)* consistant à dériver $t \mapsto t\mathrm{e}^{ixt}$ et à intégrer $t \mapsto \frac{2t}{(1+t^2)^2}$, ainsi que l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{ix}{2}g(x)$ vue au début de cette question, conduisent à

$$\begin{aligned} i(xg'(x)+g(x)) &= i\left[-\frac{t\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\right]_{t=-\infty}^{+\infty} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+itx)\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= i\left(1-\frac{x^2}{2}\right)g(x). \end{aligned}$$

On en déduit que g est solution, sur $\mathbb{R}^*$, de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + \frac{x}{2} y = 0.$$

Cette équation *(plutôt élémentaire)* a pour solutions les fonctions $t \mapsto \mathrm{C}e^{-x^2/4}$, où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$, donc il existe un réel C tel que

$$\forall x \in \left]0\ ;\ +\infty\right[, \quad g(x) = \mathrm{C}e^{-x^2/4}.$$

Comme $g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$ et comme on a démontré la continuité de g sur $\mathbb{R}$ dans le préambule, on en déduit que $\mathrm{C} = \pi$, et que

$$\forall x \in \left]0\ ;\ +\infty\right[, \quad g(x) = \pi e^{-x^2/4}.$$

Enfin, en posant $t' = -t$, on montre que g est paire, ce qui permet de justifier que cette expression reste valable sur $\mathbb{R}$.
On note que cette même expression prouve que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Je vous laisse combiner certains calculs précédents et l'équation différentielle satisfaite par g pour établir que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\frac{x}{2} g(x) = g'(x).$$

Cette égalité reste vraie en $x = 0$ *(par continuité, ou par calcul explicite)*, et on en déduit l'existence d'une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = g + c$. On détermine la valeur de c par le calcul de $f(0)$, effectué au moyen d'une intégration par parties *sur l'expression de* $g(0)$:

$$\begin{aligned}
\pi = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_{t=-\infty}^{+\infty} + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\mathrm{d}t - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = 2\pi - 2f(0).
\end{aligned}$$

On en déduit que $f(0) = \frac{\pi}{2}$, donc que $c = -\frac{\pi}{2}$ et finalement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \pi e^{-x^2/4} - \frac{\pi}{2}.$$

Une correction de l'exercice 8

énoncé

La première idée est d'écrire f en fonction de $f' + f$ au sujet duquel on a le renseignement de la limite.

Notons $g = f' + f$, et considérons cette égalité comme une équation différentielle d'inconnue f :

- $x \mapsto e^{-x}$ est solution de $y' + y = 0$,
- et par la méthode de variation de la constante, une solution de $y' + y = g$ est

$$x \mapsto \left(\int_0^x e^t g(t) \mathrm{d}t\right) \times e^{-x}.$$

Ainsi il existe un réel C tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \left(C + \int_0^x e^t g(t) \mathrm{d}t\right) \times e^{-x}.$$

et pour $x = 0$, l'égalité donne $C = f(0)$.
On peut donc écrire, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(f(0) + \int_0^x e^t \left(f'(t) + f(t)\right) \mathrm{d}t\right) \times e^{-x} \\ &= f(0)e^{-x} + \left(\int_0^x e^t \underbrace{\left(f'(t) + f(t)\right)}_{=g(t)} \mathrm{d}t\right) \times e^{-x}, \end{aligned}$$

d'où par inégalités triangulaires (discrète et continue)

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| e^{-x} + \int_0^x e^t |g(t)| \mathrm{d}t \times e^{-x}.$$

On remarque déjà que $f(0)\mathrm{e}^{-x}$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

À ce stade, on se dit que si $g = f' + f$ tend vers 0, alors l'intégrande $\mathrm{e}^t g(t)$ sera négligeable devant e^t, donc que l'intégrande sera négligeable devant $\mathrm{e}^x - 1$, et comme le tout est multiplié par e^{-x}, que $f(x)$ va aussi tendre vers 0.

Première étape : supposons que $\ell = 0$, autrement dit que $g = f' + f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A tel que pour tout $t \geqslant \mathrm{A}$, $|g(t)| \leqslant \varepsilon$. D'où, avec les inégalités triangulaires (discrète et continue), la relation de Chasles, et la croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^t\,|g(t)|\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^t\,|g(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{A}}^x \mathrm{e}^t \times \varepsilon \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^t\,|g(t)|\,\mathrm{d}t + \varepsilon \times \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right).\end{aligned}$$

De plus, comme f est $\mathscr{C}^1$, alors $g = f' + f$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et l'hypothèse qu'elle tend vers 0 en $+\infty$ permet d'affirmer qu'elle est bornée sur $[0\,;+\infty[$ *(mais on est capable de la prouver si le correcteur l'exige)*, ainsi par croissance de l'intégrale

$$\int_0^x \mathrm{e}^t\,|g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|g\|_\infty^{[0\,;+\infty[} \times \left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - 1\right) + \varepsilon \times \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right).$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geqslant \mathrm{A},$$

Il s'agit de montrer que $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$, c'est-à-dire que $\mathrm{e}^{-x}\int_0^x g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \to \ell$ quand $x \to +\infty$. Comme

$$\mathrm{e}^{-x}\int_0^x g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x [(g(t)-\ell)+\ell]\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x (g(t)-\ell)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \ell(1-\mathrm{e}^{-x}),$$

cela revient encore à démontrer que $\mathrm{e}^{-x}\int_0^x h(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \to 0$ quand $x \to +\infty$, sous l'hypothèse où la fonction continue h est de limite nulle en $+\infty$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \geqslant x_0$, $|h(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, si $x \geqslant x_0$, on a

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{-x}\int_0^x h(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_0^{x_0}|h(t)|\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x}\int_{x_0}^x |h(t)|\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x}\|h\|_\infty^{[0,x_0]}(\mathrm{e}^{x_0}-1) + \\ \leqslant \mathrm{M}_0\mathrm{e}^{-x} + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

où l'on a posé $\mathrm{M}_0 = \|h\|_\infty^{[0,x_0]}(\mathrm{e}^{x_0}-1)$. Comme $\lim(\mathrm{M}_0\mathrm{e}^{-x}) = 0$ quand $x \to +\infty$, il existe $x_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant x_1, \mathrm{M}_0\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $x_2 = \max(x_0, x_1)$. Alors

$$\forall x \geqslant x_2, \quad \left|\mathrm{e}^{-x}\int_0^x h(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$