Colles de la semaine 9. Nom et prénom ?

Questions de cours 1 *Réponses*

Q1. Cocher le bon mot :

$\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ lorsque

- il (☐ **faut** | ☐ **suffit**) que $\mathscr{A}$ soit vraie pour que $\mathscr{B}$ soit vraie ;
- il (☐ **faut** | ☐ **suffit**) que $\mathscr{B}$ soit vraie pour que $\mathscr{A}$ soit vraie ;
- $\mathscr{A}$ est une condition (☐ **nécessaire** | ☐ **suffisante**) pour que $\mathscr{B}$ soit vraie ;
- $\mathscr{B}$ est une condition (☐ **nécessaire** | ☐ **suffisante**) pour que $\mathscr{A}$ soit vraie ;

Q2. Compléter avec $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, ou $\Longleftrightarrow$:

- Si F et G sont deux parties d'un ensemble E, alors

$$\mathrm{G} \subset \mathrm{F} \text{ si, et seulement si, } \quad x \in \mathrm{F} \ \boxed{\qquad\qquad} \ x \in \mathrm{G}\,;$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\quad x^2 < x \ \boxed{\qquad\qquad} \ x < 1\,;$
- Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, alors

$$\forall (a, b) \in \mathrm{I}^2, \ \ a = b \ \boxed{\qquad\qquad} \ f(a) = f(b)\,;$$

f est décroissante sur l'intervalle I si, et seulement si,

$$\forall (a, b) \in \mathrm{I}^2, \ \ a \leqslant b \ \boxed{\qquad\qquad} \ f(a) \geqslant f(b)\,;$$

$f(0) = 1 \ \boxed{\qquad\qquad} \ f$ est dérivable en 0

- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $\quad z^n = 1 \ \boxed{\qquad\qquad} \ z = 1,$

$$z^n = 1 \ \boxed{\qquad\qquad} \ |z| = 1$$

Remplir le cadre, ou cocher les bonnes réponses.

Q3. Si f est solution de $y' = ay + b(x)$, les autres solutions sont :

☐ $x \mapsto Cf(x) + e^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$, ☐ $x \mapsto f(x) + Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$,

☐ $x \mapsto f(x) + e^{ax} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$, ☐ $x \mapsto f(x) \times e^{ax} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Q4. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^t$.

☐ $t \mapsto te^t$ est une solution de (E).
☐ $t \mapsto e^{-t}$ est une solution de (E).
☐ $t \mapsto (1-t)e^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(1) = 0$.
☐ $t \mapsto (1+t)e^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

Q5. Les solutions réelles de (H) : $y'' - 6y' + 10y = 0$ sont les fonctions

$x \longmapsto$ ☐

Q6. Donner une solution particulière de (E) : $y'' + 4y = 1 - 2x^2$:

$x \mapsto$ ☐

Q7. Donner une solution particulière de (E) : $y'' - 4y = e^x \sin(x) - e^{2x}$:

$x \mapsto$ ☐

Q8. Combien y a t-il de solutions de l'équation $\left(2x^2 + 1\right) y' - x \times y = \sin(x)$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 2$?

☐ 0, ☐ 1, ☐ une infinité.

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles :

$$y' + y = t^2, \; 2x\,y' + y = \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad t\,x' - x = t\ln(t).$$

Exercice 2

Résoudre le problème de Cauchy : $(1-x^2)y' + (x-2)y = 0$, et $y(0) = \mathrm{e}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}\,t$.
Établir que f est solution de $y' + 2xy = 1$.

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle $\quad y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x(x^2+1)$.

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle $\quad y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x\cos(3x)$.

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle $\quad y'' + 6y' + 9y = x^2 + e^{3x}$.

Réponses aux questions de cours *questions*

1. Cocher le bon mot :

   $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ lorsque
   - il (☐ **faut** | ☑ **suffit**) que $\mathscr{A}$ soit vraie pour que $\mathscr{B}$ soit vraie ;
   - il (☐ **faut** | ☐ **suffit**) que $\mathscr{B}$ soit vraie pour que $\mathscr{A}$ soit vraie ;
   - $\mathscr{A}$ est une condition (☐ **nécessaire** | ☐ **suffisante**) pour que $\mathscr{B}$ soit vraie ;
   - $\mathscr{B}$ est une condition (☐ **nécessaire** | ☐ **suffisante**) pour que $\mathscr{A}$ soit vraie ;

2. Compléter avec $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, ou $\Longleftrightarrow$:
   - Si F et G sont deux parties d'un ensemble E, alors
   $$\mathrm{G} \subset \mathrm{F} \text{ si, et seulement si,} \quad x \in \mathrm{F} \ \boxed{\Leftarrow}\ x \in \mathrm{G} \,;$$
   - Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\quad x^2 < x \ \boxed{\Rightarrow}\ x < 1$;
   - Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, alors
   $$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \ \ a = b \ \boxed{\Rightarrow}\ f(a) = f(b) \,;$$
   f est décroissante sur l'intervalle I si, et seulement si,
   $$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \ \ a \leqslant b \ \boxed{\Longleftrightarrow}\ f(a) \geqslant f(b) \,;$$
   $f(0) = 1 \ \boxed{???}\ f$ est dérivable en 0
   - Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $\quad z^n = 1 \ \boxed{\Leftarrow}\ z = 1,$
   $$z^n = 1 \ \boxed{\Rightarrow}\ |z| = 1$$

Remplir le cadre, ou cocher les bonnes réponses.

3. Si f est solution de $y' = ay + b(x)$, les autres solutions sont :

   ☐ $x \longmapsto \mathrm{C} f(x) + \mathrm{e}^{ax}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$, ☑ $x \longmapsto f(x) + \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$,

   ☐ $x \longmapsto f(x) + \mathrm{e}^{ax} + \mathrm{C}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$, ☐ $x \longmapsto f(x) \times \mathrm{e}^{ax} + \mathrm{C}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

4. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = \mathrm{e}^t$.

   ☑ $t \longmapsto t\mathrm{e}^t$ est une solution de (E).
   ☐ $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ est une solution de (E).

- ☐ $t \mapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(1)=0$.
- ☑ $t \mapsto (1+t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0)=1$.

5. Les solutions réelles de (H) : $y''-6y'+10y=0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \boxed{\mathrm{e}^{3x}\left(\mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x)\right),\ \text{où } (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2.}$$

car son équation caractéristique est

$$x^2-6x+10=0 \iff (x-3)^3+1=0 \iff (x-3)^2=-1=i^2$$
$$\iff x-3=\pm i \iff x=3\pm i.$$

6. Donner une solution particulière de (E) : $y''+4y=1-2x^2$:

$$x \mapsto \boxed{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$$

7. Donner une solution particulière de (E) : $y''-4y=\mathrm{e}^x\sin(x)-\mathrm{e}^{2x}$:

$$x \mapsto \boxed{\mathrm{e}^x\left(-\tfrac{1}{10}\cos(x)-\tfrac{1}{5}\sin(x)\right)+\tfrac{1}{16}(4x-1)\mathrm{e}^{2x}}.$$

8. Combien y a t-il de solutions de l'équation $\left(2x^2+1\right)y'-x\times y=\sin(x)$ vérifiant la condition initiale $y(0)=2$?

☐ 0, ☑ 1, ☐ une infinité.

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

1. ➟ L'équation homogène est (H) : $y'=-y$, la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est solution de H, donc l'ensemble des solutions de H est

$$\mathrm{Vect}\left(\varphi\right)=\left\{t \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-t}\ \mid\ \mathrm{C}\in\mathbb{R}\right\}.$$

➟ Le second membre $t \mapsto t^2$ nous suggère de chercher une solution particulière de la forme d'un polynôme du second degré $\mathrm{P} : a \mapsto at^2+bt+c$.

$$\mathrm{P}'(t)+\mathrm{P}(t)=t^2 \iff 2a\,t+b+a\,t^2+b\,t+c=t^2$$
$$\iff a\,t^2+(2a+b)t+(b+c)=t^2$$

ceci est vrai dès que

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc $\mathrm{P}(t) = t^2 - 2t + 2$.

➟ On conclut que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + y = t^2$ est

$$\left\{t \mapsto \left(t^2 - 2t + 2\right) + \mathrm{C}e^{-t} \mid \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Ici le second membre $x \mapsto \frac{1}{x}$ est défini sur $\mathbb{R}^\star$, donc on résout l'équation sur les intervalles $]0 ; +\infty[$ et $]-\infty ; 0[$.
Sur ces intervalles, sa forme normalisée est

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad y' = -\frac{1}{2x} y + \frac{1}{2x^2}.$$

Sur le brouillon, on résout l'équation homogène sans précaution :

$$y' = -\frac{1}{2x} y \iff \frac{y'}{y} = -\frac{1}{2x}$$
$$\iff \ln(y) = -\frac{1}{2} \ln(x)$$
$$\iff y = e^{-\frac{1}{2}\ln(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

On en déduit que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est solution sur $]0 ; +\infty[$, et on fait gaffe de mettre une valeur absolue pour la solution $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ sur $]-\infty ; 0[$.
Puis on rédige la solution comme ci-dessous :

➟ ➔ La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, car elle est la composée de $\square \mapsto \sqrt{\square}$, qui est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ à valeurs dans $]0 ; +\infty[$, par $\square \mapsto \frac{1}{\square}$ qui est aussi dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

De plus, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &\left(= \left(x^{-1/2}\right)'\right) \quad \textit{(cette notation est incorrecte, mais c'est pour détailler...)}\\ &= -\frac{1}{2}x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\\ &= -\frac{1}{2x} \times \varphi(x),\end{aligned}$$

donc φ est solution de (H) : $y' = -\frac{1}{2x}y$ sur $]0\,;+\infty[$.

- Et comme le coefficient $x \mapsto -\frac{1}{2x}$ est une fonction continue sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit grâce au théorème de Cauchy que l'ensemble des solutions de (H) sur $]0\,;+\infty[$ est

$$\left\{x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x}} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

> *Si on était observateur on pourrait remarquer que $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est une solution particulière de (E), mais on ne l'est pas, donc on fait la variation de la constante.*

Soit λ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $y : x \mapsto \lambda(x) \times \frac{1}{\sqrt{x}}$ est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, et est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned} & y'(x) = -\frac{1}{2x}y(x) + \frac{1}{2x^2}\\ \iff & \lambda'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \quad \textit{(on a l'a vu plus haut !)}\end{aligned}$$

donc il suffit de prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, ce qui donne la solution particulière $y(x) = -\frac{1}{x}$.

- On conclut que l'ensemble des solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$ est

$$\left\{x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

- De la même manière, on trouve que l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty\ ;\ 0[$ est

$$\left\{x \mapsto -\frac{1}{x}+\frac{C}{\sqrt{|x|}} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. L'équation différentielle $t\,x'-x=t\ln(t)$ est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, et sa forme normalisée est

$$(\mathrm{E}) : x'=\frac{1}{t}x+\ln(t).$$

- L'équation homogène est $(\mathrm{H}) : x'=\frac{1}{t}x$, dont le coefficient $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0\ ;\ +\infty[$. Donc l'ensemble des solutions sur $]0\ ;\ +\infty[$ de (H) est une droite vectorielle.

  Or la fonction $\varphi : t \mapsto t$ est solution de (H), donc l'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathrm{Vect}(\varphi)=\{t \mapsto C\,t \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

- On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme $x : t \mapsto \lambda(t)t$, où λ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

  Cette fonction x est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $t>0$

$$\begin{aligned} & x'(t)=\frac{1}{t}x(t)+\ln(t) \\ \Longleftrightarrow\ & \lambda'(t)=\frac{\ln(t)}{t}=\ln'(t)\times\ln(t)=\left(\frac{1}{2}\ln^2(t)\right)' \end{aligned}$$

  donc on peut prendre $\lambda(t)=\frac{1}{2}\ln^2(t)$, qui nous donne la solution $x : t \mapsto \frac{1}{2}t\ln^2(t)$.
- On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{t \mapsto \frac{1}{2}t\ln^2(t)+C\,t \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

➟ Sur $]-\infty\ ;\ -1[$, $]-1\ ;\ 1[$, $]1\ ;\ +\infty[$, l'équation (E) : $(1-x^2)y'+(x-2)y=0$ équivaut à

$$(\mathrm{EE}) : y' = -\frac{x-2}{1-x^2}y.$$

Comme $x \longmapsto -\frac{x-2}{1-x^2}$ est continue sur $]-1\ ;\ 1[$, le théorème de Cauchy nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution y sur cet intervalle $]-1\ ;\ 1[$ qui vérifie $y(0)=\mathrm{e}$.

Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in\ ]-1\ ;\ 1[$,

$$-\frac{x-2}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x},$$

en multipliant par $1-x$ des deux côtés et en remplaçant x par 1, on obtient $a=\frac{1}{2}$, et de même avec $1+x$ et -1 on a $b=\frac{3}{2}$, d'où

$$-\frac{x-2}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{3}{2}}{1+x},$$

donc une primitive en est

$$x \longmapsto -\frac{1}{2}\ln(1-x)+\frac{3}{2}\ln(1+x) = \ln\left(\frac{(1+x)^{3/2}}{(1-x)^{1/2}}\right) = \ln\left(\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

et par conséquent, les solutions de (EE) sur $]-1\ ;\ 1[$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Parmi ces solutions, la seule qui vaut e en 0 est

$$x \longmapsto \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

➟ On remarque que l'équation différentielle (E) de départ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on se demande donc si on peut prolonger cette solution $y : x \longmapsto \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1\ ;\ 1[$ en une solution sur un intervalle plus grand.

- En 1 à gauche,

$$y(x) = \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x \overset{<}{\to} 1]{} +\infty$$

donc la fonction y ne peut pas être prolongée au dessus de 1.

- En -1 à droite,

$$y(x) = \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \mathrm{e}\frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{(1-x)}} \xrightarrow[x \overset{>}{\to} -1]{} 0,$$

donc y est continue à droite en -1, et on peut s'intéresser au prolongement de y en deçà de -1.

- On remarque d'ores et déjà que

$$y'(x) = -\frac{x-2}{1-x^2} \times y(x) = -\frac{x-2}{(1-x)(1+x)} \times \mathrm{e}\frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{(1-x)}}$$

$$= \mathrm{e}\frac{(2-x)\sqrt{(1+x)}}{(1-x)\sqrt{(1-x)}} \xrightarrow[x \overset{>}{\to} -1]{} 0$$

donc grâce au théorème de la limite de la dérivée, on peut en déduire que y est de classe $\mathscr{C}^1$ à droite en -1, avec $y'_d(0) = 0$.

- La résolution de cette même équation différentielle $y' = -\frac{x-2}{1-x^2} y$, mais cette fois sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$ donne de la même manière les solutions : $x \mapsto \mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{C}\frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}}$.

  Ces solutions vérifient aussi, pour tout réel C, $y(x) \xrightarrow[x \overset{<}{\to} -1]{} 0$, et $y'(x) \xrightarrow[x \overset{<}{\to} -1]{} 0$.

  Donc pour tout $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1\,;\,1[\\ 0 & \text{si } x = -1 \\ \mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x \in]-\infty\,;\,-1[\end{cases}$$

  est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;\,1[$, et est solution du problème de Cauchy initial sur cet intervalle.

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

La fonction $\square \mapsto \mathrm{e}^{\square^2}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier :

- $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$;
- d'après le théorème fondamental de l'analyse $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}\,t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\square \mapsto \mathrm{e}^{\square^2}$;

donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. De plus pour tout réel x,

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}\,t + \mathrm{e}^{-x^2} \times \mathrm{e}^{x^2} = -2xf(x) + 1, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Plus précisément, comme $f(0) = 0$, comme l'application $x \mapsto -2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy linéaire nous permet d'affirmer que f est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} y' &= -2x\,y + 1, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

$$x \mapsto \frac{1}{12}\left(x^4 + 6\,x^2\right)e^x + (\mathrm{K}_2 x + \mathrm{K}_1)e^x$$

Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

$$x \mapsto \mathrm{K}_1 e^{(2\,x)} + \mathrm{K}_2 e^x - \frac{1}{10}\cos(3\,x)\,e^x - \frac{1}{30}\,e^x \sin(3\,x)$$

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

$$x \mapsto \frac{1}{9}x^2 + (\mathrm{K}_2 x + \mathrm{K}_1)e^{(-3\,x)} - \frac{4}{27}x - \frac{1}{36}e^{(3\,x)} + \frac{2}{27}$$