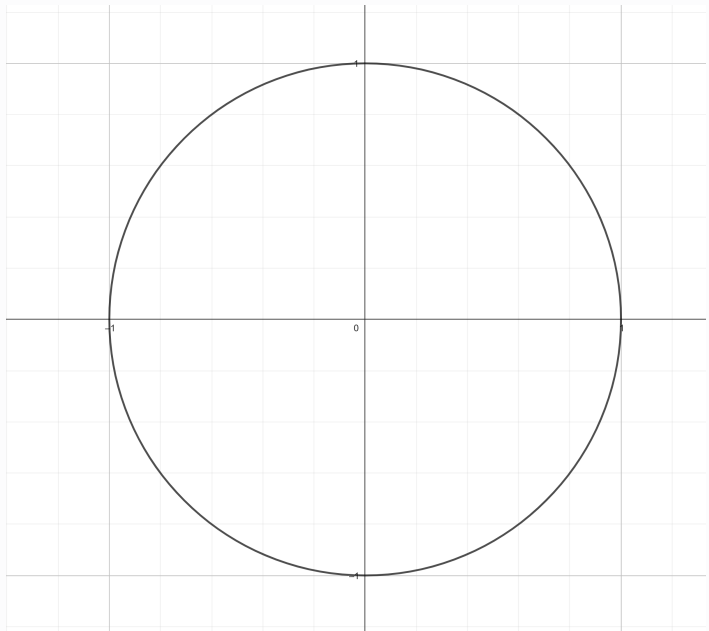


Q1. Placer dans le dessin ci-dessous les nombres $e^{i\frac{47\pi}{4}}$, $e^{-i\frac{15\pi}{7}}$, i^{-22} , et j^{85} :



Q2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, compléter :

$$z^n = 1 \iff z \in \left\{ \boxed{} \mid k \in \boxed{} \right\}.$$

soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, compléter :

$$z^n = \alpha^n \iff \exists k \in \boxed{} \text{ tel que } z = \boxed{}.$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = i$:

$$z^4 = i \iff z \in \left\{ \boxed{} \right\}.$$

Q3. Compléter $\text{ch} : x \mapsto \boxed{}$, $\text{sh} : x \mapsto \boxed{}$.

Q4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I , compléter

f est convexe sur I si, et seulement si,

Dans ce cas, si $a \in I$, compléter avec des expressions qui dépendent de a et x :

$\forall x \in I$,

$\leq f(x) \leq$

Q5. Compléter : $\arccos\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{13}\right)\right) =$

Q6. Donner le théorème fondamental de l'analyse :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [1 ; 7]$, donner pour tout $x \in I$ une expression de $f(x)$ à l'aide d'une intégrale et de f' :

Exercice 1

Calculer les sommes $\sum_{k=0}^n \cos(a+k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(a+k\theta)$ où a et θ sont des réels, et n est un entier naturel.

Exercice 2

Calculer les sommes $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a+k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a+k\theta)$ où a et θ sont des réels, et n est un entier naturel.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 - \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0.$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.

1. Montrer que si z est une solution de cette équation, alors z est un réel.
2. Résoudre cette équation, en exprimant les solutions à l'aide de la fonction cotangente.
3. On suppose dans cette question que $n = 5$.
 1. Retrouver les solutions de l'équation $(z+i)^5 = (z-i)^5$ en développant, et en utilisant la résolution d'une équation du second degré.
 2. En déduire les valeurs exactes (sous forme d'expressions utilisant des radicaux $\sqrt{}$) de

$$\cotan\left(\frac{\pi}{5}\right), \tan\left(\frac{\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Exercice 5

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Exercice 6

Montrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$, $1 + x \leq e^x \leq 1 + (e - 1)$.

Exercice 7

Soient $x_1, \dots, x_n$ n réels de $[0, \pi]$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \sin x_k \leq n \sin\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)$.

Exercice 8

1. Sur quel intervalle I la fonction $f : x \mapsto -\ln(\ln x)$ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?
2. Montrer que f est convexe sur I .
3. En déduire pour tous réels x et y de I l'inégalité

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Réponses aux questions de cours

questions

Q 1.

$$e^{i \frac{47\pi}{4}} = e^{i \left(11\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = -e^{i \frac{\pi}{4}} = e^{i \frac{5\pi}{4}},$$

$$e^{-i \frac{15\pi}{7}} = e^{-i \left(2\pi + \frac{\pi}{7}\right)} = e^{-i \frac{\pi}{7}},$$

$$i^{-22} = (i^2)^{-11} = (-1)^{-11} = -1,$$

$$j^{85} = j^{3 \times 28 + 1} = (j^3)^{28} \times j = 1^{28} \times j = j.$$

Je vous laisse les placer sur le cercle trigonométrique.

Q 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Compléter :

$$z^n = 1 \iff z \in \left\{ e^{ik \frac{2\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket \right\}.$$

soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, compléter :

$$z^n = \alpha^n \iff \exists k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket \text{ tel que } z = \alpha \times e^{ik \frac{2\pi}{n}}.$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = i$:

$$z^4 = i \iff z^4 = \left(e^{i \frac{\pi}{8}}\right)^4 \iff \exists k \in \llbracket 0 ; 3 \rrbracket, z = e^{i \frac{\pi}{8}} \times e^{ik \frac{\pi}{2}}$$

$$\iff z \in \left\{ e^{i \frac{\pi}{8}}, -e^{i \frac{\pi}{8}}, i \times e^{i \frac{\pi}{8}}, -i \times e^{i \frac{\pi}{8}} \right\} = \left\{ e^{i \frac{\pi}{8}}, -e^{i \frac{\pi}{8}}, e^{i \frac{5\pi}{8}}, -e^{i \frac{5\pi}{8}} \right\}.$$

Q 3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I , compléter

f est convexe sur I si, et seulement si, $f'' \geq 0$ sur I .

Dans ce cas, si $a \in I$, compléter avec des expressions qui dépendent de a et x :

$$\forall x \in I, f(a) + f'(a)(x-a) \leq f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Q 4. Compléter : $\arccos\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{13}\right)\right) = \frac{6\pi}{13}.$

Q 5. Donner le théorème fondamental de l'analyse :

Si f est continue sur I alors pour tout $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I , et c'est la seule qui s'annule en a .

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [1 ; 7]$, donner pour tout $x \in I$ une expression de $f(x)$ à l'aide d'une intégrale et de f' :

$$\forall x \in I, f(x) = f(5,78) + \int_{5,78}^x f'(t) dt.$$

Une correction de l'exercice 1

énoncé

Notons respectivement S_n et T_n ces deux sommes, alors

$$S_n + iT_n = \sum_{k=0}^n e^{i(a+k\theta)},$$

autrement dit S_n et T_n sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{k=0}^n e^{i(a+k\theta)}$.

Remarquons d'abord que si θ est un multiple de 2π , alors $\cos(a+k\theta) = \cos(a)$ et $\sin(a+k\theta) = \sin(a)$, donc dans ce cas $S_n = (n+1)\cos(a)$ et $T_n = (n+1)\sin(a)$.

Sinon, θ n'est pas un multiple de 2π , et par conséquent $e^{i\theta}$ est différent de

1, ainsi

$$\begin{aligned}
 U_n &= \sum_{k=0}^n e^{ia} \times (e^{i\theta})^k = e^{ia} \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k = e^{ia} \times \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \quad (\text{car } e^{i\theta} \neq 1) \\
 &= e^{ia} \times \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\
 &= e^{ia} \times \frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i(n+1)\frac{\theta}{2}} - e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right)} \quad (\text{c'est l'« argument-moitié »}) \\
 &= e^{ia} \times \frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} (-2i \sin(n+1)\frac{\theta}{2})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (-2i \sin \frac{\theta}{2})} \\
 &= e^{i(a+(n+1)\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2})} \times \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = e^{i(a+n\frac{\theta}{2})} \times \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
 &= \left(\cos(a + n\frac{\theta}{2}) + i \sin(a + n\frac{\theta}{2}) \right) \times \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } S_n = \cos(a + n\frac{\theta}{2}) \times \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ et } T_n = \sin(a + n\frac{\theta}{2}) \times \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Une correction de l'exercice 2

énoncé

Notons respectivement S_n et T_n ces deux sommes, alors comme dans l'exercice précédent S_n et T_n sont la partie réelle et la partie imaginaire de la somme

$$U_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(a+k\theta)}.$$

Or

$$\begin{aligned}
 U_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ia} \times (e^{i\theta})^k = e^{ia} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k = e^{ia} \times (1 + e^{i\theta})^n \\
 &= e^{ia} \times \left(e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) \right)^n \text{ (avec l'« argument-moitié »)} \\
 &= e^{ia} \times e^{in\frac{\theta}{2}} \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^n = e^{i(a+n\frac{\theta}{2})} 2^n \cos^n \left(\frac{\theta}{2} \right) \\
 &= \left(\cos \left(a + n\frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(a + n\frac{\theta}{2} \right) \right) 2^n \cos^n \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

donc $S_n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \times \cos(a + n\frac{\theta}{2})$ et $T_n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \times \sin(a + n\frac{\theta}{2})$.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

⇒ Pour tout $Z \in \mathbb{C}$,

$$Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \iff \begin{cases} \frac{1-Z^5}{1-Z} = 0 \\ Z \neq 1 \end{cases} \iff Z^5 = 1 \text{ et } Z \neq 1$$

donc comme 1 n'est évidemment pas solution de l'équation, on conclut que

$$Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \iff \exists k \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad Z = e^{i\frac{2\pi}{5}k}.$$

⇒ On en déduit que pour tout nombre complexe z

$$\begin{aligned} & \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 - \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(-\frac{z+i}{z-i}\right)^4 + \left(-\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(-\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(-\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists k \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad -\frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2\pi}{5}} \text{ (ce qui fait 4 équations à résoudre)} \\ \Leftrightarrow & \exists k \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad -\left(1 + e^{ik\frac{2\pi}{5}}\right)z = i\left(1 - e^{ik\frac{2\pi}{5}}\right) \\ \Leftrightarrow & \exists k \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad z = -i \frac{1 - e^{ik\frac{2\pi}{5}}}{1 + e^{ik\frac{2\pi}{5}}} \text{ (car } e^{ik\frac{2\pi}{5}} \neq 1) \\ \Leftrightarrow & \exists k \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad z = -i \frac{e^{ik\frac{\pi}{5}}(e^{-ik\frac{\pi}{5}} - e^{ik\frac{\pi}{5}})}{e^{ik\frac{\pi}{5}}(e^{-ik\frac{\pi}{5}} + e^{ik\frac{\pi}{5}})} = -i \times \frac{-2i \sin\left(k\frac{\pi}{5}\right)}{2 \cos\left(k\frac{\pi}{5}\right)} \\ & = -2 \tan\left(k\frac{\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{ -2 \tan\left(k\frac{\pi}{5}\right) \mid k \in \{1, 2, 3, 4\} \right\}.$$

Une correction de l'exercice 4

énoncé

1. La première équivalence utilisée ci-après est classique :

$$\begin{aligned} (z+i)^n &= (z-i)^n \Leftrightarrow \exists p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \mid (z+i) = (z-i) \times e^{ip\frac{2\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \exists p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \mid z \left(1 - e^{ip\frac{2\pi}{n}}\right) = -i \left(1 + e^{ip\frac{2\pi}{n}}\right) \end{aligned}$$

Dans l'ensemble $\left\{ e^{ip\frac{2\pi}{n}} \mid p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$ des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, seule la valeur correspondant à $p = 0$ donne 1, ce qui entraîne alors que $\left(1 - e^{ip\frac{2\pi}{n}}\right) = 0$.

Mais dans ce cas l'équation donne alors $0 = -2i$, qui n'a pas de solution.

Il reste donc

$$(z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow \exists p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \mid z = \frac{-i \left(1 + e^{ip \frac{2\pi}{n}}\right)}{1 - e^{ip \frac{2\pi}{n}}}$$

Or

$$\frac{-i \left(1 + e^{ip \frac{2\pi}{n}}\right)}{1 - e^{ip \frac{2\pi}{n}}} = -i \frac{e^{ip \frac{\pi}{n}} (e^{-ip \frac{\pi}{n}} + e^{ip \frac{\pi}{n}})}{e^{ip \frac{\pi}{n}} (e^{-ip \frac{\pi}{n}} - e^{ip \frac{\pi}{n}})} = -i \frac{2 \cos \left(p \frac{\pi}{n}\right)}{-2i \sin \left(p \frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\cos \left(p \frac{\pi}{n}\right)}{\sin \left(p \frac{\pi}{n}\right)} = \cotan \left(p \frac{\pi}{n}\right)$$

donc

$$(z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow \exists p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \mid z = \cotan \left(p \frac{\pi}{n}\right)$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{ \cotan \left(p \frac{\pi}{n}\right) \mid p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}$$

2. 1. Grâce à la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned} (z+i)^5 &= (z-i)^5 \\ \Leftrightarrow z^5 + 5iz^4 - 10z^3 - 10iz^2 + 5z + i &= z^5 - 5iz^4 - 10z^3 + 10iz^2 + 5z - i \\ \Leftrightarrow 10iz^4 - 20iz^2 + 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow 5z^4 - 10z^2 + 1 &= 0 \text{ (en divisant les 2 membres par } 2i) \end{aligned}$$

Posons $y = z^2$, on résout alors $5y^2 - 10y + 1 = 0$, cette équation a pour discriminant $\Delta = 80 = 5 \times 16 = (4\sqrt{5})^2$, et pour solutions $\frac{10-4\sqrt{5}}{2 \times 5} = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ainsi

$$\begin{aligned} (z+i)^5 &= (z-i)^5 \Leftrightarrow z^2 = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ou } z^2 = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (ce sont deux réels positifs)} \\ \Leftrightarrow z &= \pm \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}} \text{ ou } z = \pm \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions, dans l'ordre croissant

$$\left\{ -\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} \right\}$$

2. Si on applique le résultat obtenu dans la première question avec $n = 5$, on obtient aussi pour la même équation l'ensemble des solutions

$$\left\{ \cotan\left(p \frac{\pi}{5}\right) \mid p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \right\} = \left\{ \cotan\left(\frac{\pi}{5}\right), \cotan\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cotan\left(\frac{3\pi}{5}\right), \cotan\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right\}$$

La valeur de $\cotan \frac{\pi}{5}$ est la plus grande des 4.

Pour justifier cela, on peut invoquer la décroissance de la fonction $\cotan$ sur l'intervalle $]0, \pi[$ (car $\cotan' = -1 - \cotan^2 = -\frac{1}{\sin^2}$).

Par conséquent, on peut identifier les plus grandes valeurs des deux

ensembles, et affirmer que $\cotan \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

On en déduit que

$$\tan \frac{\pi}{5} = \frac{1}{\cotan \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}}.$$

De plus

$$\cotan^2 = \left(\frac{\cos}{\sin}\right)^2 = \frac{\cos^2}{\sin^2} = \frac{1 - \sin^2}{\sin^2} = \frac{1}{\sin^2} - 1$$

donc

$$\sin^2 = \frac{1}{\cotan^2 + 1}$$

et en particulier

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\cotan^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + 1} = \frac{5}{10 + 2\sqrt{5}}$$

Comme $\frac{\pi}{5}$ est entre 0 et π , on sait que $\sin \frac{\pi}{5}$ est positif, donc

$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5}{10 + 2\sqrt{5}}$ donne

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5}{10 + 2\sqrt{5}}}.$$

Enfin, de $\cos^2 = 1 - \sin^2$, et sachant que $\cos \frac{\pi}{5}$ est positif, on déduit

de façon similaire que $\cos \left(\frac{\pi}{5} \right) = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}}}.$