Questions de cours 1 *Réponses*

1. On note I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, donner une condition suffisante sur les fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ pour que $g \circ f$ soit continue sur I :

2. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en -1 et en 1 :

3. Donner la formule de Leibniz *(ce qui suppose d'en donner les conditions)* :

4. Donner la deuxième formulation de l'inégalité des accroissements finis :

(mis à jour le 11 avril 2025)

5. Donner le théorème de limite de la dérivée *(ou extension de la dérivée en un point)* :

6. À quelle condition une fonction f $\mathscr{C}^2$ sur I, est-elle convexe ?

Dans ce cas, encadrer la courbe de f entre deux équations de droite :

$\forall a, b \in \mathrm{I}$, $\forall x \in \mathrm{I}$, $\boxed{} \leqslant f(x) \leqslant \boxed{}$.

7. Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) :
$\sin\left(\dfrac{1}{n+2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim}$ $\square$ $\dfrac{1}{n+2}$, $\square$ $\dfrac{1}{n}$, $\square$ 0, $\square$ $\dfrac{1}{n}+\mathrm{e}^{-n}$

8. Compléter avec la partie polynomiale du développement limité *(adaptez-vous à la puissance dans le reste !)*

$$\ln(1+\square) \underset{\square\to 0}{=} \boxed{} + \mathrm{o}(\square^n),$$

$$\mathrm{e}^{\square} \underset{\square\to 0}{=} \boxed{} + \mathrm{o}(\square^n),$$

$$\cos(\square) \underset{\square\to 0}{=} \boxed{} + \mathrm{o}\left(\square^{2n+1}\right),$$

$$\sin(\square) \underset{\square\to 0}{=} \boxed{} + \mathrm{o}\left(\square^{2n+2}\right),$$

$$(1+\square)^{\pi} \underset{\square\to 0}{=} \boxed{} + \mathrm{o}(\square^n).$$

9. Compléter avec un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{=} \boxed{} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\sqrt{n+2} \underset{n\to+\infty}{=} \boxed{} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{=} \boxed{} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\ln\left(\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \boxed{} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

Exercice 1

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution a_n.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et convergente.
3. Montrer que sa limite est 0, et en revenant à la définition de a_n, trouver un équivalent de a_n.

Exercice 2

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $f_n : x \mapsto x^{n-1} \ln x$.

Exercice 3

Démontrer que si $0 < a < b$ alors $a < \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} < b$.
En déduire que si un réel x vérifie $0 < x < 1$ ou $x > 1$, alors $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$.

Exercice 4

Soit $a > 0$, et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, a]$ qui vérifie

$$f(0) = 0 \text{ et } f(a)f'(a) < 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in \left]0, a\right[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 5

1. Appliquer sur l'intervalle $[0, A]$ (où A est un réel strictement positif) la formule des accroissements finis à la fonction $f(x) = u + vx + we^{\alpha x}$ (où u, v, w, α sont réels, et w et α sont non nuls).
2. En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\alpha x} \ln\left(\frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x}\right)$ est bornée sur $\left]0, +\infty\right[$.

Exercice 6

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si f est une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ qui s'annule $n+1$ fois sur $[a, b]$, alors $f^{(n)}$ s'annule dans $]a, b[$.

Exercice 7

En raisonnant par l'absurde et en utilisant le théorème de Rolle, montrer que le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a\mathrm{X} + b$ (a et b sont deux réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 8

On considère une fonction f dérivable sur $[a\,;b]$ qui vérifie $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$.

1. Représenter une telle fonction.
2. En utilisant la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{si } x \neq a\,; \\ 0, & \text{si } x = a\,; \end{cases}$

   montrer qu'il existe un réel c dans $]a\,;b[$ qui vérifie $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Exercice 9

Déterminer les extremums sur un segment $[a\,;\,b]$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'abscisse du premier maximum local sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$.

Réponses aux questions de cours

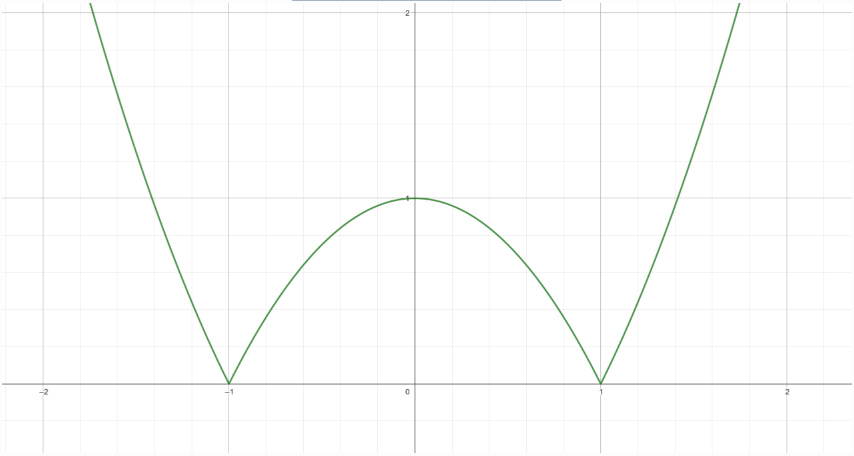
questions

1. Donner une condition suffisante sur les fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ pour que $g \circ f$ soit continue sur I :

Il suffit que f soit continue sur I, que $\boxed{f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}}$, et que g soit continue sur J pour que $g \circ f$ soit continue sur I.

2. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas dérivable en -1 ni en 1 :

$$\boxed{x \mapsto \left|(x-1)(x+1)\right|.}$$



Graphiquement, un point de la courbe où une fonction est continue sans être dérivable est soit un point où la tangente est verticale, soit un point où la courbe « fait un coin ».
Les exemples les plus classiques sont la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ en 0 (tangente verticale), et la fonction valeur absolue en 0.

3. Donner la formule de Leibniz :

Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors $f \times g$ est encore n fois dérivable sur I, et pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$(f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x).$$

4. Donner la deuxième formulation de l'inégalité des accroissements finis :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } f \text{ est continue sur I, dérivable telle que } |f'| \leqslant k \text{ sur l'intérieur de I, alors} \\ \qquad \forall (x,y) \in \mathrm{I}^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant k\,|y-x|.\end{array}}$$

5. Donner le théorème de limite de la dérivée *(ou extension de la dérivée en un po*

$$\text{Si}\ \begin{cases} f \text{ est continue sur I,} \\ f \text{ est dérivable sur } \mathrm{I} \setminus \{a\}, \\ \lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell.$$

En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est $\mathscr{C}^1$ en a avec $f'(a) = \ell$.

6. À quelle condition une fonction f $\mathscr{C}^2$ sur I, est-elle convexe ?

$$\boxed{f'' \text{ est positive sur I.}}$$

Dans ce cas, encadrer la courbe de f entre deux équations de droite :

$$\begin{array}{c}\forall a, b \in \mathrm{I}, \\ \forall x \in \mathrm{I},\end{array} \quad \boxed{f'(a)(x-a)+f(a)} \leqslant f(x) \leqslant \boxed{\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)}.$$

7. Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) :

$\sin\left(\dfrac{1}{n+2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim}$

- ☑ $\dfrac{1}{n+2}$, *(car* $\frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $\sin(\square) \underset{\square\to 0}{\sim} \square$*)*
- ☑ $\dfrac{1}{n}$, *(car* $\frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$*)*
- ☐ 0, *(il n'y a (presque) que la fonction nulle qui soit équivalente à 0)*
- ☑ $\dfrac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n}$ *(car* $\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$*)*

8. Compléter avec la partie polynomiale du développement limité

$$\ln(1+\Box) \underset{\Box \to 0}{=} \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \Box^k} + o(\Box^n),$$

$$e^{\Box} \underset{\Box \to 0}{=} \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Box^k} + o(\Box^n),$$

$$\cos(\Box) \underset{\Box \to 0}{=} \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \Box^{2n}} + o\left(\Box^{2n+1}\right),$$

$$\sin(\Box) \underset{\Box \to 0}{=} \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Box^{2n+1}} + o\left(\Box^{2n+2}\right),$$

$$(1+\Box)^{\pi} \underset{\Box \to 0}{=} \boxed{1 + \pi x + \sum_{k=2}^{n} \frac{\pi(\pi-1)\cdots(\pi-n+1)}{n!} \Box^n} + o(\Box^n).$$

9. Compléter avec un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{n}\right)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \boxed{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)},$$

$$\sqrt{n+2} = \sqrt{n} \times \sqrt{1+\frac{2}{n}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \mathrm{O}\left(\left(\frac{2}{n}\right)^3\right)\right)$$

(après calculs sur mon brouillon, je décide d'opter pour un « grand O » pour atteindre à la fin l'objectif désiré...)

$$\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{8} \times \frac{4}{n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \boxed{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\,n\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{=} \boxed{1 + \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{6n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)},$$

$$\ln\left(\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \boxed{-\frac{1}{2\,n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$ *(car $u \sim v \Longleftrightarrow u = v + \mathrm{o}(v)$).*

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_n'(x) = 3nx^2 + n^2 \geqslant 1$ car $n^2 \geqslant 1$ et $3nx^2 \geqslant 0$.

   f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$.

   Donc, $\boxed{\text{il existe un et un seul réel } x \text{ tel que } f_n(x) = 0}$. On le note a_n.

2. *Dans cet exercice, on utilise le fait que si une fonction g est croissante, alors les antécédents et les images sont rangés dans le même ordre, donc en particulier, il suffit de prouver que $g(a) \leqslant g(b)$ pour pouvoir conclure que $a \leqslant b$.*

   On constate que $f_n(0) = -2 \leqslant f_n(a_n) = 0$, or, f_n est croissante, donc, $0 \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   De plus

$$\begin{aligned} f_{n+1}(a_n) &= (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 \\ &= \underbrace{na_n^3 + n^2 a_n - 2}_{f_n(a_n)=0} + \underbrace{a_n^3 + (2n+1)a_n^3 + (2n+1)a_n}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant 0 = f_{n+1}(a_{n+1}), \end{aligned}$$

   Étant donné que f_{n+1} est croissante, on obtient $a_n \geqslant a_{n+1}$.
   $\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.}}$

3. On compare a_n à $\frac{1}{n}$:
   pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$f_n(a_n) = 0 \leqslant n - 2 \leqslant \frac{1}{n} + n - 2 = f_n\left(\frac{1}{n}\right),$$

   donc encore par croissance de f_n, on a $a_n \leqslant \frac{1}{n}$, puis par encadrement (car $a_n \geqslant 0$) on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Autre méthode : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$na_n^3 + n^2 a_n - 2 = 0, \text{ donc } a_n = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} a_n^3,$$

or on vient de voir que a_n est décroissante minorée, donc elle est bornée, ainsi

$$a_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} \mathrm{O}(1) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

On vient de voir que $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n}$, on en déduit que $a_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où $a_n^3 \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$,

$$\begin{aligned} & f_n(a_n) = na_n^3 + n^2 a_n - 2 = 0 \\ \iff & a_n = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} a_n^3 \underset{n \to +\infty}{=} \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{2}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ & \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u : x \mapsto x^{n-1}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]0\,;+\infty[$, et la fonction ln est aussi $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$, donc f_n est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.
Avec $f_n = u \times \ln$, la formule de Leibniz nous donne pour tout réel x strictement positif

$$(f_n)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (u)^{(k)}(x) \times (\ln)^{(n-k)}(x).$$

On sait *(ou on est censé savoir à force de l'avoir vu)* que

$$u^k(x) = \begin{cases} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k} & \text{si } k \leqslant n-1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et d'autre part, après avoir dérivé 4 ou 5 fois ln, on conjecture (puis on le prouve par récurrence) que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\ln^{(p)}(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } p = 0 \\ (-1)^{p-1}\frac{(p-1)!}{x^p} & \text{si } p \geqslant 1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\boxed{(f_n)^{(n)}(x)} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k} \times (-1)^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!}{x^{n-k}} \\
&\textit{(le terme de la somme correspondant à } k = n \textit{ est nul)} \\
&= \frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k-1} \\
&= (-1) \times \frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} \\
&= -\frac{(n-1)!}{x}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} - (-1)^0\right] \\
&= -\frac{(n-1)!}{x}\left[(1+(-1))^n - 1\right] \\
&= -\frac{(n-1)!}{x}\left[0^n - 1\right] = \boxed{\frac{(n-1)!}{x}} \quad \textit{(car } n \geqslant 1 \textit{ donc } 0^n = 0\textit{).}
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$.
La fonction ln est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$, donc en particulier elle est continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.
Ainsi par l'égalité des accroissements finis, il existe un réel $c \in]a\,;b[$ tel que

$$\frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} = \ln'(x) = \frac{1}{c},$$

d'où

$$\frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} = c,$$

ainsi

$$\frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \in]a\ ;\ b[,$$

autrement dit

$$a < \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} < b, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Je vous laisse remplacer a par x et b par 1 dans le cas $0 < x < 1$, et l'inverse si $1 < x$ pour obtenir les inégalités demandées.

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

Quitte à remplacer f par $(-f)$ on suppose que $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$.

Première méthode : (i) f est continue sur le segment $[0,a]$ donc est bornée et atteint ses bornes : soit M son maximum et $c \in [0,a]$ tel que $f(c) = \mathrm{M}$.

(ii) On sait que $f(a) > 0$ et $f(0) = 0$, donc le maximum n'est pas atteint en 0, d'où $c \in]0,a]$.

(iii) Supposons que $c = a$, alors pour tout $x \in [0,a]$, $f(x) \leqslant \mathrm{M} = f(a)$. Par conséquent

$$\forall x \in [0,a[,\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$$

d'où par prolongement des inégalités larges à la limite

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0.$$

Or f étant dérivable en a, $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 = f'(a)$, donc $f'(a) \geqslant 0$.

Mais par hypothèse $f'(a) < 0$, donc on débouche sur une contradiction. Ainsi on peut affirmer que $c \in]0,a[$.

(iv) En conclusion, $\left.\begin{array}{r} f \text{ est dérivable sur } [0,a], \\ f \text{ admet un extremum en } c, \\ c \in]0,a[\end{array}\right\}$ donc $f'(c) = 0$.

Deuxième méthode : (i) Supposons que : $\forall x \in [0\ ;\ a],\ f'(x) < 0$, alors f est décroissante sur $[0\ ;\ a]$, ce qui entraîne que $f(0) \geqslant f(a)$. Or $f(0) = 0$, donc on obtient $f(a) \leqslant 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Par conséquent, il existe $\alpha \in [0\ ;\ a]$ qui vérifie $f'(\alpha) \geqslant 0$.

(ii) Comme $f'(a) > 0$, on peut affirmer que $\alpha \in [0\ ;\ a[$. Ainsi $f'(a) < 0 \leqslant f'(\alpha)$, donc 0 est une valeur intermédiaire de f'. Or f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\ ;\ a]$, donc en particulier f' est continue sur $[\alpha\ ;\ a]$.

Par conséquent, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c dans $[\alpha\ ;\ a[$, donc dans $[0\ ;\ 1]$, qui vérifie $f'(c) = 0$.

Troisième méthode : on procède par l'absurde, supposons que : $\forall x \in [0\ ;\ a],\ f'(x) \neq 0$.

(i) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\ ;\ a]$, donc f' est continue sur $[0\ ;\ a]$, et par le théorème des valeurs intermédiaires $f'([0\ ;\ a])$ est un **intervalle** qui contient $f'(a)$, qui est strictement négatif, et qui ne contient pas 0 par hypothèse, donc un tel intervalle ne peut contenir de réels positifs ou nuls.

On en déduit que : $\forall x \in [0\ ;\ a],\ f'(x) < 0$.

(ii) Par conséquent, f est décroissante sur $[0\ ;\ a]$, ce qui entraîne en particulier que $f(0) \geqslant f(a)$. Or $f(0) = 0$, donc $f(a) \leqslant 0$, ce qui contredit l'hypothèse $f(a) > 0$.

(iii) Donc l'hypothèse : $\forall x \in [0\ ;\ a],\ f'(x) \neq 0$ est fausse, et par conséquent il existe $c \in [0\ ;\ a]$ qui vérifie $f'(c) = 0$.

Une correction de l'exercice 5

énoncé

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori sur $[0, A]$. Le théorème des accroissements finis nous donne alors l'existence de $c \in\ ]0, A[$ qui vérifie

$$f'(c) = \frac{f(A) - f(0)}{A - 0}.$$

Or pour tout réel x, $f'(x) = v + \alpha \times w e^{\alpha x}$, et de plus $f(A) - f(0) =$

$vA + w\left(e^{\alpha A} - 1\right)$ donc

$$v + \alpha \times w e^{\alpha c} = \frac{vA + w\left(e^{\alpha A} - 1\right)}{A}$$

2. On en déduit, en soustrayant A et en divisant par $\alpha \times w$ qui est non-nul

$$e^{\alpha c} = \frac{e^{\alpha A} - 1}{\alpha A}$$

On vérifie que, sachant $A > 0$, $e^{\alpha A} - 1 > 0 \iff \alpha A > 0$, donc que $e^{\alpha A} - 1$ et αA sont de même signe, et finalement que $\frac{e^{\alpha A}-1}{\alpha A} > 0$. Ainsi, en prenant le logarithme, et en divisant de nouveau par α, on obtient

$$c = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{e^{\alpha A} - 1}{\alpha A}\right)$$

3. Pour tout réel A strictement positif, le réel c obtenu ci-dessus est dans $]0, A[$. Autrement dit, pour tout réel A strictement positif

$$0 < \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{e^{\alpha A} - 1}{\alpha A}\right) < A$$

et en divisant par A qui est strictement positif

$$0 < \frac{1}{\alpha A} \ln\left(\frac{e^{\alpha A} - 1}{\alpha A}\right) < 1.$$

Il suffit de remplacer A par x pour se convaincre que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 < g(x) < 1$$

donc que g est bornée sur $]0, +\infty[$.

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en notant $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « si f est une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ qui s'annule $n + 1$ fois sur $[a, b]$, alors $f^{(n)}$ s'annule dans $]a,b[$ ».

- Au rang $n=1$, si f est dérivable sur $[a,b]$ et s'annule 2 fois sur $[a,b]$ en $\alpha<\beta$, alors d'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]\alpha,\beta[\subset]a,b[$ tel que $f(c)=0$, donc f s'annule une fois sur $]a,b[$.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

  Alors, prenons une fonction f dérivable $n+1$ fois sur $[a,b]$ qui s'annule $n+2$ fois sur $[a,b]$ aux points $a_0<\ldots<a_{n+1}$. Alors en appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[a_i,a_{i+1}]$ (avec $i\in[\![0,n]\!]$), on obtient pour tout $i\in[\![0,n]\!]$ un réel $b_i\in]a_i,a_{i+1}[$ tel que $f'(b_i)=0$.

  Ainsi f' est n fois dérivable sur $[a,b]$ et s'annule en $n+1$ réels $b_0<\ldots<b_n$, on peut donc lui appliquer $\mathscr{P}(n)$: $(f')^{(n)}=f^{(n+1)}$ s'annule dans $]a,b[$.

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

On raisonne par l'absurde :

- supposons que P possède (au moins) quatre racines réelles distinctes. Notons les $x_1<x_2<x_3<x_4$.
- Pour tout $i\in\{1,2,3\}$, P_n est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $[x_i,x_{i+1}]$ et dérivable sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$. Comme de plus $\mathrm{P}_n(x_i)=\mathrm{P}(x_{i+1})=0$, le théorème de Rolle nous permet d'affirmer qu'il existe $y_i\in]x_i,x_{i+1}[$ qui vérifie $\mathrm{P}_n'(y_i)=0$.
- On obtient trois réels y_1,y_2,y_3 distincts (car $y_1<x_2<y_2<x_3<y_3$) qui annulent P'.
- Il suffit alors de réitérer le même raisonnement pour obtenir deux racines réelles distinctes pour P''.

  Or $\mathrm{P}''(\mathrm{X})=n(n-1)\mathrm{X}^{n-2}$, donc seul 0 est susceptible d'être racine de P'', autrement dit P_n'' admet au plus une seule racine.
- On obtient donc une contradiction, ce qui nous permet de conclure que P admet au plus trois racines réelles distinctes.

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

1. $f'(a)=0$ donc le graphe de f a une tangente horizontale au point d'abscisse a.

2. *La tête de la conclusion donne l'idée d'appliquer l'égalité des accroissements finis, et comme on nous dit d'utiliser la fonction g, c'est sur g que l'on va appliquer ce théorème.*

les conditions à vérifier sont : $\begin{cases} g \text{ est continue sur } [a\,;b] \\ g \text{ est dérivable sur }]a\,;b[\end{cases}$

et la conclusion est l'existence de $c \in\ ]a\,;b[$ qui vérifie $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

- La fonction f est dérivable sur $[a\,;b]$ donc $x \mapsto f(x)-f(a)$ est dérivable sur $[a\,;b]$, de plus $x \mapsto x-a$ est dérivable **et ne s'annule pas** sur $]a\,;b]$, donc $g : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est dérivable, et donc continue, sur $]a\,;b]$.
- De plus g est continue en a car

$$\begin{aligned}\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} g(x) &= \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \ \textit{(car } f \textit{ est dérivable en } a\textit{)} \\ &= 0 \ \textit{(par hypothèse)}\end{aligned}$$

  et $g(a) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.
- On a justifié que g est dérivable sur $]a;b]$ donc $]a;b[$, et continue sur $[a;b]$. De plus $g(a) = g(b) = 0$ (car $f(a) = f(b)$) donc le théorème de Rolle nous permet d'affirmer qu'il existe $c \in\ ]a\,;b[$ tel que $g'(c) = 0$.
- La fonction g est dérivable sur $]a\,;b]$ avec pour tout $x \in\ ]a\,;b]$, $g'(x) = \frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}$.
  Ainsi, c étant dans $]a\,;b]$,

$$\begin{aligned} g'(c) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{f'(c)(c-a)-(f(c)-f(a))}{(c-a)^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow f'(c)(c-a)-(f(c)-f(a)) = 0\end{aligned}$$

  ce qui donne bien $\boxed{f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}}$.