☞ *Il y a aussi des questions au verso !*

Questions de cours 1 — *Réponses*

Dans toutes les questions, on note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux parties de E, et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Compléter :

Q1. F est un sous-espace vectoriel de E lorsque

.

Q2. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de F si, et seulement si,

;

On note alors $F =$.

La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si,

.

Cocher la fin de phrase correcte :

si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre, la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ est certainement

- ☐ le vecteur nul.
- ☐ un vecteur non nul.

Q3. Donner la définition d'une base de E :

Donner une base de $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-c & -a-2b+c \\ b+2c & 2a-3c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$:

.

Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel :

si on sait que $\dim(E) = n$, à quelle condition suffisante la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est-elle une base de E ?

Dans un espace vectoriel de dimension finie quelconque, quel est l'intérêt de choisir une base ?

$\dim(\mathbb{K}^n) =$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) =$, $\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) =$.

Q4. $\mathrm{rg}\big((1,1),(-1,-1),(2,2)\big) =$,

$\mathrm{rg}\big(X+1,-2X+2,X-2,2X-2,X+2\big) =$,

Q5. ➟ Compléter avec la définition : on dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E lorsque

➟ Compléter avec une caractérisation en dimension finie :

$E = F \oplus G \iff$

➟ Compléter avec une caractérisation utilisant des bases :

$E = F \oplus G \iff$

➟ Justifier *(le plus simplement possible)* que $\mathrm{Vect}\,(X^2,1)$ et $\mathrm{Vect}\,(X^3,X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$:

.

Exercice 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_k : x \mapsto \cos(kx)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera une base ainsi que la dimension.

Exercice 3

Soient $a \in \mathbb{R}$, $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,1,1)$, et $u_3 = (a,1,1)$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq 1$.
2. On suppose ici que $a = 1$ et on note $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Donner une base de F.
   (b) Soit $v = (0,1,1)$. Montrer que $\text{Vect}(v)$ et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, puis décomposer le vecteur (x,y,z) sur $F + \text{Vect}(v)$.

Exercice 4

Étudier selon les valeurs des réels a et b le rang de la famille ci-contre :

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ b & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 5

On pose $P_1 = 1 + 3X - X^3$, $P_2 = 1 + 2X + X^2 + X^3$, et $P_3 = 1 + 4X - X^2 - 3X^3$.

1. Déterminer le rang de la famille $[P_1, P_2, P_3]$.
2. Donner un sous-espace vectoriel supplémentaire G de $F = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Donner alors le projeté de $P = -2 + X^2 - X^3$ sur F parallèlement à G, puis le symétrique de P par rapport à F parallèlement à G.

CC BY NC

Exercice 6 – (*)

On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $]0\,;+\infty[$.
On considère l'ensemble

$$\mathscr{E} = \{f \in \mathscr{D} \mid \forall x > 0,\ \ x^2 f''(x) + 4x f'(x) + 2f(x) = 0\}.$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ est un sous-espace-vectoriel de $\mathscr{D}$.
2. Montrer que $\varphi_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\varphi_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ forment une famille libre.
3. (a) Soit $f \in \mathscr{E}$, vérifier que $x \mapsto x^2 f(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. *(On pourra dériver deux fois la fonction)*
   (b) En déduire que φ_1 et φ_2 forment une famille génératrice de $\mathscr{E}$.
4. Conclure que (φ_1, φ_2) est une base de $\mathscr{E}$ et donner les coordonnées d'une fonction f de $\mathscr{E}$ dans cette base en fonction de $f(1)$ et de $f'(1)$.

Exercice 7

On considère la matrice unité I_2 et les matrices suivantes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la base canonique et la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Montrer que $(\mathrm{I}_2, \mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Quelles sont les coordonnées de A dans cette base ?
3. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $\mathrm{JMJ} = \mathrm{M}$, et $\mathscr{G}$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $\mathrm{JMJ} = -\mathrm{M}$.
   (a) Prouver que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et donner une base pour chacun des deux.
   (b) Montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Donner les projetés de A sur $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathscr{G}$ et sur $\mathscr{G}$ parallèlement à $\mathscr{F}$.

Exercice 8 – (*)

1. Montrer que $\mathrm{F} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = u_{2n}\}$
   et $\mathrm{G} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = 0\}$
   sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
2. Préciser pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le projeté de u sur F parallèlement à G, ainsi que son symétrique parallèlement à F par rapport à G.

CC BY NC

Réponses aux questions de cours *questions*

1. F est un sous-espace vectoriel de E lorsque F est un sous-espace vectoriel de E lorsque

   ➟ F est non vide (il doit contenir en particulier le vecteur nul 0_E) ;
   ➟ F est stable par combinaisons linéaires, autrement dit

   $$\forall (x,y)\in F^2,\ \ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \ \lambda x+\mu y\in F.$$

2. $F=\text{Vect}(x_1,\dots,x_n)\iff$
   - $F\subset \text{Vect}(x_1,\dots,x_n)$, c'est-à-dire $\forall x\in F,\ \ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \ x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$,
   - $\text{Vect}(x_1,\dots,x_n)\subset F$.

   (ce point est trop souvent oublié !)

   On note alors $F=\text{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

   La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre si, et seulement si,

   La **seule** combinaison linéaire **nulle** de ces vecteurs s'obtient uniquement avec des coefficients nuls :

   $$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=0_E\Rightarrow\lambda_1=\dots=\lambda_n=0.$$

   Cocher la fin de phrase correcte :

   si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille libre, la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$ est certainement
   - ☐ le vecteur nul.
   - ☑ un vecteur non nul.

3. ➟ Donner la définition d'une base de E :

   Une famille de vecteurs est une base de E si, et seulement si, c'est une famille libre et génératrice de E.

   ➟ Donner une base du sous-espace vectoriel

$$\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-c & -a-2b+c \\ b+2c & 2a-3c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} :$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

et après avoir montré que ces trois matrices forment une famille libre, on peut conclure que

une base de F est la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

4. ➟ Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel :

La dimension d'un espace vectoriel est le cardinal de ses bases.

➟ Si on sait que $\dim(\mathrm{E}) = n$, à quelle condition suffisante la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est-elle une base de E ?

(Sachant que cette famille est formée de vecteurs de E *et qu'elle est de cardinal n)*
il suffit que ce soit une famille libre pour être une base de E.

5. ➟ Compléter avec la définition :

$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff$ *(sachant que* F *et* G *sont des* s.e.v. *de* E*)*
Pour tout vecteur x de E, **il existe** un couple $(x_\mathrm{F}, x_\mathrm{G})$ dans $\mathrm{F} \times \mathrm{G}$ **unique** tel que $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$.

➟ Justifier *(le plus simplement possible)* que $\mathrm{Vect}\left(-\mathrm{X}^2, 2\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(-3\mathrm{X}^3, \mathrm{X}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$:

Les familles $(-\mathrm{X}^2, 2)$ et $(-3\mathrm{X}^3, \mathrm{X})$ sont respectivement des bases de $\mathrm{Vect}\left(-\mathrm{X}^2, 2\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(-3\mathrm{X}^3, \mathrm{X}\right)$, et leur concaténation donne une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, donc ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

CC BY NC

6. Si on sait que $\dim(E) = n$, à quelle condition suffisante la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est-elle une base de E ?

   il suffit que cette famille soit libre, ou bien génératrice, car c'est une famille de vecteurs de E de cardinal n.

7. ➟ $\operatorname{rg}\big((1,1),(-1,-1),(2,2)\big) =$ 1 ,

   $\operatorname{rg}\big(X+1, -2X+2, X-2, 2X-2, X+2\big) =$ 2 .

8. Si on connaît une base de F ainsi qu'une base de G, comment montrer simplement que $F \oplus G = E$?

   il suffit de montrer qu'une concaténation de ces deux bases donne une base de E. ;

9. Soit u une application entre deux espaces vectoriels E et F :

   ➟ u est linéaire si, et seulement si,

   l'image d'une combinaison linéaire par u est la combinaison linéaire des images :

   $$\forall (x,y) \in E^2,\ \ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

   ➟ u est un automorphisme si, et seulement si,

   u est un endomorphisme bijectif, ou si u est un isomorphisme d'un espace vectoriel dans ce même espace vectoriel. ;

   ➟ $x \in \operatorname{Ker}(u) \iff$ $u(x) = 0_F$; $x \in \operatorname{Im}(u) \iff$ $\exists \square \in E,\ \ x = u(\square)$;

   ➟ u est injective si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.

   ➟ Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, donner le théorème du rang en précisant à quelle condition sur E ou F on peut l'appliquer :

   dans le cas où E est de dimension finie :

   $$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(u)) + \operatorname{rg}(u)$$

10. On considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & (a,b,c) & \longmapsto & c - a + (c-b)X + (b-a)X^2. \end{array}$$

    Compléter :

    ➟ La matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

- une base de $\mathrm{Ker}(u)$ est $\boxed{((1,1,1)).}$
- une base de $\mathbb{I}\mathrm{m}(u)$ est $\boxed{(1+X^2, 1+X)}$.

11. Soit p un projecteur de E.
    - Quelle propriété caractéristique d'un projecteur vérifie p ?
      $\boxed{p \circ p = p}$ ou $\boxed{p^2 = p}$.

      *En mathématiques, une **propriété caractéristique**, ou **caractérisation**, est une propriété équivalente, appelée aussi **propriété nécessaire et suffisante**.*
    - Qu'est-ce qu'une base « adaptée à p » ?
      c'est une base de E formée de la concaténation d'une base de $\mathbb{I}\mathrm{m}(p)$ avec une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

      - *Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E, une base de E adaptée à F est une base de E obtenue en complétant une base de F ;*
      - *lorsque deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E, une base adaptée est une base de E formée par concaténation d'une base de F et d'une base de G.*
    - Quelle est la matrice de p dans une telle base ?
      C'est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont 1 répété $\mathrm{rg}(p)$ fois, et 0 répété $\dim(\mathrm{Ker}(p))$ fois.
12. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Compléter :

    On rappelle que le noyau et l'image d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont en vérité le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associé à A qui est l'application

    $$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

    En vérité les espaces de départ et d'arrivée sont $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, mais on confond souvent $\mathbb{K}^\square$ et $\mathcal{M}_{\square,1}(\mathbb{K})$ en écrivant les $\square$-listes en colonne.

- $\mathrm{Ker}(A) = \boxed{\{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0_{\mathbb{K}^n}\}}$;
- $\mathbb{I}\mathrm{m}(A) = \boxed{\{AX \mid X \in \mathbb{K}^p\}}$;
- Compléter : si $\mathrm{rg}(A) = 3$, alors $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \boxed{p-3}$.

13. Compléter : l'ensemble des solutions du système

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

est le noyau de la matrice

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}},$$

il a pour base

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

Première méthode

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ la forme propositionnelle
la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

1. Au rang $n = 0$, la fonction f_0 n'est pas la fonction nulle, donc la famille $[f_0]$ est une famille libre, et $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie, et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est aussi vraie, c'est-à-dire que la famille $(f_0, \ldots, f_{n+1})$ est libre.
   Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$, $n+2$ réels qui vérifient

$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = \theta \quad (\text{où } \theta \text{ est la fonction nulle})$$

   autrement dit

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k f_k = \theta$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \cos(k\,x) = 0.$$

Si on dérive deux fois cette égalité, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n+1} (-k^2)\lambda_k \cos(k\,x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-k^2)\lambda_k f_k = -\lambda_1 f_1 \cdots - n^2 \lambda_n f_n - (n+1)^2 \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0.$$

Par conséquent, on va multiplier la première égalité (E) par $(n+1)^2$ et lui ajouter l'égalité que l'on vient d'obtenir pour éliminer le terme en f_{n+1} :

$$(n+1)^2 \times \left(\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k f_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-k^2)\lambda_k k f_k\right) = -(n+1)^2 0 + 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n} ((n+1)^2 - k^2)\lambda_k f_k = 0.$$

On a obtenu une combinaison linéaire nulle des fonctions $f_0, \ldots, f_n$. Or par hypothèse de récurrence, ces fonctions forment une famille libre, donc les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls. Autrement dit, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $((n+1)^2 - k^2)\lambda_k = 0$, et comme $n+1 \neq k$, $\lambda_k = 0$.
Ainsi $\boxed{\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0}$, et il ne reste plus dans l'égalité de départ que $\lambda_{n+1} f_{n+1} = 0$, qui donne $\boxed{\lambda_{n+1} = 0}$ car f_{n+1} n'est pas la fonction nulle.
On a donc établi $\mathscr{P}_{n+1}$, ce qui achève l'exercice.

Deuxième méthode

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, $n+1$ réels qui vérifient

$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0 \quad \text{(où 0 est la fonction nulle)}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos(kx) = 0.$$

Donc avec la formule d'Euler

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = 0,$$

c'est-à-dire, en multipliant par 2 et en séparant les deux sommes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{ikx} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-ikx} = 0,$$

d'où en multipliant par e^{inx},

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{i(n+k)x} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{i(n-k)x} = 0,$$

puis en posant $k' = n + k$ dans la première somme, et $k' = n - k$ dans la seconde,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=n}^{2n} \lambda_{k-n} e^{ikx} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n-k} e^{ikx} = 0$$

ce qui revient à

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{P}\left(e^{ix}\right) = 0,$$

où P est le polynôme

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n-k} X^k + 2\lambda_0 X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_{k-n} X^k \\ &= \lambda_n + \lambda_{n-1} X + \cdots + \lambda_1 X^{n-1} + 2\lambda_0 X^n \\ &\quad + \lambda_1 X^{n+1} + \cdots + \lambda_{n-1} X^{2n-1} + \lambda_n X^{2n}.\end{aligned}$$

Ainsi le polynôme P ci-dessus admet pour racines tous les e^{ix} pour $x \in \mathbb{R}$, autrement dit tous les nombres complexes du cercle unité, ce qui fait en bref une infinité de racines.

Par conséquent, P est le polynôme nul, donc ses coefficients sont nuls, et par conséquent les λ_k pour $k \in [\![0, n]\!]$ sont tous nuls, ce qui achève de prouver que la famille $[f_0, f_1, \dots, f_n]$ est libre.

Une correction de l'exercice 2

énoncé

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Alors

$$AM = \begin{pmatrix} a-d+g & b-e+h & c-f+i \\ d-g & e-h & f-i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

et

$$MA = \begin{pmatrix} a & -a+b & a-b+c \\ d & -d+e & d-e+f \\ g & -g+h & g-h+i \end{pmatrix}$$

CC BY NC

donc

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C}(A) &\Leftrightarrow AM = MA \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-d+g & b-e+h & c-f+i \\ d-g & e-h & f-i \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -a+b & a-b+c \\ d & -d+e & d-e+f \\ g & -g+h & g-h+i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \cdots(\text{calculs})\cdots \Leftrightarrow \begin{cases} d=g=h=0 \\ a=e=i \\ b=f \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi en notant $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$M \in \mathscr{C}(A) \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(I_3, J, K),$$

autrement dit

$$\mathscr{C}(A) = \text{Vect}(I_3, J, K).$$

On en déduit que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont (I_3, J, K) est une famille génératrice. Cette famille est aussi une base car on montre sans difficulté qu'elle est libre.
On en déduit que $\dim(\mathscr{C}(A)) = 3$.

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $v=(x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. En travail préliminaire qui va m'éviter de refaire plusieurs fois presque la même chose, je vais appliquer le pivot de Gauss à la matrice $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1,u_2,u_3,v)$ comme ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & x \\ -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & x \\ 0 & 2 & a+1 & x+y \\ 0 & 0 & 1-a & z-x \end{pmatrix}$$

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc la famille (u_1,u_2,u_3), qui est formée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice des coordonnées $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1,u_2,u_3)$ est de rang 3.

   Or d'après le préliminaire,

   $$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1,u_2,u_3) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a+1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix},$$

   est de rang 3 si et seulement si $1-a\neq 0$.

   Par conséquent $\boxed{(u_1,u_2,u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ si et seulement si } a\neq 1}$.

2. (a) On est dans le cas où $a=1$, donc $u_2=u_3$, et $\dim(F)=\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3)=2$.

   Notons $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On utilise la propriété suivante

   $$u\in F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3,u)=\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3)=2$$

   Or d'après le préliminaire

   $$\mathrm{rg}(u_1,u_2,u)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{pmatrix}$$

   Donc $\boxed{u\in F} \Leftrightarrow z-x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=z}$.

   (b) On a vu que $\dim(F)=2$. Ainsi comme (u_1,u_2) est une famille libre de deux vecteurs de F, c'est une base de F.

CC BY NC

(c) **Première méthode :**

- $v \notin \mathrm{F}$ car ses coordonnées ne vérifient pas $x = z$.
  Soit $u \in \mathrm{Vect}(v) \cap \mathrm{F}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda.v$. Mais si $\lambda \neq 0$, alors $v = \frac{1}{\lambda}.u$ doit aussi appartenir à $\mathrm{Vect}(v) \cap \mathrm{F}$ (qui est un sous-espace vectoriel en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels) donc v doit appartenir à F, ce qui est faux.
  On en déduit que $\mathrm{Vect}(v) \cap \mathrm{F} = \{\vec{0}\}$.
- On sait que $\dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)) = \mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$. Puis comme $\dim(\mathrm{Vect}(v)) = 1$, on a $\dim(\mathrm{Vect}(v)) + \mathrm{F} = \dim(\mathbb{R}^3)$.
- On peut conclure que : $\boxed{\mathrm{Vect}(v) \oplus \mathrm{F} = \mathbb{R}^3}$.

Deuxième méthode : d'après le préliminaire

$$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1, u_2, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc est de rang 3, d'où (u_1, u_2, v) est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a formé une base de $\mathbb{R}^3$ en réunissant (u_1, u_2) qui est une base de F, et (v) qui est une base de $\mathrm{Vect}(v)$, donc

$$\boxed{\mathrm{Vect}(v) \oplus \mathrm{F} = \mathbb{R}^3}.$$

Recherche des projetés : cherchons les coordonnées (a, b, c) du vecteur $w = (x, y, z)$ dans la base (u_1, u_2, v) en résolvant le système de matrice $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1, u_2, v)$ et de second membre $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(w)$, qui est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

équivalent grâce au préliminaire à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ z-x \end{pmatrix}$$

qui donne enfin avec $L_2 \leftarrow 1/2(L_2 - L_3), L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ b & = & x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ c & = & z - x \end{array}\right.$$

Ainsi

$$w = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right).u_1 + \left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right).u_2}_{\in F} + \underbrace{(z-x).v}_{\in \mathrm{Vect}(v)}$$

(on vérifie vite fait sur son brouillon que la somme donne bien le triplé (x,y,z))

ce qui prouve que le projeté de $w = (x,y,z)$ sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(v)$ est le vecteur $(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z).u_1 + (x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z).u_2$, qui donne le triplé $\boxed{(x, x+y-z, x)}$.

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

Notons respectivement A, B, C, D ces quatre matrices.

On peut extraire de la famille génératrice (A, B, C, D) *une base de* Vect (A, B, C, D)*, donc chercher la dimension de ce sous-espace vectoriel revient à chercher le cardinal de la plus grande famille libre extraite de la famille génératrice* (A, B, C, D) (c'est ce qu'on appelle le rang de la famille (A, B, C, D)).

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre réels qui vérifient l'égalité (E) : $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = O_2$.

Alors

$$(E) \iff \begin{pmatrix} \alpha+\beta+2\gamma+\delta & 2\alpha+2\gamma+4\delta \\ -\alpha+\beta+b\delta & \alpha+3\beta+a\gamma-\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha & +\beta & +2\gamma & +\delta & =0 \\ 2\alpha & & +2\gamma & +4\delta & =0 \\ -\alpha & +\beta & & +b\delta & =0 \\ \alpha & +3\beta & +a\gamma & -\delta & =0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha & +\beta & +2\gamma & +\delta & =0 \\ & -2\beta & +2\gamma & +2\delta & =0 \\ & & & (b+3)\delta & =0 \\ & & (a-4)\gamma & & =0 \end{cases}$$

(après quelques opérations élémentaires sur les lignes).

Par conséquent,

➡ si $a \neq 4$, alors $\gamma = 0$ et le système donne $\begin{cases} \alpha & +\beta & & +\delta & =0 \\ & -2\beta & & +2\delta & =0 \\ & & & (b+3)\delta & =0 \\ & & \gamma & & =0 \end{cases}$

- si $b \neq -3$, alors $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, ainsi la famille (A, B, C, D) est libre, donc c'est une base de $\mathrm{Vect}(A, B, C, D)$ qui est donc de dimension 4 ;
- si $b = -3$ alors le système donne :

$$\begin{cases} \alpha & +\beta & & =-\delta \\ & -2\beta & & =-2\delta \\ & & \gamma & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2\delta \\ \beta = \delta \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

donc

- → pour $\delta = -1$ on a $\alpha = 2$, $\beta = 1$ et par conséquent $2A + B = D$, donc $\mathrm{Vect}(A, B, C, D) = \mathrm{Vect}(A, B, C)$;
- → d'autre part, pour $\delta = 0$, on remarque que $\alpha A + \beta B + \gamma C = O_2$ donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc (A, B, C) est une famille libre et par conséquent une base de $\mathrm{Vect}(A, B, C)$ qui est donc de dimension 3.

➡ si $a = 4$ alors le système donne $\begin{cases} \alpha & +\beta & +\delta & =-2\gamma \\ & -2\beta & +2\delta & =-2\gamma \\ & & (b+3)\delta & =0 \end{cases}$

- si $b \neq -3$ alors le système donne $\begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = \gamma \\ \delta = 0 \end{cases}$

  donc
  - → pour $\gamma = -1$ on a $\alpha = 3$, $\beta = -1$ et par conséquent $3A - B = C$, donc $\text{Vect}(A, B, C, D) = \text{Vect}(A, B, D)$,
  - → d'autre part, pour $\gamma = 0$, on remarque que $\alpha A + \beta B + \delta D = O_2$ donne $\alpha = \beta = \delta = 0$ donc (A, B, D) est une famille libre, et $\dim(\text{Vect}(A, B, C, D)) = 3$.
- si $b = -3$ alors le système donne

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = -2\gamma \\ -2\beta + 2\delta = -2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\delta - 3\gamma \\ \beta = \delta + \gamma \end{cases}$$

  donc
  - → pour $\delta = -1$ et $\gamma = 0$, on a $\alpha = 2$, $\beta = 1$ et par conséquent $2A + B = D$;
  - → d'autre part, pour $\delta = 0$ et $\gamma = -1$, on remarque que $\alpha = 3$, $\beta = 1$ et par conséquent $3A + B = C$.

  Ainsi $\text{Vect}(A, B, C, D) = \text{Vect}(A, B)$ et comme A et B ne sont pas colinéaires, $\text{Vect}(A, B, C, D)$ est de dimension 2.

Récapitulons : $\text{rg}(A, B, C, D) = \begin{cases} 4, & \text{si } a \neq 4 \text{ et } b \neq -3 ; \\ 3, & \text{si } a = 4 \text{ et } b \neq -3, \text{ ou } a \neq 4 \text{ et } b = -3 ; \\ 2, & \text{si } a = 4 \text{ et } b = -3. \end{cases}$

Autre méthode :

le rang de cette famille de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est égal au rang de la matrice de leurs coordonnées dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, qui est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 3 & a & -1 \end{pmatrix}$$

CC BY NC

Cette matrice est équivalentes par les lignes à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la famille est :

- de rang 4, si $a \neq 4$ et $b \neq -3$;
- de rang 3, si $a = 4$ mais $b \neq -3$, ou bien si $a \neq 4$ mais $b = -3$;
- de rang 2 si $a = 4$ et $b = -3$.

Une correction de l'exercice 5

énoncé

1. En effectuant les opérations

$$P_3 \leftarrow P_3 + P_2 - 2P_1, \text{ puis } P_2 \leftarrow P_2 + P_1,$$

on constate que

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(P_1, P_2, P_3) &= \mathrm{rg}(1+3X-X^3, 2+5X+X^2, 0) \\ &= \mathrm{rg}(1+3X-X^3, 2+5X+X^2) \\ &= 2 \textit{ (au vu des degrés).} \end{aligned}$$

2. Par définition du rang, on déduit de la question précédente que $\dim(F) = \dim(\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)) = 2$, or P_1 et P_2 sont deux polynômes non-colinéaires, et ils sont dans F, donc ils forment une base de F.
3. De nouveau grâce à l'opération $P_2 \leftarrow P_2 + P_1$, on constate que

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(1, X, P_1, P_2) &= \mathrm{rg}(1, X, 1+3X-X^3, 2+5X+X^2) \\ &= 4 \textit{ (encore avec les degrés).} \end{aligned}$$

donc ces quatre polynômes, qui sont dans $\mathbb{R}_3[X]$, forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

On en déduit que $\mathrm{Vect}(1, X)$ et $\mathrm{Vect}(P_1, P_2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$, autrement dit que $G = \mathrm{Vect}(1, X)$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire à F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Le théorème de la base incomplète affirme que pour toute famille ***libre*** $(x_1,\dots,x_p)$ *de p vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n, on peut trouver $n-p$ vecteurs $(x_{p+1},\dots,x_n)$ dans n'importe quelle base de* E *avec lesquels compléter la famille libre en une base $(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_n)$ de* E.
Ici on a complété la famille libre (P_1,P_2) en une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec les polynômes 1 *et* X *pris dans la base canonique.*

4. Cherchons les coordonnées de $P=-2+X^2-X^3$ dans la base $(1,X,P_1,P_2)$. Prenons quatre réels a,b,c,d, alors

$$\begin{aligned}
&a+bX+cP_1+dP_2=P\\
\iff&(a+c+d)+(b+3c+2d)X+dX^2+(-c+d)X^3\\
&\qquad=-2+X^2-X^3\\
\iff&\begin{cases} a & & +c & +d & =-2\\ & b & +3c & +2d & =0\\ & & & d & =1\\ & & -c & +d & =-1 \end{cases}
\iff\begin{cases} a=-5\\ b=-8\\ c=2\\ d=1 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc $P=(-5-8X)+(2P_1+P_2)$, or $-5-8X\in G$ et $2P_1+P_2\in F$, donc le projeté de P sur F parallèlement à G est $2P_1+P_2=3+8X+X^2-X^3$, et le symétrique de P par rapport à F parallèlement à G est $(2P_1+P_2)-(-5-8X)=8+16X+X^2-X^3$.

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

1. ➟ L'ensemble $\mathscr{E}$ contient la fonction nulle θ qui est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et vérifie bien pour tout réel $x>0$

$$x^2\theta''(x)+4x\theta'(x)+2\theta(x)=x^2\times 0+4x\times 0+2\times 0=0,$$

donc $\mathscr{E}$ n'est pas vide.

➟ Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{E}$, λ et μ deux réels, alors d'une part

$\lambda f + \mu g$ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned}
&x^2(\lambda f+\mu g)''(x)+4x(\lambda f+\mu g)'(x)+2(\lambda f+\mu g)(x)\\
&\quad=\lambda x^2 f''(x)+\mu x^2 g''(x)+4\lambda x f'(x)+4\mu x g'(x)\\
&\qquad+2\lambda f(x)+2\mu g(x)\\
&\quad=\lambda\left[x^2 f''(x)+4x f'(x)+2f(x)\right]\\
&\qquad+\mu\left[x^2 g''(x)+4x g'(x)+2g(x)\right]\\
&\quad=\lambda\times 0+\mu\times 0 \ \textit{(car } f \textit{ et } g \textit{ sont dans } \mathscr{E}\textit{)}\\
&\quad=0,
\end{aligned}$$

donc la fonction $(\lambda f + \mu g)$ est dans $\mathscr{E}$, ce qui prouve que $\mathscr{E}$ est stable par combinaison linéaire.

➠ L'ensemble $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathscr{D}$ non-vide et stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}$.

2. Notons θ la fonction nulle. Soient a et b deux réel qui vérifient $a\,\varphi_1 + b\,\varphi_2 = \theta$, alors pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}=0.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient $a+b = 0$, et $x = \frac{1}{2}$ donne $2a+4b = 0$. On en déduit par une résolution basique de système que $a = b = 0$, ce qui prouve que (φ_1, φ_2) est une famille libre.

3. (a) Soit f une fonction de $\mathscr{E}$, pour montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto x^2 f(x)$ est une fonction polynôme de degré inférieur à 1 (à vrai dire : est polynomiale de degré inférieur à 1 sur $]0\,;+\infty[$), il suffit de prouver que φ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et que sa dérivée seconde φ'' est nulle.

Par définition des fonctions de $\mathscr{E}$, f est est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et $x \mapsto x^2$ aussi, donc φ l'est aussi.

Pour tout réel $x > 0$,

$$\varphi'(x) = 2xf(x)+x^2 f'(x)$$

et $\varphi''(x) = 2f(x)+4xf'(x)+x^2 f''(x) = 0$ *(car* $f \in \mathscr{E}$*)*

ce qui est le résultat voulu.

(b) ➟ Pour tout réel $x > 0$, $\varphi_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $\varphi_1''(x) = +\frac{2}{x^3}$, donc

$$x^2\varphi_1''(x) + 4x\varphi_1'(x) + 2\varphi_1(x) = 2 \times \frac{1}{x} - 4 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x} = 0$$

ce qui prouve que φ_1 est dans $\mathscr{E}$.
De même, $\varphi_2'(x) = -\frac{2}{x^3}$ et $\varphi_2''(x) = +\frac{6}{x^4}$, donc on obtient facilement que $x^2\varphi_2''(x) + 4x\varphi_2'(x) + 2\varphi_2(x) = 0$ et φ_2 est dans $\mathscr{E}$.
Ainsi φ_1 et φ_2 sont dans $\mathscr{E}$, et comme $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel, on a

$$\text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) \subset \mathscr{E}.$$

➟ Réciproquement, soit $f \in \mathscr{E}$.
On sait que $x \mapsto x^2 f(x)$ est une fonction polynomiale sur $]0\,;+\infty[$, donc il existe deux réels a et b qui vérifient pour tout réel $x > 0$, $x^2 f(x) = a\,x + b$. Ainsi en multipliant les deux membres par $\frac{1}{x^2}$, on obtient

$$f(x) = a \times \frac{1}{x} + b \times \frac{1}{x^2} = a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x).$$

Autrement dit $f = a\,\varphi_1 + b\,\varphi_2$, donc $f \in \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.
On a donc établi que $\mathscr{E} \subset \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.

➟ On peut enfin conclure que $\boxed{\mathscr{E} = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)}$, c'est-à-dire que (φ_1, φ_2) est une famille génératrice de $\mathscr{E}$.

4. ➟ On a établi que (φ_1, φ_2) est une famille libre et génératrice de $\mathscr{E}$, donc c'est une base de $\mathscr{E}$.

➟ Pour toute fonction f de $\mathscr{E}$, les coefficients a et b de f dans la base (φ_1, φ_2), vérifient pour tout $x > 0$

$$f(x) = a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient $f(1) = a + b$.

En dérivant les deux membres de l'égalité

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x^3}$$

qui donne, à nouveau pour $x = 1$, $f'(1) = -a - 2b$.
On en déduit que

$$b = -f(1) - f'(1)$$
$$a = 2f(1) + f'(1).$$

On conclut alors que les coordonnées de f dans la base (φ_1, φ_2) sont $a = 2f(1) + f'(1)$ et $b = -f(1) - f'(1)$.

Une correction de l'exercice 7

énoncé

1. La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathscr{C} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est par conséquent de dimension 4.

2. (a)

$$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}([I, J, K, L]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1, \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(I, J, K, L) = 4$, et

la famille (I, J, K, L) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Les réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les coordonnées de A dans la base (I, J, K, L) si, et seulement si, $A = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$, qui équivaut à ce que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est solution du système de matrice $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}([I, J, K, L])$ et de

second membre $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

que l'on résout par le pivot de Gauss (je vous laisse les détails) en

$$\begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= -2 \\ \gamma &= 3 \\ \delta &= -3 \end{cases}$$

autrement dit $\boxed{A = -2J + 3K - 3L}$.

3. (a)– Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors $JMJ = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ donc

$$M \in \mathscr{F} \iff JMJ = M \iff \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ \iff M \in \mathrm{Vect}(I, J)$$

Donc $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(I, J)$, ce qui prouve que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (I, J) est une famille génératrice de $\mathscr{F}$. Comme I et J ne sont pas colinéaires, on peut conclure que $\boxed{[I, J] \text{ est une base de } \mathscr{F}}$.

– On prouve de la même manière que $\mathscr{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\boxed{[K, L] \text{ est une base de } \mathscr{G}}$.

(b) Des questions précédentes, on récolte que

$$\begin{cases} [I, J] \text{ est une base de } \mathscr{F}, \\ [K, L] \text{ est une base de } \mathscr{G}, \\ [I, J, K, L] \text{ est une base de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

donc $\boxed{\mathscr{F} \text{ et } \mathscr{G} \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

CC BY NC

(c) On a vu que $A = -2J + 3K - 3L$, or $\begin{cases} -2J \in \mathscr{F} \\ 3K - 3L \in \mathscr{G} \end{cases}$ donc

- le projeté de A sur $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathscr{G}$ est $-2J$;
- le projeté de A sur $\mathscr{G}$ parallèlement à $\mathscr{F}$ est $3K - 3L$.

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

Les suites de F sont les suites de la forme

$$(u_0, u_0, u_2, u_2, u_4, u_4, \dots, u_{2n}, u_{2n}, \dots)$$

et les suites de G sont les suites de la forme

$$(u_0, 0, u_2, 0, u_4, 0, \dots, u_{2n}, 0, \dots).$$

1. (i) F contient la suite nulle donc n'est pas vide.

De plus, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de F, et λ et μ deux réels, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(\lambda u_{2n+1} + \mu v_{2n+1}) = (\lambda u_{2n} + \mu v_{2n})$$

donc $\lambda\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\,(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En conclusion F est non-vide et stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(ii) On montre de la même manière que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(iii). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $F \cap G$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = u_{2n}$ et $u_{2n+1} = 0$, donc $u_{2n+1} = 0$ et $u_{2n} = 0$, ce qui prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

Donc $F \cap G$ est réduit à la suite nulle.

. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, cherchons une suite $v = (v_0, v_0, v_2, v_2, \dots, v_{2n}, v_{2n}, \dots)$ dans F et une suite $w = (w_0, 0, w_2, 0, \dots, w_{2n}, 0, \dots)$ dans G qui vérifient $u = v + w$.

Cette égalité $v + w = u$ donne pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} v_{2n} + w_{2n} = u_{2n} \\ v_{2n} + 0 = u_{2n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_{2n} = u_{2n} - u_{2n+1} \\ v_{2n} = u_{2n+1} \end{cases}$$

il suffit donc de prendre

$$\begin{array}{lllll} v = (u_1, & u_1, & \ldots, & u_{2n+1}, & u_{2n+1}, \ldots) \\ w = (u_0 - u_1, & 0, & \ldots, & u_{2n} - u_{2n+1}, & 0, \ldots) \end{array}$$

et on obtient bien $u = v + w$ avec v dans F et w dans G.

Ainsi $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.

- On peut donc conclure que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

2. De la question précédente on déduit directement que le projeté de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur F parallèlement à G est

$$p(u) = v = (u_1, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{2n+1}, \quad u_{2n+1}, \quad \ldots)$$

tandis que le projeté de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur F parallèlement à G est

$$q(u) = w = (u_0 - u_1, \quad 0, \quad \ldots, \quad u_{2n} - u_{2n+1}, \quad 0, \quad \ldots)$$

Par conséquent, le symétrique de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ parallèlement à F par rapport à G est

$$\begin{aligned} s(u) &= (q - p)(u) = w - v \\ &= (u_0 - 2u_1, -u_1, \ldots, u_{2n} - 2u_{2n+1}, -u_{2n+1}, \ldots) \end{aligned}$$