Il y a aussi des questions au verso !

Questions de cours 1 — *Réponses*

Dans toutes les questions, on note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux parties de E, et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Compléter :

Q1. F est un sous-espace vectoriel de E lorsque

$\boxed{}$.

Q2. La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est génératrice de F si, et seulement si,

$\boxed{}$;

On note alors $F = \boxed{}$.

La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si, et seulement si,

$\boxed{}$.

Cocher la fin de phrase correcte :

si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre, la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ est certainement

- ☐ le vecteur nul.
- ☐ un vecteur non nul.

(mis à jour le 11 avril 2025)

Q3. Donner la définition d'une base de E :

$\boxed{}$;

Donner une base de $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-c & -a-2b+c \\ b+2c & 2a-3c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$:

$\boxed{}$.

Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel :

$\boxed{}$;

si on sait que $\dim(E) = n$, à quelle condition suffisante la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est-elle une base de E ?

$\boxed{}$.

Dans un espace vectoriel de dimension finie quelconque, quel est l'intérêt de choisir une base ?

$\boxed{}$

$\dim(\mathbb{K}^n) = \boxed{}$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \boxed{}$, $\dim\big(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\big) = \boxed{}$.

Q4. $\mathrm{rg}((1,1),(-1,-1),(2,2)) = \boxed{}$,

$\mathrm{rg}\left(X+1, -2X+2, X-2, 2X-2, X+2\right) = \boxed{}$,

Q5. ➟ Compléter avec la définition : on dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E lorsque

$\boxed{}$.

➟ Compléter avec une caractérisation en dimension finie :

$$E = F \oplus G \iff \boxed{}.$$

➟ Compléter avec une caractérisation utilisant des bases :

$$E = F \oplus G \iff \boxed{}.$$

➟ Justifier *(le plus simplement possible)* que $\mathrm{Vect}\left(X^2, 1\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(X^3, X\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$:

$\boxed{}$.

Exercice 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_k : x \mapsto \cos(kx)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera une base ainsi que la dimension.

Exercice 3

Soient $a \in \mathbb{R}$, $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,1,1)$, et $u_3 = (a,1,1)$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq 1$.
2. On suppose ici que $a = 1$ et on note $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Donner une base de F.
   (b) Soit $v = (0,1,1)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(v)$ et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, puis décomposer le vecteur (x, y, z) sur $F + \mathrm{Vect}(v)$.

Exercice 4

Étudier selon les valeurs des réels a et b le rang de la famille ci-contre : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ b & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 5

On pose $P_1 = 1 + 3X - X^3$, $P_2 = 1 + 2X + X^2 + X^3$, et $P_3 = 1 + 4X - X^2 - 3X^3$.

1. Déterminer le rang de la famille $[P_1, P_2, P_3]$.
2. Donner un sous-espace vectoriel supplémentaire G de $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Donner alors le projeté de $P = -2 + X^2 - X^3$ sur F parallèlement à G, puis le symétrique de P par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 6 – (*)

On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $]0\,;+\infty[$.
On considère l'ensemble

$$\mathscr{E} = \{f \in \mathscr{D} \mid \forall x > 0,\ \ x^2 f''(x) + 4x f'(x) + 2f(x) = 0\}\cdot$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ est un sous-espace-vectoriel de $\mathscr{D}$.
2. Montrer que $\varphi_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\varphi_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ forment une famille libre.
3. (a) Soit $f \in \mathscr{E}$, vérifier que $x \mapsto x^2 f(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. *(On pourra dériver deux fois la fonction)*
   (b) En déduire que φ_1 et φ_2 forment une famille génératrice de $\mathscr{E}$.
4. Conclure que (φ_1, φ_2) est une base de $\mathscr{E}$ et donner les coordonnées d'une fonction f de $\mathscr{E}$ dans cette base en fonction de $f(1)$ et de $f'(1)$.

Exercice 7

On considère la matrice unité I_2 et les matrices suivantes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \ \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la base canonique et la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Montrer que $(\mathrm{I}_2, \mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Quelles sont les coordonnées de A dans cette base ?
3. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $\mathrm{JMJ} = \mathrm{M}$, et $\mathscr{G}$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $\mathrm{JMJ} = -\mathrm{M}$.
   (a) Prouver que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et donner une base pour chacun des deux.
   (b) Montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Donner les projetés de A sur $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathscr{G}$ et sur $\mathscr{G}$ parallèlement à $\mathscr{F}$.

Exercice 8 – (*)

1. Montrer que $\mathrm{F} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = u_{2n}\}$
   et $\mathrm{G} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = 0\}$
   sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
2. Préciser pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le projeté de u sur F parallèlement à G, ainsi que son symétrique parallèlement à F par rapport à G.

Réponses aux questions de cours *questions*

1. F est un sous-espace vectoriel de E lorsque F est un sous-espace vectoriel de E lorsque

   - F est non vide (il doit contenir en particulier le vecteur nul 0_E) ;
   - F est stable par combinaisons linéaires, autrement dit

   $$\forall (x, y) \in F^2, \ \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \ \ \lambda x + \mu y \in F.$$

2. La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est génératrice de F si, et seulement si,

   - $F \subset \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, c'est-à-dire $\forall x \in F, \ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$,
   - $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \subset F$. *(ce point est trop souvent oublié !)*

   On note alors $\boxed{F = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)}$ *(c'est une double inclusion !).*

   La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si, et seulement si,

   La **seule** combinaison linéaire **nulle** de ces vecteurs s'obtient uniquement avec des coefficients nuls,

   autrement dit

   $$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

   Cocher la fin de phrase correcte :

   si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre, la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ est certainement

   - ☐ le vecteur nul.
   - ☑ un vecteur non nul.

3. - Donner la définition d'une base de E :

   Une famille de vecteurs est une base de E si, et seulement si, c'est une famille libre et génératrice de E.

   - Donner une base du sous-espace vectoriel

   $$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-c & -a-2b+c \\ b+2c & 2a-3c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} :$$

$$\begin{aligned}F &= \left\{ a\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & -3\end{pmatrix} \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & -3\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

et après avoir montré que ces trois matrices forment une famille libre, on peut conclure que

> une base de F est la famille
> $$\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & -3\end{pmatrix}\right)$$

➟ Si on sait que $\dim(E) = n$, à quelle condition suffisante la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est-elle une base de E ?

> *(Sachant que cette famille est formée de vecteurs de* E *et qu'elle est de cardinal n)*
> il suffit que ce soit une famille libre pour être une base de E.

Dans un espace vectoriel de dimension finie quelconque, quel est l'intérêt de choisir une base ?

> Si un ensemble *(quels que soient ses élements : polynômes, n-uplets, fonctions, suites, matrices, etc)* a une structure d'espace vectoriel, choisir une base permet de manipuler tout vecteur sous forme de colonne de nombres (ses coordonnées).
> Exactement comme en physique quand on choisit un repère.

➟ $\dim(\mathbb{K}^n) = \boxed{n}$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \boxed{n+1}$, $\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = \boxed{n\times p}$.

4. $\mathrm{rg}((1,1),(-1,-1),(2,2)) = \boxed{1}$,

   $\mathrm{rg}\left(X+1, -2X+2, X-2, 2X-2, X+2\right) = \boxed{2}$,

5. ➟ Compléter avec la définition :

$E = F \oplus G \iff$

> *(sachant que* F *et* G *sont des s.e.v. de* E*)*
> Pour tout vecteur x de E, **il existe** un couple (x_F, x_G) dans $F \times G$ **unique** tel que $x = x_F + x_G$.

➟ Compléter avec une caractérisation en dimension finie :

$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff$ F et G sont en somme directe (ce qui équivaut à $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$),
$\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{E})$.

➟ Compléter avec une caractérisation utilisant des bases :

$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff$ la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de E.

➟ Justifier *(le plus simplement possible)* que $\mathrm{Vect}\left(-\mathrm{X}^2, 2\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(-3\mathrm{X}^3, \mathrm{X}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$:

Les familles $(-\mathrm{X}^2, 2)$ et $(-3\mathrm{X}^3, \mathrm{X})$ sont respectivement des bases de $\mathrm{Vect}\left(-\mathrm{X}^2, 2\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(-3\mathrm{X}^3, \mathrm{X}\right)$, et leur concaténation donne une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, donc ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

Première méthode

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ la forme propositionnelle

la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.

1. Au rang $n = 0$, la fonction f_0 n'est pas la fonction nulle, donc la famille $[f_0]$ est une famille libre, et $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie, et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est aussi vraie, c'est-à-dire que la famille $\left(f_0, \dots, f_{n+1}\right)$ est libre.
   Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$, $n+2$ réels qui vérifient
   $$\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = \theta \quad \text{(où } \theta \text{ est la fonction nulle)}$$
   autrement dit
   $$(\mathrm{E}) \quad : \quad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k f_k = \theta$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \cos(k\,x) = 0.$$

Si on dérive deux fois cette égalité, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n+1} (-k^2)\lambda_k \cos(k\,x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-k^2)\lambda_k f_k = -\lambda_1 f_1 \cdots - n^2\lambda_n f_n - (n+1)^2\lambda_{n+1} f_{n+1} = \theta.$$

Par conséquent, on va multiplier la première égalité (E) par $(n+1)^2$ et lui ajouter l'égalité que l'on vient d'obtenir pour éliminer le terme en f_{n+1} :

$$(n+1)^2 \times \left(\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k f_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-k^2)\lambda_k k f_k\right) = -(n+1)^2\theta + \theta$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n} ((n+1)^2 - k^2)\lambda_k f_k = \theta.$$

On a obtenu une combinaison linéaire nulle des fonctions $f_0, \ldots, f_n$. Or par hypothèse de récurrence, ces fonctions forment une famille libre, donc les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls. Autrement dit, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $((n+1)^2 - k^2)\lambda_k = 0$, et comme $n+1 \neq k$, $\lambda_k = 0$.
Ainsi $\boxed{\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0}$, et il ne reste plus dans l'égalité de départ que $\lambda_{n+1} f_{n+1} = \theta$, qui donne $\boxed{\lambda_{n+1} = 0}$ car f_{n+1} n'est pas la fonction nulle.
On a donc établi $\mathscr{P}_{n+1}$, ce qui achève l'exercice.

Deuxième méthode

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, $n+1$ réels qui vérifient

$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = \theta \quad \text{(où } \theta \text{ est la fonction nulle)}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos(kx) = 0.$$

Donc avec la formule d'Euler

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = 0,$$

c'est-à-dire, en multipliant par 2 et en séparant les deux sommes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{ikx} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-ikx} = 0,$$

d'où en multipliant par e^{inx},

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{i(n+k)x} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{i(n-k)x} = 0,$$

puis en posant $k' = n + k$ dans la première somme, et $k' = n - k$ dans la seconde,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=n}^{2n} \lambda_{k-n} e^{ikx} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n-k} e^{ikx} = 0$$

ce qui revient à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P\left(e^{ix}\right) = 0,$$

où P est le polynôme

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n-k} X^k + 2\lambda_0 X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_{k-n} X^k \\ &= \lambda_n + \lambda_{n-1} X + \cdots + \lambda_1 X^{n-1} + 2\lambda_0 X^n \\ &\qquad + \lambda_1 X^{n+1} + \cdots + \lambda_{n-1} X^{2n-1} + \lambda_n X^{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme P ci-dessus admet pour racines tous les e^{ix} pour $x \in \mathbb{R}$, autrement dit tous les nombres complexes du cercle unité, ce qui fait en bref une infinité de racines.

Par conséquent, P est le polynôme nul, donc ses coefficients sont nuls, et par conséquent les λ_k pour $k \in [\![0, n]\!]$ sont tous nuls, ce qui achève de prouver que la famille $[f_0, f_1, \dots, f_n]$ est libre.

Une correction de l'exercice 2

énoncé

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Alors

$$\mathrm{AM} = \begin{pmatrix} a-d+g & b-e+h & c-f+i \\ d-g & e-h & f-i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{MA} = \begin{pmatrix} a & -a+b & a-b+c \\ d & -d+e & d-e+f \\ g & -g+h & g-h+i \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{A}) &\Longleftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{MA} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a-d+g & b-e+h & c-f+i \\ d-g & e-h & f-i \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -a+b & a-b+c \\ d & -d+e & d-e+f \\ g & -g+h & g-h+i \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \cdots \text{(calculs)} \cdots \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{array} \right. \Longleftrightarrow \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{M} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi en notant $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{A}) \Longleftrightarrow \mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_3, \mathrm{J}, \mathrm{K}),$$

autrement dit

$$\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_3, \mathrm{J}, \mathrm{K}).$$

On en déduit que $\mathscr{C}(\mathrm{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont $(\mathrm{I}_3, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ est une famille génératrice. Cette famille est aussi une base car on montre sans difficulté qu'elle est libre.
On en déduit que $\dim(\mathscr{C}(\mathrm{A})) = 3$.

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $v = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. En travail préliminaire qui va m'éviter de refaire plusieurs fois presque la même chose, je vais appliquer le pivot de Gauss à la matrice $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1, u_2, u_3, v)$ comme ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & x \\ -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & x \\ 0 & 2 & a+1 & x+y \\ 0 & 0 & 1-a & z-x \end{pmatrix}$$

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc la famille (u_1, u_2, u_3), qui est formée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice des coordonnées $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1, u_2, u_3)$ est de rang 3.

   Or d'après le préliminaire,

   $$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1, u_2, u_3) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a+1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix},$$

   est de rang 3 si et seulement si $1 - a \neq 0$.

   Par conséquent $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ si et seulement si } a \neq 1}$.

2. (a) On est dans le cas où $a = 1$, donc $u_2 = u_3$, et $\dim(F) = \mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$.

   Notons $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On utilise la propriété suivante

   $$u \in F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) \iff \mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3, u) = \mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$$

   Or d'après le préliminaire

   $$\mathrm{rg}(u_1, u_2, u) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{pmatrix}$$

   Donc $\boxed{u \in F} \iff z - x = 0 \iff \boxed{x = z}$.

   (b) On a vu que $\dim(F) = 2$. Ainsi comme (u_1, u_2) est une famille libre de deux vecteurs de F, c'est une base de F.

(c) **Première méthode :**

– $v \notin \mathrm{F}$ car ses coordonnées ne vérifient pas $x = z$.
  Soit $u \in \mathrm{Vect}(v) \cap \mathrm{F}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda.v$. Mais si $\lambda \neq 0$, alors $v = \frac{1}{\lambda}.u$ doit aussi appartenir à $\mathrm{Vect}(v) \cap \mathrm{F}$ (qui est un sous-espace vectoriel en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels) donc v doit appartenir à F, ce qui est faux.
  On en déduit que $\mathrm{Vect}(v) \cap \mathrm{F} = \{\vec{o}\}$.
– On sait que $\dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)) = \mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$. Puis comme $\dim(\mathrm{Vect}(v)) = 1$, on a $\dim(\mathrm{Vect}(v)) + \mathrm{F} = \dim(\mathbb{R}^3)$.
– On peut conclure que : $\boxed{\mathrm{Vect}(v) \oplus \mathrm{F} = \mathbb{R}^3}$.

Deuxième méthode : d'après le préliminaire

$$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1, u_2, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc est de rang 3, d'où (u_1, u_2, v) est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a formé une base de $\mathbb{R}^3$ en réunissant (u_1, u_2) qui est une base de F, et (v) qui est une base de $\mathrm{Vect}(v)$, donc

$$\boxed{\mathrm{Vect}(v) \oplus \mathrm{F} = \mathbb{R}^3}.$$

Recherche des projetés : cherchons les coordonnées (a, b, c) du vecteur $w = (x, y, z)$ dans la base (u_1, u_2, v) en résolvant le système de matrice $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1, u_2, v)$ et de second membre $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(w)$, qui est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

équivalent grâce au préliminaire à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ z - x \end{pmatrix}$$

qui donne enfin avec $L_2 \leftarrow 1/2(L_2 - L_3), L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{cases} a &= -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ b &= x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ c &= z - x \end{cases}$$

Ainsi

$$w = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right).u_1 + \left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right).u_2}_{\in F} + \underbrace{(z-x).v}_{\in \mathrm{Vect}(v)}$$

(on vérifie vite fait sur son brouillon que la somme donne bien le triplé (x,y,z))
ce qui prouve que le projeté de $w = (x,y,z)$ sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(v)$ est le vecteur $(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z).u_1 + (x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z).u_2$, qui donne le triplé $\boxed{(x, x+y-z, x)}$.

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

Le rang de cette famille de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est égal au rang de la matrice de leurs coordonnées dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, qui est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 3 & a & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est équivalentes par les lignes à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la famille est :

- de rang 4, si $a \neq 4$ et $b \neq -3$;
- de rang 3, si $a = 4$ mais $b \neq -3$, ou bien si $a \neq 4$ mais $b = -3$;
- de rang 2 si $a = 4$ et $b = -3$.

Une correction de l'exercice 5

énoncé

1. En effectuant les opérations

$$P_3 \leftarrow P_3 + P_2 - 2P_1, \text{ puis } P_2 \leftarrow P_2 + P_1,$$

on constate que

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(P_1, P_2, P_3) &= \operatorname{rg}(1 + 3X - X^3, 2 + 5X + X^2, \theta) \\ &= \operatorname{rg}(1 + 3X - X^3, 2 + 5X + X^2) \\ &= 2 \text{ (au vu des degrés).} \end{aligned}$$

2. Par définition du rang, on déduit de la question précédente que $\dim(F) = \dim(\operatorname{Vect}(P_1, P_2, P_3)) = 2$, or P_1 et P_2 sont deux polynômes non-colinéaires, et ils sont dans F, donc ils forment une base de F.
3. De nouveau grâce à l'opération $P_2 \leftarrow P_2 + P_1$, on constate que

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(1, X, P_1, P_2) &= \operatorname{rg}(1, X, 1 + 3X - X^3, 2 + 5X + X^2) \\ &= 4 \text{ (encore avec les degrés).} \end{aligned}$$

donc ces quatre polynômes, qui sont dans $\mathbb{R}_3[X]$, forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.
On en déduit que $\operatorname{Vect}(1, X)$ et $\operatorname{Vect}(P_1, P_2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$, autrement dit que $G = \operatorname{Vect}(1, X)$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire à F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

> *Le théorème de la base incomplète affirme que pour toute famille* ***libre*** $(x_1, \ldots, x_p)$ *de* p *vecteurs dans un espace vectoriel de dimension* n*, on peut trouver* $n - p$ *vecteurs* $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ *dans n'importe quelle base de* E *avec lesquels compléter la famille libre en une base* $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ *de* E.
> *Ici on a complété la famille libre* (P_1, P_2) *en une base de* $\mathbb{R}_3[X]$ *avec les polynômes* 1 *et* X *pris dans la base canonique.*

4. Cherchons les coordonnées de $P = -2 + X^2 - X^3$ dans la base $(1, X, P_1, P_2)$. Prenons quatre réels a, b, c, d, alors

$$\begin{aligned}
&a + bX + cP_1 + dP_2 = P \\
\iff &(a + c + d) + (b + 3c + 2d)X + dX^2 + (-c + d)X^3 \\
&\qquad = -2 + X^2 - X^3 \\
\iff &\left\{\begin{array}{ccccl} a & & +c & +d & = -2 \\ & b & +3c & +2d & = 0 \\ & & & d & = 1 \\ & & -c & +d & = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = -5 \\ b = -8 \\ c = 2 \\ d = 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

donc $P = (-5 - 8X) + (2P_1 + P_2)$, or $-5 - 8X \in G$ et $2P_1 + P_2 \in F$, donc le projeté de P sur F parallèlement à G est $2P_1 + P_2 = 3 + 8X + X^2 - X^3$, et le symétrique de P par rapport à F parallèlement à G est $(2P_1 + P_2) - (-5 - 8X) = 8 + 16X + X^2 - X^3$.

Une correction de l'exercice 6

énoncé

1. ➟ L'ensemble $\mathscr{E}$ contient la fonction nulle θ qui est deux fois dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et vérifie bien pour tout réel $x > 0$

$$x^2\theta''(x) + 4x\theta'(x) + 2\theta(x) = x^2 \times 0 + 4x \times 0 + 2 \times 0 = 0,$$

donc $\mathscr{E}$ n'est pas vide.

➟ Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{E}$, λ et μ deux réels, alors d'une part $\lambda f + \mu g$ est deux fois dérivable sur $]0\ ;+\infty[$, et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned}
&x^2(\lambda f + \mu g)''(x) + 4x(\lambda f + \mu g)'(x) + 2(\lambda f + \mu g)(x) \\
&= \lambda x^2 f''(x) + \mu x^2 g''(x) + 4\lambda x f'(x) + 4\mu x g'(x) \\
&\quad + 2\lambda f(x) + 2\mu g(x) \\
&= \lambda\left[x^2 f''(x) + 4x f'(x) + 2f(x)\right] \\
&\quad + \mu\left[x^2 g''(x) + 4x g'(x) + 2g(x)\right] \\
&= \lambda \times 0 + \mu \times 0 \ \ \textit{(car f et g sont dans $\mathscr{E}$)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc la fonction $(\lambda f + \mu g)$ est dans $\mathscr{E}$, ce qui prouve que $\mathscr{E}$ est stable par combinaison linéaire.

➟ L'ensemble $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathscr{D}$ non-vide et stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}$.

2. Notons θ la fonction nulle. Soient a et b deux réel qui vérifient $a\,\varphi_1 + b\,\varphi_2 = \theta$, alors pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} = 0\cdot$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient $a + b = 0$, et $x = \frac{1}{2}$ donne $2a + 4b = 0$. On en déduit par une résolution basique de système que $a = b = 0$, ce qui prouve que (φ_1, φ_2) est une famille libre.

3. (a) Soit f une fonction de $\mathscr{E}$, pour montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto x^2 f(x)$ est une fonction polynôme de degré inférieur à 1 (à vrai dire : est polynomiale de degré inférieur à 1 sur $]0\,;+\infty[$), il suffit de prouver que φ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et que sa dérivée seconde φ'' est nulle.

Par définition des fonctions de $\mathscr{E}$, f est est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et $x \mapsto x^2$ aussi, donc φ l'est aussi.

Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} &\varphi'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) \\ \text{et } &\varphi''(x) = 2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) = 0 \ \ (\textit{car } f \in \mathscr{E}) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

(b) ➟ Pour tout réel $x > 0$, $\varphi_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $\varphi_1''(x) = +\frac{2}{x^3}$, donc

$$x^2\varphi_1''(x) + 4x\varphi_1'(x) + 2\varphi_1(x) = 2 \times \frac{1}{x} - 4 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x} = 0$$

ce qui prouve que φ_1 est dans $\mathscr{E}$.

De même, $\varphi_2'(x) = -\frac{2}{x^3}$ et $\varphi_2''(x) = +\frac{6}{x^4}$, donc on obtient facilement que $x^2\varphi_2''(x) + 4x\varphi_2'(x) + 2\varphi_2(x) = 0$ et φ_2 est dans $\mathscr{E}$.

Ainsi φ_1 et φ_2 sont dans $\mathscr{E}$, et comme $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel, on a

$$\mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) \subset \mathscr{E}.$$

➟ Réciproquement, soit $f \in \mathscr{E}$.
On sait que $x \mapsto x^2 f(x)$ est une fonction polynomiale sur $]0\,;+\infty[$, donc il existe deux réels a et b qui vérifient pour tout réel $x>0$, $x^2 f(x) = a\,x + b$. Ainsi en multipliant les deux membres par $\frac{1}{x^2}$, on obtient

$$f(x) = a \times \frac{1}{x} + b \times \frac{1}{x^2} = a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x).$$

Autrement dit $f = a\,\varphi_1 + b\,\varphi_2$, donc $f \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.
On a donc établi que $\mathscr{E} \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.

➟ On peut enfin conclure que $\boxed{\mathscr{E} = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)}$, c'est-à-dire que (φ_1, φ_2) est une famille génératrice de $\mathscr{E}$.

4. ➟ On a établi que (φ_1, φ_2) est une famille libre et génératrice de $\mathscr{E}$, donc c'est une base de $\mathscr{E}$.

➟ Pour toute fonction f de $\mathscr{E}$, les coefficients a et b de f dans la base (φ_1, φ_2), vérifient pour tout $x>0$

$$f(x) = a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}.$$

En particulier, pour $x=1$, on obtient $f(1) = a+b$.
En dérivant les deux membres de l'égalité

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x^3}$$

qui donne, à nouveau pour $x=1$, $f'(1) = -a-2b$.
On en déduit que

$$b = -f(1) - f'(1)$$
$$a = 2f(1) + f'(1).$$

On conclut alors que les coordonnées de f dans la base (φ_1, φ_2) sont $a = 2f(1) + f'(1)$ et $b = -f(1) - f'(1)$.

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

1. La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathscr{C} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est par conséquent de dimension 4.

2. (a)

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}([I,J,K,L]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1, \\ L_3 \longleftrightarrow L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{rg}(I,J,K,L) = 4$, et

$$\boxed{\text{la famille } (I,J,K,L) \text{ est une base de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}.$$

(b) Les réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les coordonnées de A dans la base (I,J,K,L) si, et seulement si, $A = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$, qui équivaut à ce que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est solution du système de matrice $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}([I,J,K,L])$ et de second membre $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

que l'on résout par le pivot de Gauss (je vous laisse les détails) en

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & -2 \\ \gamma & = & 3 \\ \delta & = & -3 \end{array} \right.$$

autrement dit $\boxed{A = -2J + 3K - 3L}$.

3. (a)– Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{JMJ} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ donc

$$\mathrm{M} \in \mathscr{F} \iff \mathrm{JMJ} = \mathrm{M} \iff \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases} \iff \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a\mathrm{I} + b\mathrm{J} \iff \mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{J})$$

Donc $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{J})$, ce qui prouve que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (I, J) est une famille génératrice de $\mathscr{F}$. Comme I et J ne sont pas colinéaires, on peut conclure que $\boxed{[\mathrm{I}, \mathrm{J}] \text{ est une base de } \mathscr{F}}$.

– On prouve de la même manière que $\mathscr{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\boxed{[\mathrm{K}, \mathrm{L}] \text{ est une base de } \mathscr{G}}$.

(b) Des questions précédentes, on récolte que

$$\begin{cases} [\mathrm{I}, \mathrm{J}] \text{ est une base de } \mathscr{F}, \\ [\mathrm{K}, \mathrm{L}] \text{ est une base de } \mathscr{G}, \\ [\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L}] \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

donc $\boxed{\mathscr{F} \text{ et } \mathscr{G} \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

(c) On a vu que $\mathrm{A} = -2\mathrm{J} + 3\mathrm{K} - 3\mathrm{L}$, or $\begin{cases} -2\mathrm{J} \in \mathscr{F} \\ 3\mathrm{K} - 3\mathrm{L} \in \mathscr{G} \end{cases}$ donc

➟ $\boxed{\text{le projeté de A sur } \mathscr{F} \text{ parallèlement à } \mathscr{G} \text{ est } -2\mathrm{J}}$;

➟ $\boxed{\text{le projeté de A sur } \mathscr{G} \text{ parallèlement à } \mathscr{F} \text{ est } 3\mathrm{K} - 3\mathrm{L}}$.

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

Les suites de F sont les suites de la forme

$$(u_0, u_0, u_2, u_2, u_4, u_4, \ldots, u_{2n}, u_{2n}, \ldots)$$

et les suites de G sont les suites de la forme

$$(u_0, 0, u_2, 0, u_4, 0, \ldots, u_{2n}, 0, \ldots).$$

1. (i) F contient la suite nulle donc n'est pas vide.

De plus, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de F, et λ et μ deux réels, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$(\lambda u_{2n+1}+\mu v_{2n+1})=(\lambda u_{2n}+\mu v_{2n})$$

donc $\lambda\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu\,(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En conclusion F est non-vide et stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(ii) On montre de la même manière que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(iii)
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{2n+1}=u_{2n}$ et $u_{2n+1}=0$, donc $u_{2n+1}=0$ et $u_{2n}=0$, ce qui prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

  Donc $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ est réduit à la suite nulle.
- Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, cherchons une suite $v=(v_0,v_0,v_2,v_2,\ldots,v_{2n},v_{2n},\ldots)$ dans F et une suite $w=(w_0,0,w_2,0,\ldots,w_{2n},0,\ldots)$ dans G qui vérifient $u=v+w$.

  Cette égalité $v+w=u$ donne pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{l} v_{2n}+w_{2n}=u_{2n}\\ v_{2n}+0=u_{2n+1}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} w_{2n}=u_{2n}-u_{2n+1}\\ v_{2n}=u_{2n+1}\end{array}\right.$$

  il suffit donc de prendre

$$\begin{array}{lllllll} v=(u_1, & u_1, & \ldots, & u_{2n+1}, & u_{2n+1}, & \ldots)\\ w=(u_0-u_1, & 0, & \ldots, & u_{2n}-u_{2n+1}, & 0, & \ldots)\end{array}$$

  et on obtient bien $u=v+w$ avec v dans F et w dans G.
  Ainsi $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}=\mathrm{F}+\mathrm{G}$.
- On peut donc conclure que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

2. De la question précédente on déduit directement que le projeté de $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur F parallèlement à G est

$$p(u)=v=(u_1,\quad u_1,\quad \ldots,\quad u_{2n+1},\quad u_{2n+1},\quad \ldots)$$

tandis que le projeté de $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur F parallèlement à G est

$$q(u)=w=(u_0-u_1,\quad 0,\quad \ldots,\quad u_{2n}-u_{2n+1},\quad 0,\quad \ldots)$$

Par conséquent, le symétrique de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ parallèlement à F par rapport à G est

$$\begin{aligned} s(u) &= (q-p)(u) = w - v \\ &= (u_0 - 2u_1, -u_1, \ldots, u_{2n} - 2u_{2n+1}, -u_{2n+1}, \ldots) \end{aligned}$$