

Questions de cours 1

Réponses

Compléter, ou bien cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Q1. $\sin(a + b) =$

$\cos(a + b) =$

Q2. Sachant que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ et que $\tan \theta = -\frac{1}{2}$, donner la valeur $\sin(\theta)$ et une valeur approchée (grossière) de θ en radians :

$\sin(\theta) =$

;

$\theta \simeq$

Q3. Le réel $\ln(16)$ vaut :

☐ $4\ln(2)$,

☐ $4\ln(4)$,

☐ $(\ln 2)^4$,

☐ $8\ln(2)$

Q4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas forcément paire ?

☐ $x \mapsto f(\cos x)$,

☐ $x \mapsto \cos(f(x))$,

☐ $x \mapsto f(x)f(-x)$,

☐ $x \mapsto f(x^2)$.

Q5. On suppose que f est dérivable en x_0 , comment définit-on le nombre dérivé $f'(x_0)$?

$f'(x_0) =$

Q6. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\cos(2x)}$.

1. f est dérivable sur $\mathcal{D} =$

2. $\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) =$

Q7. 1. Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{i=0}^{2p+1} x^i =$$

2. La somme $10 + 11 + \dots + 100$ vaut :

☐ 5 050, ☐ 5 005, ☐ 10 100, ☐ 1 100, ☐ $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell} =$$

=

4. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leq k < \ell \leq n} u_{k,\ell} =$$

=

Questions de cours 2

Réponses

Compléter, ou bien cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Q1. $\sin(a + b) =$

$\cos(a + b) =$

Q2. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = ?$ ☐ $\frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, ☐ $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$, ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ☐ $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.

Q3. Donner une valeur approchée grossière en radians de $\theta \in \left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\tan(\theta) = \frac{1}{2}$:

$\theta \simeq$

Q4. Exprimer le nombre $\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$;

$\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right) =$

Q5. Soit f une fonction décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

☐ $x \mapsto f \circ f(x),$

☐ $x \mapsto -f(x),$

☐ $x \mapsto f(-x),$

☐ $x \mapsto f(x^2)$

Q6. On suppose que f est dérivable en x_0 , comment définit-on le nombre dérivé $f'(x_0)$?

$f'(x_0) =$

Q7. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\tan(2x)}$.

1. f est dérivable sur : $\mathcal{D} =$

2. $\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) =$

Q8. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer sans signe somme

$$\sum_{i=0}^{2n-1} i^2 =$$

2. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, que vaut $\sum_{i=p}^{p+q} 2^i$?

☐ $2^p - 2^{p+q+1},$

☐ $\frac{p \times (p+q) \times (p+q+1)}{6},$

☐ $1 - 2^{p+q},$

☐ $\frac{p^2 \times (p+q)^2}{4}.$

3. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell} =$$

$=$

4. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leq k < \ell \leq n} u_{k,\ell} =$$

$=$

Exercice 1

Donner le maximum sur $]0 ; 1]$ de la fonction $x \mapsto |x \ln(x)|$.

Exercice 2

Ex 1. Donner le maximum sur $]0 ; 1]$ de la fonction $x \mapsto |x \ln(x)|$.

Ex 2. 1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est dérivable sur $[0 ; 1[$, et donner l'expression de sa dérivée.

2. Pour tout $x \in [0 ; 1[$, donner une égalité liant $f'(x)$ et $f(x)$.

3. En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0 ; 1[$.

4. Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que la fonction $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2x - 2$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel noté a_n .

Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante.

Ex 4. Justifier pour tout réel $x \in]-\pi/2 ; \pi/2[$, l'inégalité

$$\cos(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

Ex 5. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$, étudier $\frac{x^n - a^n}{x^p - a^p}$ quand x tend vers a .

Ex 6. Calculer la somme $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (-1)^k 2^{n-k}$

Ex 7. Montrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ et à l'aide de la formule du binôme, en déduire le calcul de la somme

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} 2^k.$$

Ex 8. Calculer la somme $\sum_{1 \leq \ell < k \leq n} \frac{\ell}{k(k-1)}$.

Ex 9. Soit n un entier naturel, calculer la somme $\sum_{0 \leq k \leq p \leq n} \binom{p}{k} 3^k$.

Ex 10. 1. En développant $(2k - 1)^3$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

2. Retrouver ce résultat en déterminant auparavant la valeur des sommes $\sum_{k=0}^{2n} k^3$ et $\sum_{k=0}^n (2k)^3$.

Ex 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} \right)$.

Ex 12. 1. Déterminer trois réels a , b et c qui vérifient pour entier $k \geq 2$,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

2. En déduire pour tout $n \geq 2$ la valeur de la somme :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$$

Réponses aux questions de cours

questions

Q 1. $\sin(a + b) = \boxed{\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)}$,

$\cos(a + b) = \boxed{\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)}$.

Q 2. Sachant que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ et que $\tan \theta = -\frac{1}{2}$, quelle est la valeur de $\sin(\theta)$?

$\sin(\theta) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$; $\theta \simeq \boxed{-2,7}$.

Q 3. Le réel $\ln(16)$ vaut :

☒ $4 \ln(2)$, ☐ $4 \ln(4)$, ☐ $(\ln 2)^4$, ☐ $8 \ln(2)$

Q 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas forcément paire ?

☐ $x \mapsto f(\cos x)$, ☒ $x \mapsto \cos(f(x))$,
☐ $x \mapsto f(x)f(-x)$, ☐ $x \mapsto f(x^2)$.

Q 5. On suppose que f est dérivable en x_0 , comment définit-on le nombre dérivé $f'(x_0)$?

$f'(x_0) = \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$.

Q 6. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\cos(2x)}$.

1. f est dérivable sur $\mathcal{D} = \boxed{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\pi + 4k\pi ; \pi + 4k\pi[}$.

2. $\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \boxed{-\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{\cos(2x)}}}$.

Q 7. 1. Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$\sum_{i=0}^{2p+1} x^i = \boxed{\frac{1-x^{2p+2}}{1-x}}$.

2. La somme $10 + 11 + \dots + 100$ vaut :

☒ 5 050, ☐ 5 005, ☐ 10 100, ☐ 1 100, ☐ $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell} = \boxed{\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=k}^n u_{k,\ell}} = \boxed{\sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} u_{k,\ell}}.$$

4. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell} = \boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^n u_{k,\ell}} = \boxed{\sum_{\ell=2}^n \sum_{k=1}^{\ell-1} u_{k,\ell}}.$$

Réponses aux questions de cours

questions

Q 1. $\sin(a+b) = \boxed{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)},$

$\cos(a+b) = \boxed{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}.$

Q 2. Quelle est la valeur de $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

☒ $\frac{2-\sqrt{2}}{4},$ ☐ $\frac{2+\sqrt{2}}{4},$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2},$ ☐ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$

On l'obtient grâce à $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)).$

Q 3. Donner une valeur approchée grossière en radians de $\theta \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\tan(\theta) = \frac{1}{2}$:

$\theta \simeq \boxed{-\frac{6\pi}{7} \simeq -2,7}.$

Q 4. Exprimer le nombre $\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$;

$\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right) = \boxed{\frac{1}{5}(\ln(3) - 2\ln(2))}.$

Q 5. Soit f une fonction décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

☐ $x \mapsto f \circ f(x),$

☐ $x \mapsto -f(x),$

☐ $x \mapsto f(-x),$

☒ $x \mapsto f(x^2)$

Q 6. On suppose que f est dérivable en x_0 , comment définit-on le nombre dérivé $f'(x_0)$?

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Q 7. On considère la fonction $x \mapsto \frac{1}{\tan(2x)}$.

1. f est dérivable sur : $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{4} \right\}$.

2. L'expression de la dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)}.$$

Q 8. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer sans signe somme

$$\sum_{i=0}^{2n-1} i^2 = \frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6}.$$

2. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, que vaut $\sum_{i=p}^{p+q} 2^i$?

$$\begin{array}{ll} \checkmark 2^p - 2^{p+q+1}, & \square \frac{p \times (p+q) \times (p+q+1)}{6}, \\ \square 1 - 2^{p+q}, & \square \frac{p^2 \times (p+q)^2}{4}. \end{array}$$

3. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=k}^n u_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} u_{k,\ell}.$$

4. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^n u_{k,\ell} = \sum_{\ell=2}^n \sum_{k=1}^{\ell-1} u_{k,\ell}.$$