Questions de cours 1 *Réponses*

Q1. Remplir le cadre avec une expression qui dépend de n.

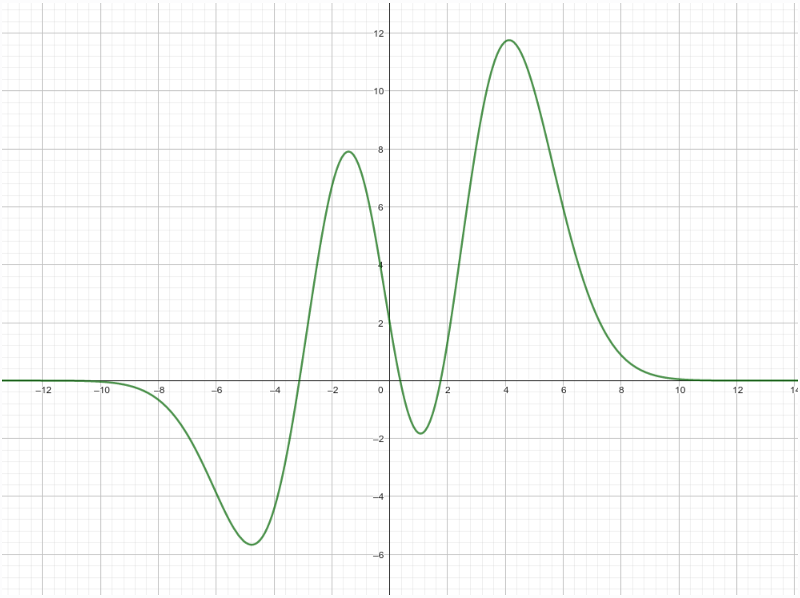
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
  Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \boxed{}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.
  Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \boxed{}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.
  Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \boxed{}$.

Q2. Compléter :

- f est injective de E sur F si, et seulement si, pour tout $\boxed{}$ dans $\boxed{}$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet $\boxed{}$ solution(s) dans $\boxed{}$.
- f est surjective de E sur F si, et seulement si, pour tout $\boxed{}$ dans $\boxed{}$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet $\boxed{}$ solution(s) dans $\boxed{}$.
- f est bijective de E sur F si, et seulement si, pour tout $\boxed{}$ dans $\boxed{}$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet $\boxed{}$ solution(s) dans $\boxed{}$.

 (mis à jour le 16 janvier 2025)

Q3. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont voici le graphe :



Compléter *(les valeurs numériques pourront être approximatives)*

$f(\mathbb{R}) = \boxed{}$,

$f^{-1}([0\ ;+\infty[) = \boxed{}$,

$f(]-6\ ;12]) = \boxed{}$,

$f^{-1}(]-6\ ;12]) = \boxed{}$,

Exercice 1 – Raisonnements élémentaires sur les $\sup$ et $\inf$

Soient A, B des parties non vides de $\mathbb{R}$, et $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\}$.
Montrer que si A et B sont bornées, alors $A+B$ l'est aussi, et

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B), \qquad \inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B).$$

Exercice 2

Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout couple (x,y) de réels.
Montrer que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$;
2. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = nf(1)$;
3. pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $f(q) = qf(1)$;
4. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$ *(on pourra utiliser ici la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et approcher x par une suite de rationnels).*

Exercices

Ex1. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$ est-elle injective ? surjective ?
Déterminer $f([0\,;+\infty[)$.

Ex2. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à tout (x,y) associe $(x+y+1, x(y+2))$ est-elle injective ? Surjective ?

Ex3.
1. Soient $f \in \mathscr{A}(E,F)$, et $g \in \mathscr{A}(F,G)$. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective, et si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
2. En déduire que s'il existe une application φ de F dans E telle que $\varphi \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ \varphi = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective.

Ex4. On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.
Montrer que φ réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de la bijection réciproque, c'est-à-dire $\varphi^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Ex5. On considère les applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C}-\{2\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1-2z}{1-z} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}-\{2\} & \longmapsto & \mathbb{C}-\{1\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-1}{z-2} \end{array}$$

Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Que conclut-on ?

Ex6. Soient a, b, c, d quatre nombres complexes, c étant non-nul.

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{C}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par $\varphi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que si $ad-bc=0$ alors φ est une application constante dont on donnera la valeur.

   L'application φ est-elle bijective dans ce cas ?
2. Supposons que $ad-bc \neq 0$. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{C}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ sur une partie de $\mathbb{C}$ que l'on précisera, et donner l'expression de la réciproque de φ.

Ex7. Montrer qu'une application f est injective de E dans F si et seulement si pour toutes parties A et B de E, $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})=f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.

Réponses aux questions de cours

questions

1. Remplir le cadre avec une expression qui dépend de n.
   - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

     Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \boxed{-1}$.
   - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.

     Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \boxed{2 - 3^n}$.
   - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

     Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \boxed{\sqrt{5}^n\left(\cos(n\theta) - 3\sin(n\theta)\right), \text{ où } \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}.$$

2. Compléter :
   - f est injective de E sur F si, et seulement si, pour tout $\boxed{y}$ dans $\boxed{\mathrm{F}}$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet $\boxed{\text{au plus une}}$ solution(s) dans $\boxed{\mathrm{E}}$.
   - f est surjective de E sur F si, et seulement si, pour tout $\boxed{y}$ dans $\boxed{\mathrm{F}}$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet $\boxed{\text{au moins une}}$ solution(s) dans $\boxed{\mathrm{E}}$.
   - f est bijective de E sur F si, et seulement si, pour tout $\boxed{y}$ dans $\boxed{\mathrm{F}}$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet $\boxed{\text{une unique}}$ solution(s) dans $\boxed{\mathrm{E}}$.

3. $$f(\mathbb{R}) = \boxed{[-5{,}8\ ;\ 11{,}8]},$$
$$f^{-1}([0\ ;\ +\infty[) = \boxed{[-3{,}6\ ;\ 0{,}2] \cup [1{,}8\ ;\ +\infty[},$$
$$f(]-6\ ;\ 12]) = \boxed{f(\mathbb{R}) = [-5{,}8\ ;\ 11{,}8]},$$
$$f^{-1}(]-6\ ;\ 12]) = \boxed{\mathbb{R}}.$$

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

On rappelle que si A est une partie de $\mathbb{R}$ majorée, alors

$$M = \sup(A) \iff \left| \begin{array}{l} \forall x \in A \;\; x \leqslant M, \\ \forall \varepsilon > 0, \;\; \exists x \in A, \;\; M - \varepsilon < x. \end{array} \right.$$

- Supposons que A et B sont bornées, alors comme ces deux parties sont non vides, elles ont une borne supérieure et une borne inférieure, et de plus la partie $A + B$ est aussi non vide.
  Soit donc s un élément de $A + B$.
  Par définition de $A + B$ il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $s = a + b$. Or

  $$\inf(A) \leqslant a \leqslant \sup(A), \qquad \inf(B) \leqslant b \leqslant \sup(B),$$

  donc en additionnant terme à terme :

  $$\inf(A) + \inf(B) \leqslant s \leqslant \sup(A) + \sup(B).$$

  Ainsi $A+B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$, et $\inf(A)+\inf(B)$ en est un minorant, tandis que $\sup(A) + \sup(B)$ en est un majorant
  la borne supérieure est le plus petit majorant, donc

  $$\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B),$$

  et la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc

  $$\inf(A) + \inf(B) \leqslant \inf(A + B).$$

- Montrons à présent l'égalité $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B)$.
  Pour cela, prenons un réel $\varepsilon > 0$, et montrons que $\sup(A)+\sup(B)-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $A + B$. On aura ainsi montré que $\sup(A) + \sup(B)$ est bien le plus petit des majorants de $A + B$, c'est-à-dire la borne supérieure de $A + B$, et on pourra conclure l'égalité $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B)$ tant convoitée.
  La borne supérieure étant par définition le plus petit des majorants, $\sup(A) - \frac{1}{3}\varepsilon$ n'est plus un majorant de A, donc il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{1}{2}\varepsilon < a$.

De même, on peut trouver $b \in \mathrm{B}$ tel que $\sup(\mathrm{B}) - \frac{1}{2}\varepsilon < b$.
Ainsi, en additionnant terme à terme ces deux inégalités, le réel $a+b$, qui est dans $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, vérifie que

$$\sup(\mathrm{A}) + \sup(\mathrm{B}) - \varepsilon < a + b,$$

ce qui prouve que $\sup(\mathrm{A}) + \sup(\mathrm{B}) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, C.Q.F.D.

➟ L'égalité $\inf(\mathrm{A}) + \inf(\mathrm{B}) = \inf(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ se prouve de manière similaire.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

1. ➟ Les deux premiers termes u_0 et u_1 sont strictement positifs ;
   ➟ supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n et u_{n+1} existent et sont strictement positifs, alors $u_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$ est aussi défini, et strictement positif.

   On a donc prouvé que par une récurrence sur deux termes que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définis (et strictement positifs, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse).
2. On a vu que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs, donc la suite de terme général $v_n = \ln(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$, et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) &= \ln\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right) \\ &= 2\ln\left(u_{n+1}\right) - \ln(u_n) \quad \textit{(par propriété du logarithme)} \\ &= 2v_{n+1} - v_n. \end{aligned}$$

   Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 **à coefficients constants**, son équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = 0$ qui a pour unique solution 1.
   Le cours nous permet d'en déduire qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\lambda n + \mu) \times 1^n$.
   On sait que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, donc $v_0 = 0$ et $v_1 = \ln(2)$, ce dont on déduit que $\mu = 0$ et $\lambda = \ln(2)$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(2) \times n = \ln(2^n)$, donc en prenant l'exponentielle (qui est la bijection réciproque de ln), on conclut que $u_n = 2^n$.

3. Le calcul de u_2, u_3, u_4 nous pousse à conjecturer que u_n soit égal à 2^n. Montrons ce résultat par une récurrence sur deux termes.

Une récurrence sur p termes (où $p \in \mathbb{N}^*$) s'utilise pour une propriété $\mathscr{P}$ qui nécessite d'être vraie sur p termes consécutifs pour que le $p+1^e$ terme en hérite.
Ici, on constate que chaque terme de la suite dépend des deux termes précédents, c'est pourquoi on peut légitimement penser qu'il suffit que 2 termes vérifient une propriété pour que le terme suivant la vérifie aussi.

- L'égalité $u_n = 2^n$ est vraie aux rangs $n \in [\![0 \,;\, 4]\!]$ (les deux premiers rangs sont suffisants pour la récurrence sur 2 termes).
- Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$, alors au rang suivant :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = \frac{(2^{n+1})^2}{2^n} \\ &= 2^{2(n+1)-n} = 2^{n+2}. \end{aligned}$$

- On a donc établi grâce à une récurrence sur deux termes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

Une correction de l'exercice

énoncé

Ex1. Notons f l'application $x \mapsto x^3 - x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- On remarque $f(0) = f(1) = 0$, donc f n'est pas injective.
- L'application f est continue sur $\mathbb{R}$, et admet pour limites $-\infty$ en $-\infty$, et $+\infty$ en $+\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, et par conséquent f est surjective.
- L'application f est dérivable de dérivée

$$f' : x \mapsto 3x^2 - 1 = 3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

donc f décroît sur $\left[0 \,;\, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et croît sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \,;\, +\infty\right[$, par conséquent, grâce au théorème des valeurs intermédiaires

$$f([0\ ;+\infty[) = \left[f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ ;+\infty\right[= \left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}\ ;+\infty\right[.$$

Ex2. Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, on doit essayer de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $f(x,y)=(\alpha,\beta)$.

$$\begin{aligned} f(x,y)=(\alpha,\beta) &\Leftrightarrow (x+y+1, x(y+2))=(\alpha,\beta)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+(y+2)=\alpha+1\\ x(y+2)=\beta\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{array}{l} x \text{ et } y+2 \text{ sont les racines de}\\ X^2-(\alpha+1)X+\beta.\end{array}\end{aligned}$$

Rappelons que deux nombres quelconques a et b sont les racines du polynôme $(X-a)(X-b)=X^2-(a+b)X+ab$.
Autrement dit, a et b sont les racines de X^2-sX+p si, et seulement si, $\begin{cases} a=b=s\\ a\times b=p\end{cases}$

Le discriminant du polynôme est $\Delta=(\alpha+1)^2-4\beta$, donc :

- pour $\alpha=0$ et $\beta=1$, $\Delta<0$, ainsi P n'a pas de racines réelles, autrement dit $(0,1)$ n'a pas d'antécédent par f.
  On en déduit que f n'est pas surjective ;
- pour $\alpha=-1$ et $\beta=-1$, P a pour racines ±1 donc

$$f(x,y)=(-1,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x=1\\ y+2=-1 \Leftrightarrow y=-3\end{cases}$$
$$\text{ou } \begin{cases} x=-1\\ y+2=1\Leftrightarrow y=-1.\end{cases}$$

On en déduit que $f(1,-3)=f(-1,-1)=(-1,-1)$, donc que f n'est pas injective.

Ex3. 1. (a) Supposons que $g\circ f$ est injective, et montrons que f est injective. Pour cela, prenons x et y dans E, supposons que $f(x)=f(y)$, et montrons que $x=y$.

Alors en composant les deux membres de l'égalité $f(x) = f(y)$ par g, on obtient $g(f(x)) = g(f(y))$ autrement dit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, ce qui entraîne puisque $g \circ f$ est supposée injective, que $\boxed{x = y}$, C.Q.F.D.

(b) Supposons que $g \circ f$ est surjective, et montrons que g est sujective.

Pour cela, prenons $z \in \mathrm{G}$, et cherchons-lui un antécédent dans F par g.

Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $(g \circ f)(x) = z$, alors $g(f(x)) = z$. Donc z admet bien (au moins) un antécédent (ici $f(x)$) par g.

2. Supposons qu'il existe une application φ de F dans E telle que $\varphi \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $f \circ \varphi = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$, alors

   (a) $\varphi \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est bijective, donc en particulier injective. D'après la question 1, cela entraîne que f est aussi injective.

   (b) $f \circ \varphi = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$ est bijective, donc en particulier surjective. D'après la question 1, cela entraîne que f est aussi surjective.

   Ainsi f est injective et surjective, donc f est une bijection.

Ex4. ➟ Tout d'abord, remarquons (à l'aide d'un brave tableau de signe que je ne détaille pas) que $\frac{1-x}{1+x} > 0$ si, et seulement si, $x \in \,]-1,1[$.
Autrement dit, φ est bien une application définie sur $]-1,1[$.

➟ Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout dans $]-1,1[$, selon les valeurs de y, l'équation $\varphi(x) = y$ (x est donc considéré comme un élément de $]-1\,;\,1[$).

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = y &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y \quad \textit{(car exp est la bijection récip}\\
&\Leftrightarrow 1 - x = e^y(1+x) \Leftrightarrow -x(1+e^y) = e^y - 1\\
&\Leftrightarrow x = -\frac{e^y - 1}{e^y + 1} = \frac{1-e^y}{1+e^y} \quad \textit{(car } e^y + 1 \neq 0\textit{)}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé que tout $y \in \mathbb{R}$ admet par φ un antécédent unique dans $]-1,1[$ qui est $x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$.

On peut en conclure que φ est une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$, dont la réciproque est

$$\varphi^{-1} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ y & \longmapsto & \frac{1-e^y}{1+e^y} \end{array}$$

Ex5. L'application $g \circ f$ est définie de $\mathbb{C}-\{1\}$ dans lui-même. Pour tout $z \in \mathbb{C}-\{1\}$,

$$(g\circ f)(z) = g(f(z)) = \frac{f(z)-1}{f(z)-2} = \frac{\frac{1-2z}{1-z}-1}{\frac{1-2z}{1-z}-2}$$

$$= \frac{\frac{-z}{1-z}}{\frac{-1}{1-z}} = z$$

donc $g \circ f$ est l'identité de $\mathbb{C}-\{1\}$.

On montre de même que $f \circ g$ est l'identité de $\mathbb{C}-\{2\}$.

On peut en conclure que g et f sont des applications bijectives, et que chacune est la réciproque de l'autre.

Ex6. 1. Supposons que $ad - bc = 0$, alors $ad = bc$.

Pour tout z de $\mathbb{C}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, multiplions par le nombre non-nul c le numérateur et le dénominateur de $\varphi(z)$, on obtient

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{caz+(bc)}{c(cz+d)} = \frac{caz+(ad)}{c(cz+d)} = \frac{a(cz+d)}{c(cz+d)} = \frac{a}{c}$$

ce qui prouve que φ est constante égale à $\frac{a}{c}$.

Dans ce cas φ n'est pas une bijection pour une foule de raisons, dont par exemple le fait que 0 et 1 ont la même image $\frac{a}{c}$, ce qui empêche φ d'être injective.

2. Soit Z un nombre complexe, et $z \in \mathbb{C}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ (car sinon $\varphi(z)$ n'est pas défini),

$$\varphi(z) = Z \iff \frac{az+b}{cz+d} = Z \iff az+b = Z(cz+d) \iff z(a-cZ) = dZ-b.$$

➟ Si $Z = \frac{a}{c}$, alors $\varphi(z) = Z \iff 0 = d\frac{a}{c} - b \iff ad - bc = 0$ ce qui est supposé faux, donc $\frac{a}{c}$ n'a pas d'antécédent par φ, et φ est bien une application de $\mathbb{C}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ dans $\mathbb{C}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$.

➟ sinon, $a - cZ \neq 0$, donc

$$\varphi(z) = Z \Leftrightarrow z = \frac{dZ - b}{a - cZ}$$

ce qui prouve que Z a un unique antécédent par φ dans $\mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

On en déduit que φ est une bijection de $\mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ sur $\mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, dont la réciproque est définie par

$$\varphi^{-1}(Z) = \frac{dZ - b}{a - cZ}$$

Ex7. Soit f une application de E dans F.

(i) Supposons que f est injective, et montrons que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Soient A et B deux parties de E.

(i) Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ qui vérifie $f(x) = y$. Or $x \in A$, donc $f(x)$, c'est-à-dire y, est dans $f(A)$. De même y est aussi dans $f(B)$, donc y est dans $f(A) \cap f(B)$, C.Q.F.D

(ii) Montrons que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors $y \in f(A)$ donc il existe $x \in A$ qui vérifie $f(x) = y$. De même $y \in f(B)$, donc il existe $x' \in B$ qui vérifie $f(x') = y$.

Ainsi $f(x) = f(x')$, or f est injective, donc $x = x'$. Par conséquent, x est dans $A \cap B$, et $f(x)$, c'est-à-dire y, est dans $f(A \cap B)$, C.Q.F.D

(iii) Donc $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. C.Q.F.D

(ii) Réciproquement, supposons que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, et montrons que f est injective de E dans F.

Soient a et b deux éléments de E qui vérifient $f(a) = f(b)$, montrons que $a = b$.

Posons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$, alors $f(A) = \{f(a)\}$ et $f(B) = \{f(b)\}$, et comme $f(a) = f(b)$, on en déduit que $f(A) \cap f(B) = \{f(a)\}$.

Or par hypothèse, $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$, donc $f(\{a\} \cap \{b\}) = \{f(a)\}$.
Supposons alors que $a \neq b$, dans ce cas $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$, et $f(\{a\} \cap \{b\}) = \varnothing$, ce qui contredit le résultat précédent. Donc $a = b$, C.Q.F.D