Questions de cours 1

Réponses

Q1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et ℓ un réel. Compléter avec la définition *(avec les $\forall$ et les $\exists$)* :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff$ $\boxed{}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff$ $\boxed{}$

Q2. On dit qu'une suite diverge lorsque

Q3. Si une suite est monotone, que peut-on dire sur son comportement asymptotique *(c'est-à-dire son comportement en $+\infty$)* ?

Q4. Donner l'énoncé du critère de convergence par encadrement :

On suppose qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie : $\forall n \geqslant 32,\ \frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{1}{n}$. Cocher chaque affirmation vraie :

- ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang ;
- ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [0\ ;\ 3]$;
- ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(mis à jour le 11 avril 2025)

Q5. Cocher chaque affirmation vraie :

- ☐ Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
- ☐ Une suite convergente est bornée.
- ☐ Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
- ☐ Une suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 1

Soient f une fonction telle que $f([-1\ ;\ 1]) \subset [-1\ ;\ 1]$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = -\frac{1}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si pour tout $x \in [-1\ ;\ 1]$, $f(x) \geqslant x$, que peut-on dire sur le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 2

On pose $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n en s'intéressant à $\ln(u_n)$.
3. *Autre méthode :* calculer u_2, u_3, u_4, et conjecturer une formule donnant l'expression générale de u_n en fonction de n, puis démontrer que cette expression est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soient a et b deux entiers naturels strictement positifs (fixés pour toute la durée de l'exercice).
On dit qu'une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation (E) lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)x_{n+1} = (a+b-1)\,x_n + b + n.$$

1. Trouver deux réels α et β pour lesquels la suite de terme général $\alpha\, n + \beta$ vérifie la relation (E).
2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui vérifie (E), et α et β les deux réels trouvés ci-dessus.
   Montrer que la suite de terme général $x_n - (\alpha n + \beta)$ est géométrique et en déduire l'expression de x_n en fonction de x_0, a, b et n.
3. Déterminer la limite de x_n.

Exercice 4

Montrer que poser $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Quelle est le comportement asymptotique d'une telle suite ?

Exercice 5

Pour quelle(s) valeur(s) du réel θ la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ a-t-elle une limite ?

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle monotone telle que $u_{2n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 2$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui que vaut sa limite ?

Exercice 7

Déterminer le comportement asymptotique de la suite de terme général

$$u_n = \frac{n(-1)^n}{n^2+1}.$$

Exercice 8

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n-\sin k}{n^2+k}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 9

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $\lim u_n = +\infty$.

Réponses aux questions de cours *questions*

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et ℓ un réel. Compléter avec la définition :

   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.}$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \boxed{\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A}$.

2. On dit qu'une suite diverge lorsque
   cette suite ne converge pas. *(un point c'est tout !)*

3. Si une suite est monotone, que peut-on dire sur son comportement asymptotique *(c'est-à-dire son comportement en $+\infty$)* ?
   Cette suite admet forcément une limite en $+\infty$, finie ou infinie.
   Cette limite est finie si, et seulement si, la suite est croissante et majorée, ou décroissante et minorée ;
   sinon cette limite est $+\infty$.

4. Donner l'énoncé du critère de convergence par encadrement :
   Si
   - à partir d'un certain rang $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$,
   - $\lim v_n = \lim w_n = \ell$,

   alors
   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
   - sa limite est ℓ.

   On suppose qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie : $\forall n \geqslant 32,\ \frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{1}{n}$. Cocher chaque affirmation vraie :

   FAUX $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang ;
   FAUX $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [0\ ;\ 3]$;
   VRAI $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

5. Cocher les affirmations vraies :

   FAUX Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.

   > *La suite de terme général $u_n = 2^n + (-2)^n$ n'est pas bornée car $u_{2n} = 2 \times 4^n$ tend vers $+\infty$, mais elle ne tend pas vers $+\infty$ car $u_{2n+1} = 0$ tend vers 0.*

   VRAI Une suite convergente est bornée.
   FAUX Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

   > *La suite de terme général $u_n = \begin{cases} \ln(n) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n! & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$ tend vers $+\infty$ car les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, mais elle n'est pas monotone car les termes de rangs impairs sont beaucoup plus grands que les termes de rangs pairs.*

FAUX Une suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

La suite de terme général $u_n = \begin{cases} \frac{1}{\ln(n)} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{n!} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$ *tend vers* 0 *car les suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *tendent vers* 0*, mais elle n'est pas monotone car les termes de rangs pairs sont beaucoup plus grands que les termes de rangs impairs.*

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

- Le premier terme u_0 est dans $[-1 ; 1]$,
  et si au rang $n \in \mathbb{N}$, u_n est dans $[-1 ; 1]$, alors au rang suivant $u_{n+1} = f(u_n)$ est dans $f([-1 ; 1]) \subset [-1 ; 1]$, donc $u_{n+1} \in [-1 ; 1]$.

  On a donc prouvé par récurrence que tous les u_n sont dans $[-1 ; 1]$.
- Mais $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in [-1 ; 1]$, donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme $u_n \in [-1 ; 1]$, on peut dire que $f(u_n) \geqslant u_n$, autrement dit que $u_{n+1} \geqslant u_n$.

  Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Ainsi la suite est croissante, et majorée par 1, donc par le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite dont on peut seulement dire qu'elle est dans $[u_0 ; 1]$.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

1. *Une récurrence sur* p *termes (où* $p \in \mathbb{N}^*$*) s'utilise pour une propriété* $\mathscr{P}$ *qui nécessite d'être vraie sur* p *termes consécutifs pour que le* $(p+1)^e$ *terme en hérite.*

   Ici, on constate que chaque terme de la suite dépend des deux termes précédents, c'est pourquoi on peut légitimement penser qu'il suffit que 2 termes vérifient une propriété pour que le terme suivant la vérifie aussi.

   - Les deux premiers termes u_0 et u_1 sont bien définis, et sont strictement positifs ;
   - supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n et u_{n+1} existent et

sont strictement positifs, alors comme $u_n \neq 0$ le terme $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$ est aussi défini, et comme $u_{n+1}^2 > 0$ et $u_n > 0$, $u_{n+2} > 0$.

On a donc prouvé que par une **récurrence sur deux termes** que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définis *(et strictement positifs, mais ça ne va nous intéresser que dans la question suivante).*

2. On a vu que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs, donc la suite de terme général $v_n = \ln(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$, et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \ln(u_{n+2}) = \ln\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right) \\ &= 2\ln\left(u_{n+1}\right) - \ln(u_n) \quad \textit{(par propriété du logarithme)} \\ &= 2v_{n+1} - v_n. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 **à coefficients constants**, son équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = 0$ qui a pour unique solution 1.

Le cours nous permet d'en déduire qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\lambda n + \mu) \times 1^n$.

On sait que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, donc $v_0 = 0$ et $v_1 = \ln(2)$, ce dont on déduit que $\mu = 0$ et $\lambda = \ln(2)$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(2) \times n = \ln(2^n)$, donc en prenant l'exponentielle (qui est la bijection réciproque de ln), on conclut que $u_n = 2^n$.

3. Le calcul de u_2, u_3, u_4 nous pousse à conjecturer que u_n est égal à 2^n. Montrons ce résultat par une récurrence sur deux termes.

   - L'égalité $u_n = 2^n$ est vraie aux rangs $n \in [\![0\ ;\ 4]\!]$ (les deux premiers rangs sont suffisants pour la récurrence sur 2 termes).
   - Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$, alors au rang suivant :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = \frac{(2^{n+1})^2}{2^n} \\ &= 2^{2(n+1)-n} = 2^{n+2}. \end{aligned}$$

➟ On a donc établi grâce à une récurrence sur deux termes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \alpha n + \beta$. Elle vérifie l'égalité (E) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)(\alpha(n+1)+\beta) = (a+b-1)(\alpha n+\beta)+b+n$$
$$\Leftrightarrow n\alpha(a+b)+(a+b)(\alpha+\beta) = n(\alpha(a+b-1)+1)+\beta(a+b-1)+b$$

Pour que ces égalités soient vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit de prendre :

$$\begin{cases} \alpha(a+b) & = & \alpha(a+b-1)+1 \\ (a+b)(\alpha+\beta) & = & \beta(a+b-1)+b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(a+b-(a+b-1) & = & 1 \\ (a+b)\alpha+(a+b-(a+b-1))\beta & = & b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & 1 \\ (a+b)\alpha+\beta & = & b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & -a \end{cases}$$

Par conséquent, la suite de terme général $v_n = n-a$ vérifie l'égalité (E).

2. (a) Par définition de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = x_{n+1} - (n+1) + a$.
D'autre part $a+b$ étant non-nul, et la suite (x_n) vérifiant la relation (E), on peut affirmer que

$$x_{n+1} = \frac{a+b-1}{a+b}x_n + \frac{b}{a+b} + \frac{n}{a+b}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_{n+1} - ((n+1) - a) \\
&= \frac{a+b-1}{a+b} x_n + \frac{b}{a+b} + \frac{n}{a+b} - n - 1 + a \\
&= \frac{a+b-1}{a+b} (y_n + n - a) + \frac{b}{a+b} + \frac{n}{a+b} - n - 1 + a \\
&= \frac{a+b-1}{a+b} y_n + \frac{a+b-1}{a+b} n - \frac{a^2+ab-a}{a+b} \\
&\quad + \frac{b}{a+b} + \frac{n}{a+b} - n - 1 + a \\
&= \frac{a+b-1}{a+b} y_n + \left(\frac{a+b-1}{a+b} + \frac{1}{a+b} - 1 \right) n \\
&\quad - \frac{a^2+ab-a}{a+b} + \frac{b}{a+b} - \frac{a+b}{a+b} + \frac{a^2+ab}{a+b} \\
&= \frac{a+b-1}{a+b} y_n + \left(\frac{a+b-1+1-a-b}{a+b} \right) n \\
&\quad + \frac{-a^2 - ab + a + b - a - b + a^2 + ab}{a+b} \\
&= \frac{a+b-1}{a+b} y_n.
\end{aligned}$$

C'était pénible, mais on a bien prouvé que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{a+b-1}{a+b}$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
y_n &= \left(\frac{a+b-1}{a+b} \right)^n y_0 = \left(\frac{a+b-1}{a+b} \right)^n (x_0 - (0 - a)) \\
&= \left(\frac{a+b-1}{a+b} \right)^n (x_0 + a).
\end{aligned}$$

(b) On obtient directement pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = y_n + n - a = \left(\frac{a+b-1}{a+b} \right)^n (x_0 + a) + n - a.$$

(c) D'une part, $-1 < a+b-1 < a+b$ et $a+b > 0$, donc $-1 < \frac{a+b-1}{a+b} < 1$ et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^n (x_0+a) = 0,$$

et d'autre part, $\lim_{n\to+\infty} (n-a) = +\infty$, ce qui nous donne finalement $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$.

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

1. On montre par récurrence comme dans le premier exercice que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et strictement positif.
2. On va raisonner par l'absurde : supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
     Ainsi par prolongement des inégalités larges à la limite $\ell \geqslant u_0 > 0$, en particulier $\ell > 0$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, donc en passant à la limite, comme $\ell > 0$, on a $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, donc $\frac{1}{\ell} = 0$, puis en multipliant par ℓ que $1 = 0$, ce qui est tellement faux qu'un frisson glacé nous parcourt l'échine.

   Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger.

Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

Tout d'abord, si θ est un multiple de 2π, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1, donc elle converge vers 1.

Prenons un réel θ non multiple de 2π, et supposons que la suite de terme général $u_n = \cos(n\theta)$ converge vers un réel ℓ.

➟ Alors d'une part

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \cos(2n\theta) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell \\ \text{et } u_{2n} &= \cos(2n\theta) = 2\cos(n\theta)^2 - 1 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 2\ell^2 - 1 \end{aligned}$$

donc $\ell = 2\ell^2 - 1$, donc en particulier $\ell \neq 0$.

➟ Mais d'autre part,

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) = u_{n+1} &\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell, \\ \text{et } \cos((n-1)\theta) = u_{n-1} &\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell, \\ \text{donc } \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) &\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 2\ell. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) &= 2\cos(n\theta)\cos(\theta) \\ &= 2u_n \cos(\theta) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 2\ell\cos(\theta) \end{aligned}$$

donc, par unicité de la limite $2\ell\cos(\theta) = 2\ell$, et comme on a vu que $\ell \neq 0$, on en déduit que $\cos(\theta) = 1$, ce qui contredit que θ est un réel non multiple de 2π.

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

Si une suite est monotone, alors elle a forcément une limite, finie ou infinie, que l'on note L.

Donc toutes ses suites extraites ont aussi pour limite L, en particulier $u_{2n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{L}$.

Or on sait que $u_{2n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 2$, donc par unicité de la limite, $\mathrm{L} = 2$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{n(-1)^n}{n^2+1}\right| \leqslant \frac{n}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n},$$

or $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, donc par encadrement $\frac{n(-1)^n}{n^2+1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in [\![1 \,;\, 2n]\!]$,

$$-1 \leqslant \sin(k) \leqslant 1, \text{ donc } n-1 \leqslant n-\sin(k) \leqslant n+1,$$

$$\text{d'où } \frac{n-1}{n^2+k} \leqslant \frac{n-\sin(k)}{n^2+k} \leqslant \frac{n+1}{n^2+k},$$

et enfin, comme $1 \leqslant k \leqslant 2n$,

$$\frac{n-1}{n^2+2n} \leqslant \frac{n-1}{n^2+k} \leqslant \frac{n-\sin(k)}{n^2+k} \leqslant \frac{n+1}{n^2+k} \leqslant \frac{n+1}{n^2+1}.$$

En additionnant pour k de 1 à $2n$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \frac{n-1}{n^2+2n} = 2n \times \frac{n-1}{n^2+2n} \leqslant u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n-\sin(k)}{n^2+k} \\ \leqslant \sum_{k=1}^{2n} \frac{n+1}{n^2+1} = 2n \times \frac{n+1}{n^2+2n}.\end{aligned}$$

Or

$$2n \times \frac{n-1}{n^2+2n} = 2 \times \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 2,$$

et de même $2n \times \frac{n+1}{n^2+2n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 2$, donc par encadrement

$$u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 2.$$

Une correction de l'exercice 9 *énoncé*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n} \quad \left(\textit{$\tfrac{1}{2n}$ est le plus petit terme de la somme}\right)$$
$$= n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment croissante, donc par le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$.
   Mais si elle converge, vers la limite ℓ, alors u_{2n} tend aussi vers ℓ, d'où $u_{2n} - u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell - \ell = 0$.
   Donc par prolongement à la limite de l'inégalité large $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$ (qui est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$!), on obtient $0 \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est faux.
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, et par conséquent elle tend vers $+\infty$.