Questions de cours 1 — *Réponses*

Q1. Donner la définition de la continuité d'une fonction f en un réel a :

Q2. Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, donner un équivalent en a :

Q3. Soient f et g deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a, compléter avec une propriété simple :

$f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$ si, et seulement si, $\boxed{}$

$f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ si, et seulement si, $\boxed{}$

$f \underset{a}{\sim} g$ si, et seulement si, $\boxed{}$

Compléter : $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + \boxed{}$.

Q4. Compléter avec les équivalents usuels (α est un réel non nul) :

$1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \boxed{}$, $\sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} \boxed{}$, $\tan(\theta) \underset{\theta \to 0}{\sim} \boxed{}$,

$\mathrm{e}^{\square} - 1 \underset{\square \to 0}{\sim} \boxed{}$, $\ln(1+\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\sim} \boxed{}$, $(1+q)^{\alpha} - 1 \underset{q \to 0}{\sim} \boxed{}$.

Q5. Cocher les affirmations vraies :

☐ $1-3x+5x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3$,

☐ $\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1+3t$,

☐ $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t-t^2/2$,

☐ $\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} x-1$

☐ $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$,

☐ $\dfrac{e^x}{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$.

Q6. Compléter avec l'expression la plus simple possible :

$$-x^3\ln(x)-3e^{2x}+8x^5+e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{}$$

$$-x^3\ln(x)-3e^{2x}+8x^5+e^{-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{}$$

$$x^2-4 \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{},$$

$$x^2-4 \underset{x\to 2}{\sim} \boxed{}$$

$$x^2-4 \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{}$$

Exercice 1

Soient p et n deux entiers naturels, et a un réel non nul, déterminer un équivalent quand x tend vers a de $\dfrac{x^n - a^n}{x^p - a^p}$.

Exercice 2

Donner la limite ℓ de $u_n = \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{3n}$ quand n tend vers $+\infty$, puis un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 3

Donner un équivalent de $\ln(\cos(x))$ quand x tend vers 0.

Exercice 4

Étudier la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\exp(x^2)}$.

Exercice 5

Étudier la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{\ln(1+x^2) - \sqrt{1-2x} + 1}{\sin^2 x}$.

Exercice 6

Étudier la limite quand x tend vers 0 de $x \mapsto \dfrac{2x^2}{1 - \sqrt[4]{x^4 + x^3 + 1}}$.

Exercice 7

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0, vérifiant $f(2x)+f(x)=0$ pour tout réel x.

1. Calculer $f(0)$.
2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$f\left(\frac{x}{2^n}\right)=(-1)^n f(x).$$
3. En déduire que f est la fonction nulle.

Exercice 8

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que pour tout couple (x,y) de réels, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

1. Montrer que :
   (a) pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=nf(1)$;
   (b) pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f(n)=nf(1)$;
   (c) pour tout $q\in\mathbb{Q}$, $f(q)=qf(1)$.
2. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=xf(1)$
   (on pourra utiliser ici la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et approcher x par une suite de rationnels).

Exercice 9

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0, vérifiant $f(1)=a>0$ et l'équation fonctionnelle $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)f(y)$.

1. Montrer que $f(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(0)=1$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que $f(r)=a^r$ pour tout $r\in\mathbb{N}$, puis pour tout $r\in\mathbb{Q}$.
   (b) Conclure que $f(x)=a^x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Réponses aux questions de cours *questions*

1. Donner la définition de la continuité de f en un réel a :

$$\boxed{f \text{ est continue en } a \text{ lorsque } \lim_{x\to a} f(x) = f(a).}$$

2. Si f est dérivable en a avec $f'(a)\neq 0$, donner un équivalent vérifié par f en a : $\boxed{f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)}$.

3. Soient f et g deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a, compléter avec une propriété simple :

$$f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g) \text{ si, et seulement si, } \boxed{\frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a.}$$

$$f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g) \text{ si, et seulement si, } \boxed{\frac{f}{g} \text{ tend vers } 0 \text{ en } a.}$$

$$f \underset{a}{\sim} g \text{ si, et seulement si, } \boxed{\frac{f}{g} \text{ tend vers } 1 \text{ en } a.}$$

Compléter : $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + \boxed{\mathrm{o}(g)}$.

4. Compléter avec les équivalents usuels (α est un réel non nul) :

$$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\tfrac{1}{2}x^2},\quad \sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} \boxed{u},\quad \tan(\theta) \underset{\theta\to 0}{\sim} \boxed{\theta},$$

$$e^{\square}-1 \underset{\square\to 0}{\sim} \boxed{\square},\quad \ln(1+\lambda) \underset{\lambda\to 0}{\sim} \boxed{\lambda},\quad (1+q)^{\alpha}-1 \underset{q\to 0}{\sim} \boxed{\alpha\times q}.$$

5. Cocher les affirmations vraies :

- ☑ $1-3x+5x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3$, *(car les deux expressions sont équivalentes à 1),*
- ☑ $\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1+3t$, *(car $\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1 \underset{t\to 0}{\sim} 1+3t$),*
- ☑ $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t-t^2/2$, *(car $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t \underset{t\to 0}{\sim} t-t^2/2$),*
- ☐ $\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} x-1$, *(l'un tend vers $-\infty$, l'autre vers -1...),*
- ☐ $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, *(le rapport des deux donne (x) qui ne tend pas vers 1 en $+\infty$),*
- ☐ $\dfrac{e^x}{x^2+1} \underset{x\to +\infty}{\sim} e^x$, *(le rapport des deux donne $\frac{1}{x^2+1}$ qui ne tend pas vers 1 en $+\infty$).*

6. Compléter avec l'expression la plus simple possible :

On rappelle qu'une somme de termes est équivalente à son terme dominant. Et quand on dit « dominant », on peut le comprendre concrètement en comparant les ordres de grandeur en valeur absolue !
et qu'il faut aller jusqu'à l'équivalent le plus simple possible : on ne laisse pas $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1+12x-7x^2$ (car $1+12x-7x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 1$) de la même manière qu'on ne laisse $x=\frac{8}{4}$ à la fin d'un calcul.

$$-x^3\ln(x)-3\mathrm{e}^{2x}+8x^5+\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{-3\mathrm{e}^{2x}}$$

$$-x^3\ln(x)-3\mathrm{e}^{2x}+8x^5+\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{-x^3\ln(x)}$$

$$x^2-4 \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{-4},$$

$$x^2-4=(x+2)(x-2) \underset{x\to 2}{\sim} \boxed{4(x-2)},$$

$$x^2-4 \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{x^2}.$$

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

Première méthode. En utilisant la dérivation des fonctions $f : \square \mapsto \square^n$ et $g : \square \mapsto \square^p$,

$$\frac{x^n-a^n}{x^p-a^p} = \frac{x^n-a^n}{x-a} \times \frac{1}{\frac{x^p-a^p}{x-a}} \xrightarrow[x\longrightarrow a]{} \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{na^{n-1}}{pa^{p-1}} = \frac{n}{p}a^{n-p}.$$

ou encore

$$\frac{x^n-a^n}{x^p-a^p} \underset{x\to a}{\sim} \frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \frac{na^{n-1}}{pa^{p-1}} = \frac{n}{p}a^{n-p}.$$

Deuxième méthode. Avec des méthodes algébriques, notamment la formule de Bernoulli

$$\frac{x^n-a^n}{x^p-a^p}=\frac{(x-a)\sum_{k=0}^{n-1}a^kx^{n-1-k}}{(x-a)\sum_{k=0}^{p-1}a^kx^{p-1-k}}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a^kx^{n-1-k}}{\sum_{k=0}^{p-1}a^kx^{p-1-k}}$$

$$\xrightarrow[x\longrightarrow a]{}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a^ka^{n-1-k}}{\sum_{k=0}^{p-1}a^ka^{p-1-k}}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1}}{\sum_{k=0}^{p-1}a^{p-1}}=\frac{na^{n-1}}{pa^{p-1}}=\frac{n}{p}a^{n-p}.$$

Troisième méthode : on peut se ramener en 0 pour utiliser les formules connues.

On pose $t=x-a$, ou $x=a+t$, ainsi $x\to a\iff t\to 0$, et

$$\begin{aligned}\frac{x^n-a^n}{x^p-a^p}&=\frac{(a+t)^n-a^n}{(a+t)^p-a^p}\\&=\frac{a^n\left(\left(1+\frac{t}{a}\right)^n-1\right)}{a^p\left(\left(1+\frac{t}{a}\right)^p-1\right)}\underset{t\to0}{\sim}\frac{a^n\,n\times\frac{t}{a}}{a^p\,p\times\frac{t}{a}}\quad\textit{(car }(1+\square)^\alpha-1\underset{\square\to0}{\sim}\alpha\times\square\textit{)}\\&=\frac{n}{p}a^{n-p}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{3n}&=\mathrm{e}^{3n\ln\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}\\&\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{e}^{3n\times\left(-\frac{2}{n^2}+o\left(-\frac{2}{n^2}\right)\right)}\\&\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{e}^{-\frac{6}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\\&\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}1,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{3n}-1 &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-\frac{6}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}-1\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{6}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \left(\text{car } -\tfrac{6}{n}+\mathrm{o}\left(\tfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{6}{n}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x)) &\underset{x\to0}{=} \ln\left(1-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\\ &\underset{x\to0}{=} \ln\left(1+\left[-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right]\right)\\ &\underset{x\to0}{=} \left[-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right]+\mathrm{o}\left(\left[-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right]\right)\\ &\qquad \left(\text{car } -\tfrac{1}{2}x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right) \underset{x\to0}{\sim} -\tfrac{1}{2}x^2 \xrightarrow[x\to0]{} 0\right)\\ &\underset{x\to0}{=} \left[-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right]+\mathrm{o}\left(x^2\right)\\ &\underset{x\to0}{=} -\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 9 *énoncé*

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)^2\geqslant 0.$$

S'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)=0$, alors

$$f(1)=f(x_0+1-x_0)=f(x_0)\times f(1-x_0)=0,$$

ce qui contredit l'énoncé.
Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$.

2. Par l'équation fonctionnelle $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$, donc $f(0)(1-f(0)) = 0$, or on a vu que $f(0) \neq 0$, donc $f(0) = 1$.
   Soit $a \in \mathbb{R}$, alors pour tout réel x

$$\begin{aligned} f(x) = f(a+x-a) = f(a)f(x-a) &\xrightarrow[x \longrightarrow a]{} f(a)f(0) \text{ (car } f \text{ est continue en } 0) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

   Donc f est continue en tout $a \in \mathbb{R}$, autrement dit continue sur $\mathbb{R}$.
3. (a) ➟ $f(1) = a$, et si pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a^n$, alors

$$f(n+1) = f(n)f(1) = a^n a = a^{n+1}.$$

   On montre de la même manière que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx) = f(x)^n.$$

   ➟ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 = f(0) = f(n+(-n)) = f(n) \times f(-n) = a^n \times f(-n),$$

   donc $f(-n) = a^{-n}$.
   ➟ Soit $r \in \mathbb{Q}$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$, et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$, donc

$$\begin{aligned} (a^r)^q &= a^p = f(p) \\ &= f(q \times r) = (f(r))^q, \end{aligned}$$

   donc la fonction $\square \mapsto \square^q$ étant bijective sur $]0\,;+\infty[$, on conclut que $f(r) = a^r$.
   (b) Les fonctions f et $\square \mapsto a^\square$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et coïncident sur $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$, donc elles sont égales sur $\mathbb{R}$, C.Q.F.D.