

Questions de cours 1

Réponses

Q1. Soit $\mathcal{A} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Cocher les affirmations vraies et les compléter de cas échéant.

La partie $\mathcal{A}$ admet :

☐ un minimum égal à

☐ une borne inférieure égale à

☐ un maximum égal à

☐ une borne supérieure égale à

Q2. Remplir le cadre avec une expression qui dépend de n .

⇒ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n =$

⇒ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n =$

⇒ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n =$

Q3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels et ℓ un réel. Compléter avec la définition :

⇒ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff$

⇒ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff$

Q4. Si une suite est monotone, que peut-on dire sur son comportement asymptotique (*c'est-à-dire son comportement en $+\infty$*)?

Q5. Donner l'énoncé du critère de convergence par encadrement (*jadis appelé « théorème des gendarmes »*) :

Q6. Cocher les affirmations vraies :

- ☐ Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
- ☐ Une suite convergente est bornée.
- ☐ Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
- ☐ Une suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 1

Soient f une fonction telle que $f([-1; 1]) \subset [-1; 1]$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = -\frac{1}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si pour tout $x \in [-1; 1]$, $f(x) \geq x$, que peut-on dire sur le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 2

On pose $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n en s'intéressant à $\ln(u_n)$.
3. *Autre méthode* : calculer u_2, u_3, u_4 , et conjecturer une formule donnant l'expression générale de u_n en fonction de n , puis démontrer que cette expression est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soient a et b deux entiers naturels strictement positifs (fixés pour toute la durée de l'exercice).

On dit qu'une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (E) lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)x_{n+1} = (a+b-1)x_n + b + n.$$

1. Trouver deux réels α et β pour lesquels la suite de terme général $\alpha n + \beta$ vérifie la relation (E).
2. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui vérifie (E), et α et β les deux réels trouvés ci-dessus.

Montrer que la suite de terme général $x_n - (\alpha n + \beta)$ est géométrique et en déduire l'expression de x_n en fonction de x_0 , a , b et n .

3. Déterminer la limite de x_n .

Exercice 4

Montrer que poser $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ définit bien une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Quelle est le comportement asymptotique d'une telle suite ?

Exercice 5

Pour quelle(s) valeur(s) du réel θ la suite $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ a-t-elle une limite ?

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle monotone telle que $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui que vaut sa limite ?

Exercice 7

Déterminer le comportement asymptotique de la suite de terme général

$$u_n = \frac{n(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Exercice 8

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n - \sin k}{n^2 + k}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 9

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $\lim u_n = +\infty$.

Réponses aux questions de cours

questions

1. Soit $\mathcal{A} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Cocher les affirmations vraies et les compléter de cas échéant.

La partie $\mathcal{A}$ admet :

☒ un minimum égal à ;

☒ une borne inférieure égale à ;

☐ un maximum égal à ;

☒ une borne supérieure égale à .

2. Remplir le cadre avec une expression qui dépend de n .

⇒ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \text{}$.

⇒ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \text{}$.

⇒ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \text{}, \text{ où } \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels et ℓ un réel. Compléter avec la définition :

⇒ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \text{}$

⇒ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \text{}$

4. Si une suite est monotone, que peut-on dire sur son comportement asymptotique (*c'est-à-dire son comportement en $+\infty$*)?

Cette suite admet forcément une limite en $+\infty$, finie ou infinie.

→ cette limite est finie si, et seulement si, la suite est croissante et majorée, ou décroissante et minorée ;

→ sinon cette limite est $+\infty$ si la suite est croissante, ou $-\infty$ si elle est décroissante.

5. Donner l'énoncé du critère de convergence par encadrement (jadis appelé « *théorème des gendarmes* ») :

Si	$\rightarrow$ à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n,$ $\rightarrow \lim v_n = \lim w_n = \ell,$	alors	$\rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, $\rightarrow$ sa limite est ℓ .
----	---	-------	--

6. Cocher les affirmations vraies :

FAUX Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.



La suite de terme général $u_n = 2^n + (-2)^n$ n'est pas bornée car $u_{2n} = 2 \times 4^n$ tend vers $+\infty$, mais elle ne tend pas vers $+\infty$ car $u_{2n+1} = 0$ tend vers 0.

VRAI Une suite convergente est bornée.

FAUX Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.



La suite de terme général $u_n = \begin{cases} \ln(n) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n! & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$ tend vers $+\infty$ car les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, mais elle n'est pas monotone car les termes de rangs impairs sont beaucoup plus grands que les termes de rangs pairs.

FAUX Une suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.



La suite de terme général $u_n = \begin{cases} \frac{1}{\ln(n)} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{n!} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$ tend vers 0 car les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0, mais elle n'est pas monotone car les termes de rangs pairs sont beaucoup plus grands que les termes de rangs impairs.

Une correction de l'exercice 1

énoncé

- $\Rightarrow$ $\odot$ Le premier terme u_0 est dans $[-1 ; 1]$,
 $\odot$ et si au rang $n \in \mathbb{N}$, u_n est dans $[-1 ; 1]$, alors au rang suivant $u_{n+1} = f(u_n)$ est dans $f([-1 ; 1]) \subset [-1 ; 1]$, donc $u_{n+1} \in [-1 ; 1]$.
 On a donc prouvé par récurrence que tous les u_n sont dans $[-1 ; 1]$.
 $\Rightarrow$ Mais $f(x) \geq x$ pour tout $x \in [-1 ; 1]$, donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme $u_n \in [-1 ; 1]$, on peut dire que $f(u_n) \geq u_n$, autrement dit que $u_{n+1} \geq u_n$.
 Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

⇒ Ainsi la suite est croissante, et majorée par 1, donc par le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite dont on peut seulement dire qu'elle est dans $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Une correction de l'exercice 2

énoncé

1. ⇒ Les deux premiers termes u_0 et u_1 sont strictement positifs ;
 ⇒ supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n et u_{n+1} existent et sont strictement positifs, alors $u_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$ est aussi défini, et strictement positif.

On a donc prouvé que par une récurrence sur deux termes que tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définis (et strictement positifs, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse).

2. On a vu que tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement positifs, donc la suite de terme général $v_n = \ln(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$, et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \ln(u_{n+2}) = \ln\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right) \\ &= 2\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \quad (\text{par propriété du logarithme}) \\ &= 2v_{n+1} - v_n. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à **coefficients constants**, son équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = 0$ qui a pour unique solution 1.

Le cours nous permet d'en déduire qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\lambda n + \mu) \times 1^n$.

On sait que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, donc $v_0 = 0$ et $v_1 = \ln(2)$, ce dont on déduit que $\mu = 0$ et $\lambda = \ln(2)$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(2) \times n = \ln(2^n)$, donc en prenant l'exponentielle (qui est la bijection réciproque de $\ln$), on conclut que $u_n = 2^n$.

3. Le calcul de u_2, u_3, u_4 nous pousse à conjecturer que u_n soit égal à 2^n . Montrons ce résultat par une récurrence sur deux termes.



Une récurrence sur p termes (où $p \in \mathbb{N}^*$) s'utilise pour une propriété $\mathcal{P}$ qui nécessite d'être vraie sur p termes consécutifs pour que le $p + 1^{\text{e}}$ terme en hérite.

Ici, on constate que chaque terme de la suite dépend des deux termes précédents, c'est pourquoi on peut légitimement penser qu'il suffit que 2 termes vérifient une propriété pour que le terme suivant la vérifie aussi.

⇒ L'égalité $u_n = 2^n$ est vraie aux rangs $n \in \llbracket 0 ; 4 \rrbracket$ (les deux premiers rangs sont suffisants pour la récurrence sur 2 termes).

⇒ Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$, alors au rang suivant :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = \frac{(2^{n+1})^2}{2^n} \\ &= 2^{2(n+1)-n} = 2^{n+2}. \end{aligned}$$

⇒ On a donc établi grâce à une récurrence sur deux termes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

1. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \alpha n + \beta$. Elle vérifie l'égalité (E) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)(\alpha(n + 1) + \beta) = (a + b - 1)(\alpha n + \beta) + b + n$$

$$\Leftrightarrow n\alpha(a + b) + (a + b)(\alpha + \beta) = n(\alpha(a + b - 1) + 1) + \beta(a + b - 1) + b$$

Ceci est vrai en prenant

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \alpha(a + b) &= \alpha(a + b - 1) + 1 \\ (a + b)(\alpha + \beta) &= \beta(a + b - 1) + b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(a + b - (a + b - 1)) &= 1 \\ (a + b)\alpha + (a + b - (a + b - 1))\beta &= b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 1 \\ (a + b)\alpha + \beta &= b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta &= -a \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite de terme général $v_n = n - a$ vérifie l'égalité (E).

2. 1. Par définition de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = x_{n+1} - (n+1) + a$.

D'autre part $a+b$ étant non-nul, et la suite (x_n) vérifiant la relation (E), on peut affirmer que

$$x_{n+1} = \frac{a+b-1}{a+b}x_n + \frac{b}{a+b} + \frac{n}{a+b}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - ((n+1) - a) \\ &= \frac{a+b-1}{a+b}x_n + \frac{b}{a+b} + \frac{n}{a+b} - n - 1 + a \\ &= \frac{a+b-1}{a+b}(y_n + n - a) + \frac{b}{a+b} + \frac{n}{a+b} - n - 1 + a \\ &= \frac{a+b-1}{a+b}y_n + \frac{a+b-1}{a+b}n - \frac{a^2+ab-a}{a+b} \\ &\quad + \frac{b}{a+b} + \frac{n}{a+b} - n - 1 + a \\ &= \frac{a+b-1}{a+b}y_n + \left(\frac{a+b-1}{a+b} + \frac{1}{a+b} - 1 \right)n \\ &\quad - \frac{a^2+ab-a}{a+b} + \frac{b}{a+b} - \frac{a+b}{a+b} + \frac{a^2+ab}{a+b} \\ &= \frac{a+b-1}{a+b}y_n + \left(\frac{a+b-1+1-a-b}{a+b} \right)n \\ &\quad + \frac{-a^2-ab+a+b-a-b+a^2+ab}{a+b} \\ &= \frac{a+b-1}{a+b}y_n. \end{aligned}$$

La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{a+b-1}{a+b}$, et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} y_n &= \left(\frac{a+b-1}{a+b} \right)^n y_0 = \left(\frac{a+b-1}{a+b} \right)^n (x_0 - (0-a)) \\ &= \left(\frac{a+b-1}{a+b} \right)^n (x_0 + a). \end{aligned}$$

2. On obtient directement pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = y_n + n - a = \left(\frac{a+b-1}{a+b} \right)^n (x_0 + a) + n - a.$$

3. D'une part, $-1 < a+b-1 < a+b$ et $a+b > 0$, donc $-1 < \frac{a+b-1}{a+b} < 1$ et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a+b-1}{a+b} \right)^n (x_0 + a) = 0,$$

et d'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - a) = +\infty$, ce qui nous donne finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

Une correction de l'exercice 4

énoncé

1. On montre par récurrence comme dans le premier exercice que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et strictement positif.
2. On va raisonner par l'absurde : supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ .

⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Ainsi par prolongement des inégalités larges à la limite $\ell \geq u_0 > 0$, en particulier $\ell > 0$.

⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, donc en passant à la limite, comme $\ell > 0$, on a $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, donc $\frac{1}{\ell} = 0$, puis en multipliant par ℓ que $1 = 0$, ce qui est tellement faux qu'un frisson glacé nous parcourt l'échine.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger.

Une correction de l'exercice 5

énoncé

Prenons un réel θ non multiple de 2π , et supposons que la suite de terme général $u_n = \cos(n\theta)$ converge vers un réel ℓ .

⇒ Alors d'une part

$$u_{2n} = \cos(2n\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

$$\text{et } u_{2n} = \cos(2n\theta) = 2\cos(n\theta)^2 - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\ell^2 - 1$$

donc $\ell = 2\ell^2 - 1$, donc en particulier $\ell \neq 0$.

⇒ Mais d'autre part,

$$\cos((n+1)\theta) = u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell,$$

$$\text{et } \cos((n-1)\theta) = u_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell,$$

$$\text{donc } \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\ell.$$

Or

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) &= 2\cos(n\theta)\cos(\theta) \\ &= 2u_n \cos(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\ell \cos(\theta) \end{aligned}$$

donc, par unicité de la limite $2\ell \cos(\theta) = 2\ell$, et comme on a vu que $\ell \neq 0$, on en déduit que $\cos(\theta) = 1$, ce qui contredit que θ est un réel non multiple de 2π .

Une correction de l'exercice 6

énoncé

Si une suite est monotone, alors elle a forcément une limite, finie ou infinie, que l'on note L.

Donc toutes ses suites extraites ont aussi pour limite L, en particulier

$$u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L.$$

Or on sait que $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$, donc par unicité de la limite, $L = 2$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.

Une correction de l'exercice 7

énoncé

 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{n(-1)^n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n},$$

 or $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par encadrement $\frac{n(-1)^n}{n^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Une correction de l'exercice 8

énoncé

 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \llbracket 1 ; 2n \rrbracket$,

$$-1 \leq \sin(k) \leq 1, \text{ donc } n - 1 \leq n - \sin(k) \leq n + 1,$$

$$\text{d'où } \frac{n - 1}{n^2 + k} \leq \frac{n - \sin(k)}{n^2 + k} \leq \frac{n + 1}{n^2 + k},$$

 et enfin, comme $1 \leq k \leq 2n$,

$$\frac{n - 1}{n^2 + 2n} \leq \frac{n - 1}{n^2 + k} \leq \frac{n - \sin(k)}{n^2 + k} \leq \frac{n + 1}{n^2 + k} \leq \frac{n + 1}{n^2 + 1}.$$

 En additionnant pour k de 1 à $2n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \frac{n - 1}{n^2 + 2n} &= 2n \times \frac{n - 1}{n^2 + 2n} \leq u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n - \sin(k)}{n^2 + k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{n + 1}{n^2 + 1} = 2n \times \frac{n + 1}{n^2 + 2n}. \end{aligned}$$

Or

$$2n \times \frac{n - 1}{n^2 + 2n} = 2 \times \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2,$$

 et de même $2n \times \frac{n + 1}{n^2 + 2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$, donc par encadrement

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2.$$