

Questions de cours 1

Réponses

Dans toutes les questions, on note E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux parties de E , et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

Compléter :

Q1. F est un sous-espace vectoriel de E lorsque

Q2. $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \iff$

→

,

→

Q3. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E si, et seulement si,

Q4. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si,

Q5. ➡ Donner la définition d'une base de E :

Donner une base du sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a + b - c & -a - 2b + c \\ b + 2c & 2a - 3c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} :$$

Q6. Compléter avec la définition :

$$E = F \oplus G \iff$$

Q7. Si on connaît une base de F ainsi qu'une base de G , comment montrer simplement que $F \oplus G = E$?

 ;

Q8. Justifier (le plus simplement possible) que $\text{Vect}(-X^2, 2)$ et $\text{Vect}(-3X^3, X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$:

Exercice 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_k : x \mapsto \cos(kx)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera une base ainsi que la dimension.

Exercice 3

Soient $a \in \mathbb{R}$, $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, et $u_3 = (a, 1, 1)$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq 1$.
2. On suppose ici que $a = 1$ et on note $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
 - (a) Donner une base de F .
 - (b) Soit $v = (0, 1, 1)$. Montrer que $\text{Vect}(v)$ et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, puis donner le projeté du vecteur (x, y, z) sur F parallèlement à $\text{Vect}(v)$.

Exercice 4

Pour quelles valeurs des réels a et b la famille ci-contre est-elle libre ?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ b & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 5

On considère la matrice unité I_2 et les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Donner la base canonique et la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Montrer que (I_2, J, K, L) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Quelles sont les coordonnées de A dans cette base ?
- Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $JMJ = M$, et $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $JMJ = -M$.
 - Prouver que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner une base pour chacun des deux.
 - Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Donner les projetés de A sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ et sur $\mathcal{G}$ parallèlement à $\mathcal{F}$.

Réponses aux questions de cours

questions

1. F est un sous-espace vectoriel de E lorsque F est un sous-espace vectoriel de E lorsque

- ⇒ F est non vide (il doit contenir en particulier le vecteur nul 0_E);
- ⇒ F est stable par combinaisons linéaires, autrement dit

$$\forall (x, y) \in F^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

2. $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \iff$

$F \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$,
c'est-à-dire

$$\forall x \in F, \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k,$$

$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset F$.

(ce point est
trop souvent
oublié!)

3. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E si, et seulement si,

$$E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{c'est une double inclusion!}).$$

4. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si,

La **seule** combinaison linéaire **nulle** de ces vecteurs s'obtient uniquement avec des coefficients nuls :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

5. ⇒ Donner la définition d'une base de E :

Une famille de vecteurs est une base de E si, et seulement si, c'est une famille libre et génératrice de E .

- ⇒ Donner une base du sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a + b - c & -a - 2b + c \\ b + 2c & 2a - 3c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} :$$

$$F = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

et après avoir montré que ces trois matrices forment une famille libre, on peut conclure que

une base de F est la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

6. Compléter avec la définition :

$$E = F \oplus G \iff$$

(sachant que F et G sont des s.e.v. de E)

Pour tout vecteur x de E , **il existe** un couple (x_F, x_G) dans $F \times G$ **unique** tel que $x = x_F + x_G$.

7. Si on connaît une base de F ainsi qu'une base de G , comment montrer simplement que $F \oplus G = E$?

il suffit de montrer qu'une concaténation de ces deux bases donne une base de E .

8. Justifier (le plus simplement possible) que $\text{Vect}(-X^2, 2)$ et $\text{Vect}(-3X^3, X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$:

Les familles $(-X^2, 2)$ et $(-3X^3, X)$ sont respectivement des bases de $\text{Vect}(-X^2, 2)$ et $\text{Vect}(-3X^3, X)$, et leur concaténation donne une base de $\mathbb{R}_3[X]$, donc ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Une correction de l'exercice 1

énoncé

Première méthode

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la forme propositionnelle
la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.

1. Au rang $n = 0$, la fonction f_0 n'est pas la fonction nulle, donc la famille $[f_0]$ est une famille libre, et $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie, c'est-à-dire que la famille $(f_0, \dots, f_{n+1})$ est libre.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$, $n+2$ réels qui vérifient

$$\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = \theta \quad (\text{où } \theta \text{ est la fonction nulle})$$

autrement dit

$$(E) : \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k f_k = \theta$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \cos(kx) = 0.$$

Si on dérive deux fois cette égalité, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n+1} (-k^2) \lambda_k \cos(kx) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-k^2) \lambda_k f_k = -\lambda_1 f_1 \dots - n^2 \lambda_n f_n - (n+1)^2 \lambda_{n+1} f_{n+1} = \theta.$$

Par conséquent, on va multiplier la première égalité (E) par $(n+1)^2$ et lui ajouter l'égalité que l'on vient d'obtenir pour éliminer le terme en f_{n+1} :

$$\begin{aligned} (n+1)^2 \times \left(\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k f_k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-k^2) \lambda_k f_k \right) &= -(n+1)^2 \theta + \theta \\ \iff \sum_{k=0}^n ((n+1)^2 - k^2) \lambda_k f_k &= \theta. \end{aligned}$$

On a obtenu une combinaison linéaire nulle des fonctions $f_0, \dots, f_n$. Or par hypothèse de récurrence, ces fonctions forment une famille libre, donc les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls. Autrement dit, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $((n+1)^2 - k^2) \lambda_k = 0$, et comme $n+1 \neq k$, $\lambda_k = 0$.

Ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, et il ne reste plus dans l'égalité de départ que $\lambda_{n+1}f_{n+1} = \theta$, qui donne $\lambda_{n+1} = 0$ car f_{n+1} n'est pas la fonction nulle.

On a donc établi $\mathcal{P}_{n+1}$, ce qui achève l'exercice.

Deuxième méthode

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, $n+1$ réels qui vérifient

$$\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = \theta \quad (\text{où } \theta \text{ est la fonction nulle})$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k \cos(kx) = 0.$$

Donc avec la formule d'Euler

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = 0,$$

c'est-à-dire, en multipliant par 2 et en séparant les deux sommes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{ikx} + \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{-ikx} = 0,$$

d'où en multipliant par e^{inx} ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{i(n+k)x} + \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{i(n-k)x} = 0,$$

puis en posant $k' = n+k$ dans la première somme, et $k' = n-k$ dans la seconde,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=n}^{2n} \lambda_{k-n} e^{ikx} + \sum_{k=0}^n \lambda_{n-k} e^{ikx} = 0$$

ce qui revient à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(e^{ix}) = 0,$$

où P est le polynôme

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n-k} X^k + 2\lambda_0 X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_{k-n} X^k \\ &= \lambda_n + \lambda_{n-1} X + \dots + \lambda_1 X^{n-1} + 2\lambda_0 X^n \\ &\quad + \lambda_1 X^{n+1} + \dots + \lambda_{n-1} X^{2n-1} + \lambda_n X^{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme P ci-dessus admet pour racines tous les e^{ix} pour $x \in \mathbb{R}$, autrement dit tous les nombres complexes du cercle unité, ce qui fait en bref une infinité de racines.

Par conséquent, P est le polynôme nul, donc ses coefficients sont nuls, et par conséquent les λ_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ sont tous nuls, ce qui achève de prouver que la famille $[f_0, f_1, \dots, f_n]$ est libre.

Une correction de l'exercice 2

énoncé

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Alors

$$AM = \begin{pmatrix} a-d+g & b-e+h & c-f+i \\ d-g & e-h & f-i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

et

$$MA = \begin{pmatrix} a & -a+b & a-b+c \\ d & -d+e & d-e+f \\ g & -g+h & g-h+i \end{pmatrix}$$

donc

$$M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AM = MA$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-d+g & b-e+h & c-f+i \\ d-g & e-h & f-i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & -a+b & a-b+c \\ d & -d+e & d-e+f \\ g & -g+h & g-h+i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \dots (\text{calculs}) \dots \Leftrightarrow \begin{cases} d=g=h=0 \\ a=e=i \\ b=f \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi en notant $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(I_3, J, K),$$

autrement dit

$$\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_3, J, K).$$

On en déduit que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont (I_3, J, K) est une famille génératrice. Cette famille est aussi une base car on montre sans difficulté qu'elle est libre.

On en déduit que $\dim(\mathcal{C}(A)) = 3$.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $v = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. En travail préliminaire qui va m'éviter de refaire plusieurs fois presque la même chose, je vais appliquer le pivot de Gauss à la matrice $\underset{\mathcal{C}}{\text{Mat}}(u_1, u_2, u_3, v)$ comme ci-dessous :

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & x \\ -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & x \\ 0 & 2 & a+1 & x+y \\ 0 & 0 & 1-a & z-x \end{array} \right)$$

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc la famille (u_1, u_2, u_3) , qui est formée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice des coordonnées $\underset{\mathcal{C}}{\text{Mat}}(u_1, u_2, u_3)$ est de rang 3.

Or d'après le préliminaire,

$$\underset{\mathcal{C}}{\text{Mat}}(u_1, u_2, u_3) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a+1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{array} \right),$$

est de rang 3 si et seulement si $1-a \neq 0$.

Par conséquent $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ si et seulement si } a \neq 1}$.

2. (a) On est dans le cas où $a = 1$, donc $u_2 = u_3$, et $\dim(F) = \text{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$.

Notons $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On utilise la propriété suivante

$$u \in F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \Leftrightarrow \text{rg}(u_1, u_2, u_3, u) = \text{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$$

Or d'après le préliminaire

$$\text{rg}(u_1, u_2, u) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{array} \right)$$

Donc $\boxed{u \in F} \Leftrightarrow z - x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = z}$.

- (b) On a vu que $\dim(F) = 2$. Ainsi comme (u_1, u_2) est une famille libre de deux vecteurs de F , c'est une base de F .

(c) **Première méthode :**

- $v \notin F$ car ses coordonnées ne vérifient pas $x = z$.

Soit $u \in \text{Vect}(v) \cap F$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda.v$. Mais si $\lambda \neq 0$, alors $v = \frac{1}{\lambda}.u$ doit aussi appartenir à $\text{Vect}(v) \cap F$ (qui est un sous-espace vectoriel en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels) donc v doit appartenir à F , ce qui est faux.

On en déduit que $\text{Vect}(v) \cap F = \{\vec{0}\}$.

- On sait que $\dim(F) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)) = \text{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$. Puis comme $\dim(\text{Vect}(v)) = 1$, on a $\dim(\text{Vect}(v)) + \dim(F) = \dim(\mathbb{R}^3)$.
- On peut conclure que : $\boxed{\text{Vect}(v) \oplus F = \mathbb{R}^3}$.

Deuxième méthode : d'après le préliminaire

$$\underset{\mathcal{C}}{\text{Mat}}(u_1, u_2, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc est de rang 3, d'où (u_1, u_2, v) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a formé une base de $\mathbb{R}^3$ en réunissant (u_1, u_2) qui est une base de F , et (v) qui est une base de $\text{Vect}(v)$, donc

$$\boxed{\text{Vect}(v) \oplus F = \mathbb{R}^3}.$$

Recherche des projetés : cherchons les coordonnées (a, b, c) du vecteur $w = (x, y, z)$ dans la base (u_1, u_2, v) en résolvant le système de matrice $\underset{\mathcal{C}}{\text{Mat}}(u_1, u_2, v)$ et de second membre $\underset{\mathcal{C}}{\text{Mat}}(w)$, qui est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

équivalent grâce au préliminaire à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ z - x \end{pmatrix}$$

qui donne enfin avec $L_2 \leftarrow 1/2(L_2 - L_3), L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{cases} a &= -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ b &= x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ c &= z - x \end{cases}$$

Ainsi

$$w = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) \cdot u_1 + \left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right) \cdot u_2}_{\in F} + \underbrace{(z - x) \cdot v}_{\in \text{Vect}(v)}$$

(on vérifie vite fait sur son brouillon que la somme donne bien le triplé (x, y, z))

ce qui prouve que le projeté de $w = (x, y, z)$ sur F parallèlement à $\text{Vect}(v)$ est le vecteur $\left(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) \cdot u_1 + \left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right) \cdot u_2$, qui donne le triplé $(x, x + y - z, x)$.

Une correction de l'exercice 4

énoncé

Notons respectivement A, B, C, D ces quatre matrices.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre réels qui vérifient l'égalité (E) : $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = O_2$.

Alors

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 2\gamma + \delta & 2\alpha + 2\gamma + 4\delta \\ -\alpha + \beta + b\delta & \alpha + 3\beta + a\gamma - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & +\beta & +2\gamma & +\delta & = 0 \\ 2\alpha & & +2\gamma & +4\delta & = 0 \\ -\alpha & +\beta & & +b\delta & = 0 \\ \alpha & +3\beta & +a\gamma & -\delta & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & +\beta & +2\gamma & +\delta & = 0 \\ & -2\beta & +2\gamma & +2\delta & = 0 \\ & & & (b+3)\delta & = 0 \\ & & (a-4)\gamma & & = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{(après quelques opérations} \\ \text{élémentaires sur les lignes).} \end{matrix}$$

Par conséquent,

- ➡ si $a \neq 4$ et $b \neq -3$, alors le système se résout en $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, donc la famille (A, B, C, D) est libre ;
- ➡ si $a = 4$ ou $b = -3$ ce système a des solutions non nulles, par exemple $\alpha = -5, \beta = 2, \delta = \gamma = 1$, donc dans ce cas $-5A + 2B + C + D = 0_2$, ce qui prouve que la famille (A, B, C, D) est liée.

Une correction de l'exercice 5

énoncé

1. La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathcal{C} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est par conséquent de dimension 4.

2. (a)

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}([I, J, K, L]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1, \\ L_3 \leftrightarrow L_4}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $\text{rg}(I, J, K, L) = 4$, et

la famille (I, J, K, L) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- (b) Les réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les coordonnées de A dans la base (I, J, K, L) si, et seulement si, $A = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$, qui équivaut à ce que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est solution du système de matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}([I, J, K, L])$ et de second membre $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

que l'on résout par le pivot de Gauss (je vous laisse les détails) en

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 3 \\ \delta = -3 \end{cases}$$

autrement dit $A = -2J + 3K - 3L$.

3. (a)– Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $JMJ = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ donc

$$M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow JMJ = M \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(I, J)$$

Donc $\mathcal{F} = \text{Vect}(I, J)$, ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (I, J) est une famille génératrice de $\mathcal{F}$. Comme I et J ne sont pas colinéaires, on peut conclure que $[I, J]$ est une base de $\mathcal{F}$.

– On prouve de la même manière que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $[K, L]$ est une base de $\mathcal{G}$.

(b) Des questions précédentes, on récolte que

$$\begin{cases} [I, J] \text{ est une base de } \mathcal{F}, \\ [K, L] \text{ est une base de } \mathcal{G}, \\ [I, J, K, L] \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

donc $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) On a vu que $A = -2J + 3K - 3L$, or $\begin{cases} -2J \in \mathcal{F} \\ 3K - 3L \in \mathcal{G} \end{cases}$ donc

→ le projeté de A sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ est $-2J$;

→ le projeté de A sur $\mathcal{G}$ parallèlement à $\mathcal{F}$ est $3K - 3L$.