Questions de cours 1

Réponses

Remplir le cadre, ou cocher les bonnes réponses.

Q1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = \mathrm{e}^t$.

- ☐ $t \mapsto t\mathrm{e}^t$ est une solution de (E).
- ☐ $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est une solution de (E).
- ☐ $t \mapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(1) = 0$.
- ☐ $t \mapsto (1+t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

Q2. Les solutions **réelles** de (H) : $y'' - 6y' + 10y = 0$ sont les fonctions

$x \longmapsto$ ☐

Q3. Donner une solution particulière de (E) : $y'' + 4y = 1 - 2x^2$:

$x \mapsto$ ☐

Q4. Donner une solution particulière de (E) : $y'' - 4y = -\mathrm{e}^{2x}$:

$x \mapsto$ ☐

Q5. Donner une solution particulière de (E) : $y'' - 4y = \mathrm{e}^x \sin(x)$:

$x \mapsto$ ☐

Q6. Donner l'énoncé du théorème de Gauss :

☐

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si 12 divise l'entier $7 \times n$ que peut-on en déduire ?

$\boxed{}$

Q7. Donner l'énoncé du théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ *(il y a des « $\forall$ » et des « $\exists$ »)* :

$\boxed{}$

Q8. Donner la factorisation en produit de facteurs premiers des nombres :

$$4950 = \boxed{}, \qquad 585 = \boxed{}.$$

Compléter :

$$\mathrm{PCGD}(4950,585) = \boxed{}, \qquad \mathrm{PPCM}(4950,585) = \boxed{}.$$

Compléter avec la valeur sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{7}{4950} - \frac{11}{585} = \boxed{}.$$

Colles de la semaine 10. Nom et prénom ?

Exercice 1

Soit y une solution de l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - 2y = x$ sur $]0\ ;+\infty[$.

1. Montrer que $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ est solution d'une certaine équation différentielle
2. En déduire y sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 2

Conjecturer la valeur de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k \times k!$,
puis démontrer ce résultat pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soient a et b deux nombres complexes. Démontrer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la formule de Bernoulli :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k.$$

Réponses aux questions de cours

questions

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = \mathrm{e}^t$.

   - ☑ $t \mapsto t\mathrm{e}^t$ est une solution de (E).
   - ☐ $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est une solution de (E).
   - ☐ $t \mapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(1) = 0$.
   - ☑ $t \mapsto (1+t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

2. Les solutions réelles de (H) : $y'' - 6y' + 10y = 0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto (\mathrm{A} \times \cos(x) + \mathrm{B} \times \sin(x))\,\mathrm{e}^x, \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Donner une solution particulière de (E) : $y'' + 4y = 1 - 2x^2$:

$$x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}.$$

4. Donner une solution particulière de (E) : $y'' - 4y = -\mathrm{e}^{2x}$:

$$x \mapsto \frac{1}{16}(4x-1)\mathrm{e}^{2x}.$$

5. Donner une solution particulière de (E) : $y'' - 4y = \mathrm{e}^x \sin(x)$:

$$x \mapsto -\frac{1}{10}(\cos(x) + 2\sin(x))\,\mathrm{e}^x.$$

6. Donner l'énoncé du théorème de Gauss :

   Soient a, b, c trois entiers naturels, si a est premier avec b et divise bc, alors il divise c.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si 12 divise l'entier $7 \times n$ que peut-on en déduire ?

   Si 12 divise l'entier $7 \times n$, comme il est premier avec 7, alors il divise n.

7. Donner l'énoncé du théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ *(il y a des « $\forall$ » et des « $\exists$ »)* :

   Pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [\![0\,;\,p-1]\!]$ tel que $n = p \times q + r$.

8. Donner la factorisation en produit de facteurs premiers des nombres :

$$4950 = \boxed{2\times 3^2\times 5^2\times 11}, \qquad 585 = \boxed{3^2\times 5\times 13}.$$

Compléter :

$$\mathrm{PCGD}(4950{,}585) = \boxed{3^2\times 5 = 45}, \quad \mathrm{PPCM}(4950{,}585) = \boxed{2\times 3^2\times 5^2\times 11\times 13}.$$

Compléter avec la valeur sous forme de fraction irréductible :

$$\begin{aligned}\frac{7}{4950}-\frac{11}{585} &= \frac{7}{2\times 3^2\times 5^2\times 11}-\frac{11}{3^2\times 5\times 13}\\ &= \frac{7\times 13 \quad - \quad 11\times 2\times 5\times 11}{2\times 3^2\times 5^2\times 11\times 13}\\ &= -\frac{373}{21450}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

1. (a) La fonction $z : t \mapsto y(\mathrm{e}^t)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de l'exponentielle qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0\,;+\infty[$ par la fonction y qui est $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$.
De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \mathrm{e}^t\times y'\left(\mathrm{e}^t\right),\\ \text{et}\quad z''(t) &= \mathrm{e}^t\times y'\left(\mathrm{e}^t\right)+\mathrm{e}^t\times\mathrm{e}^t y''\left(\mathrm{e}^t\right)\\ &= z'(t)+\mathrm{e}^{2t}y''\left(\mathrm{e}^t\right).\end{aligned}$$

Or par définition de y,

$$\forall\square\in\,]0\,;+\infty[,\quad \square^2 y''(\square)-2y(\square)=\square,$$

donc en particulier pour tout $t\in\mathbb{R}$, en prenant $\square=\mathrm{e}^t$:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2t}y''\left(\mathrm{e}^t\right)-2y\left(\mathrm{e}^t\right)&=\mathrm{e}^t\\ \left(z''(t)-z'(t)\right)-2z(t)&=\mathrm{e}^t.\end{aligned}$$

Donc z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$z''-z'-2z=\mathrm{e}^t.$$

(b) ➟ L'équation homogène $z''-z'-2z=0$ a pour solutions les fonctions $t\mapsto \mathrm{A}e^{-t}+\mathrm{B}e^{2t}$;

➟ on trouve que $t\mapsto -\frac{1}{2}e^{t}$ est une solution de l'équation avec second membre ;

donc il existe $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$ tels que z est la fonction $t\mapsto \mathrm{A}e^{-t}+\mathrm{B}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t}$.

On en déduit que pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$,

$$y(x)=z(\ln(x))=\mathrm{A}e^{-\ln(x)}+\mathrm{B}e^{2\ln(x)}-\frac{1}{2}e^{\ln(x)}=\frac{\mathrm{A}}{x}+\mathrm{B}x^2-\frac{1}{2}x.$$

Une correction de l'exercice 2 — *énoncé*

➟ Pour conjecturer la valeur de la somme, je ne vois guère que le calcul des premières valeurs :

- pour $n=1$, $\sum\limits_{k=1}^{1} k\times k! = 1$;
- pour $n=2$, $\sum\limits_{k=1}^{2} k\times k! = 5$;
- pour $n=3$, $\sum\limits_{k=1}^{3} k\times k! = 23$;
- *etc.*

mais comme on ne voit rien, le professeur nous dit que c'est normal, et qu'il faut trouver $(n+1)!-1$, que l'on va prouver par récurrence.

➟
- On vient de voir que l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} k\times k! = (n+1)!-1$ est vraie aux rangs 1, 2, et 3, ce qui est largement suffisant pour initialiser la récurrence ;
- soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que l'égalité est vraie au rang n, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, autrement dit montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\times k! = (n+2)!-1.$$

Pour montrer une égalité entre deux nombres, on essaie le plus souvent de partir d'un membre pour arriver à l'autre. Il est presque tout le temps une mauvaise idée de partir de l'égalité à prouver !

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k\times k! &= \sum_{k=1}^{n} k\times k! + (n+1)\times(n+1)! \\ &= \big((n+1)!-1\big) + (n+1)\times(n+1)! \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1)!\times\big(1+(n+1)\big)-1 \\ &= (n+1)!\times(n+2)-1 \\ &= (n+2)!-1, \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Conclusion gnagnagnagna.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

Pour $n=0$, l'égalité est vraie puisque $\sum_{k=0}^{0} a^{n-k}b^k = a^0b^0 = 1$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que l'égalité est vraie au rang n, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, autrement dit que

$$a^{n+2}-b^{n+2} = (a-b)\sum_{k=0}^{n+1} a^{(n+1)-k}b^k.$$

Pour montrer une égalité entre deux nombres, on essaie le plus souvent de partir d'un membre pour arriver à l'autre. Il est presque tout le temps une mauvaise idée de partir de l'égalité à prouver !

$$\begin{aligned}
a^{n+2}-b^{n+2} &= a\times a^{n+1}-b^{n+2} \\
&= a\times\left(a^{n+1}-b^{n+1}+b^{n+1}\right)-b^{n+2} && \textit{(on fait apparaître ce qu'on connaît, ici } a^{n+1}-b^{n+1}\textit{, et on compense autour pour que l'égalité reste vraie)} \\
&= a\times\left((a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k+b^{n+1}\right)-b^{n+2} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= (a-b)a\times\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k+ab^{n+1}-b^{n+2} \\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n+1-k}b^k+(a-b)b^{n+1} \\
&= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n}a^{n+1-k}b^k+b^{n+1}\right) \\
&= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n+1}a^{n+1-k}b^k\right) \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$