Colles de la semaine 25. Nom et prénom ?

Questions de cours 1 *Réponses*

Dans toutes les questions, on note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux parties de E, et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Compléter :

1. ➟ Donner la définition de la dimension :

   $\boxed{}$.

   ➟ Si on sait que $\dim(E) = n$, à quelle condition suffisante la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est-elle une base de E ?

   $\boxed{}$.

   ➟ Compléter avec la définition : $E = F \oplus G$ lorsque

   pour tout $x \in E$, $\boxed{}$.

2. Soit u une application entre deux espaces vectoriels E et F. Compléter avec la définition

➟ u est linéaire si, et seulement si,

$\boxed{}$;

(mis à jour le 7 mai 2025)

➟ u est un automorphisme si, et seulement si, $\boxed{}$

3. ➟ $x \in \mathrm{Ker}(u) \Longleftrightarrow \boxed{}$; $x \in \mathbb{I}\mathrm{m}(u) \Longleftrightarrow \boxed{}$;

➟ u est injective si, et seulement si, $\boxed{}$.

➟ Donner la définition du rang d'une matrice :

$\boxed{}$.

➟ Donner la définition du rang d'une application linéaire :

$\boxed{}$.

➟ Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, donner le théorème du rang en précisant à quelle condition sur E ou F on peut l'appliquer :

$\boxed{}$.

➟ À quelle condition sur E ou F suffit-il à u d'être injective, ou bien surjective, pour être bijective ?

$\boxed{}$.

4. L'application linéaire canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'application

$$f : \boxed{} \longrightarrow \boxed{}$$
$$\boxed{} \longmapsto$$

Le rang de f est $\boxed{}$.

5. Compléter : l'ensemble des solutions du système

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{cases}$$

est le noyau de la matrice

$$\boxed{},$$

il a pour base

$$\boxed{}.$$

Exercice 1

Déterminer la dimension et une base du noyau et de l'image de *(l'endomorphisme canoniquement associé à)* la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Montrer que l'application ci-dessous est linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (y-z+2t, 2x-2z-t, x+y+z+t) \end{array}$$

Donner une matrice de f, une base de son noyau, et de son image, puis préciser si elle est injective ou surjective.

Exercice 3

Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1)) \end{array}$ est linéaire.

Donner une matrice de φ, une base de son noyau et de son image, puis préciser si elle est injective, surjective.

Exercice 4

Soit φ définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = \left(X^2 - X - 1\right) P' - (2X-1)P$.
Justifier que φ est bien un endomorphisme de E.
Déterminer son rang, et une base de son noyau.

Exercice 5

Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, et $\lambda \neq \mu$ des scalaires.
Montrer que les sous-espaces $\operatorname{Ker}\left((u - \lambda\,\mathrm{id}_E)^2\right)$ et $\operatorname{Ker}\left((u - \mu\,\mathrm{id}_E)^2\right)$ sont en somme directe.

Exercice 6

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et deux réels a et b tels que $a \neq b$ et

$$(f - a\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \circ (f - b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = 0.$$

Montrer que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}$.

Exercice 7

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Prouver que

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

Exercice 8

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, qui vérifie $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.

1. Établir que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2) = \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathbb{I}\mathrm{m}(f) = \mathrm{E}$.

Réponses aux questions de cours

questions

1. ➟ Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel :

   $\boxed{\text{La dimension d'un espace vectoriel est le cardinal de ses bases.}}$

   ➟ Si on sait que $\dim(\mathrm{E}) = n$, à quelle condition suffisante la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est-elle une base de E ?

   (Sachant que cette famille est formée de vecteurs de E *et qu'elle est de cardinal* n*)*
   il suffit que ce soit une famille libre (ou génératrice) pour être une base de E.

2. Compléter avec la définition :

   $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \Longleftrightarrow$ *(sachant que* F *et* G *sont des s.e.v. de* E*)*
   Pour tout vecteur x de E, **il existe** un couple **unique** $(x_\mathrm{F}, x_\mathrm{G})$ dans $\mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$.

3. Soit u une application entre deux espaces vectoriels E et F :

➟ u est linéaire si, et seulement si,
l'image d'une combinaison linéaire par u est la combinaison linéaire des images :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \;\; \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \;\; u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

➟ u est un automorphisme si, et seulement si,
u est un endomorphisme bijectif, ou si u est un isomorphisme d'un espace vectoriel dans ce même espace vectoriel. ;

➟ $x \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \boxed{u(x) = 0_\mathrm{F}}$; $\;\; x \in \mathbb{I}\mathrm{m}(u) \Leftrightarrow \boxed{\exists \square \in \mathrm{E}, \;\; x = u(\square)}$;

➟ u est injective si, et seulement si, $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \{0_\mathrm{E}\}}$.

➟ Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, donner le théorème du rang en précisant à quelle condition sur E ou F on peut l'appliquer :
dans le cas où E est de dimension finie :

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$$

- À quelle condition sur E ou F suffit-il à u d'être injective, ou bien surjective, pour être bijective?

  $\boxed{\text{dans le cas où E est de dimension finie : } \dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)}$

4. L'application linéaire canoniquement associé à $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'application

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{K}^4 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + 2y - t, -x + y + z + t) \end{array}}$$

   Le rang de f est $\boxed{2}$.

5. Compléter : l'ensemble des solutions du système

$$(\mathscr{S}) : \left\{ \begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{array} \right.$$

   est le noyau de la matrice

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}},$$

   il a pour base

$$\boxed{((0,1,1))}.$$

Une correction de l'exercice 1

énoncé

Notons A cette matrice.

➟ Tout d'abord

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2.\end{aligned}$$

Ainsi l'image de A est de dimension 2.

➟ Les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{I}\mathrm{m}(A)$, et ce sous-espace vectoriel est de dimension 2, donc il suffit d'extraire une famille libre de 2 vecteurs dans la famille des 3 colonnes de A pour avoir une base de $\mathbb{I}\mathrm{m}(A)$: je propose de prendre les deux premières colonnes qui ne sont à l'œil nu pas colinéaires.

Ainsi $\boxed{((-1,1,-2),(2,0,1)) \text{ est une base de } \mathbb{I}\mathrm{m}(A).}$

➟ Par le théorème du rang qui nous dit que $3 = \mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A))$, on sait que le noyau de A est de dimension 1.

Comme on est observateur, on remarque que la somme des colonnes de A est nulle, donc que

$$A \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0,$$

ainsi le vecteur $(1,1,1)$ est dans le noyau, et comme celui-ci est de dimension 1, on en déduit que $\boxed{((1,1,1)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(A).}$

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

- Soient (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) dans $\mathbb{R}^4$, et λ, μ deux réels, alors
$$\begin{aligned} &f\left(\lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2)\right) \\ &= f\left((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)\right) \\ &= \cdots \\ &= \lambda f(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu f(x_2, y_2, z_2, t_2), \end{aligned}$$
donc f est linéaire.
- Notons $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
On remarque que pour tout vecteur $a = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,
$$\begin{aligned} \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}'}(f(a)) = \begin{pmatrix} y - z + 2t \\ 2x - 2z - t \\ x + y + z + t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(a) \end{aligned}$$
or on sait que la matrice de f dans les bases canoniques doit vérifier
$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}'}(f(a)) = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(f) \times \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(a),$$
donc on peut affirmer que la matrice de f dans les bases canoniques est
$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Par des opérations sur les colonnes,
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftrightarrow L_3 \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \\ \end{matrix} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc f est de rang 3, ce qui entraîne par le théorème du rang que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension $\dim(\mathbb{R}^4) - 3 = 1$.

- Trouver le noyau de f revient à résoudre l'équation $f(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$ d'inconnue $a = (x, y, z, t)$, qui équivaut au système homogène de matrice $\underset{\mathscr{C},\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(f)$.

  Grâce aux opérations ci-dessus et au pivot de Gauss,

$$a \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = 3z \\ y = -11z \\ t = 6z \end{cases} \iff a = z \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

  donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$, et ce dernier vecteur forme à lui tout seul une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

- Toujours d'après les opérations sur les lignes vues plus haut, les 3 premières colonnes de $\underset{\mathscr{C},\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(f)$, qui représentent $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ où on note $(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, forment une famille libre, et sont par définition dans $\mathbb{I}\mathrm{m}(f)$. Or on a vu que $\mathbb{I}\mathrm{m}()$ est de dimension $\mathrm{rg}(f) = 3$, donc $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base de $\mathbb{I}\mathrm{m}(f)$.

- Comme $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul, on peut affirmer que f n'est pas injective. Et sachant que $\mathrm{rg}(f) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, f est en revanche surjective.

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

En rédigeant au minimum

- la matrice de φ dans les bases canoniques $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, et

$((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Un polynôme P est dans son noyau si, et seulement si, il admet pour racines 0 et 1, autrement dit s'il est divisible par $X(X-1)$, et comme $\deg(P) \leqslant 3$, cela revient à dire qu'il existe λ, μ réels tels que $P = X(X-1)(\lambda X + \mu) = \lambda X^2(X-1) + \mu X(X-1)$.
  On a prouvé que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Vect}\left(X^2(X-1), X(X-1)\right)$, et ces deux polynômes sont non nuls de degrés différents, donc ils forment une famille libre, donc une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.
  En particulier, φ n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.
- Grâce au théorème du rang, on en déduit que $\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 4 - 2 = 2$.
  Ainsi l'image de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, donc $\mathbb{I}\mathrm{m}(\varphi) = \mathbb{R}^2$.
  On peut en déduire que φ est surjective.

Une correction de l'exercice 4

énoncé

> *La linéarité de φ ne pose pas de problème, mais rien ne permet d'affirmer a priori que $\varphi(P)$ est bien dans E, en effet si $\deg P = n$, alors $\left(X^2 - X - 1\right) P'$ et $(2X-1)P$ sont tous les deux de degré $n+1$.*

Commençons par la linéarité, $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(X^2 - X - 1\right)(\lambda P + Q)' - (2X-1)(\lambda P + Q) = \lambda\left[\left(X^2 - X - 1\right)P' - (2X-1)P\right] + \left[\left(X^2 - \right.\right.$$

Il suffit donc de vérifier que $\varphi(1), \varphi(X)$ et $\varphi\left(X^2\right)$ ont bien dans $\mathbb{R}_2[X]$, ainsi par linéarité, on aura $\varphi\left(aX^2 + bX + c\right) \in \mathbb{R}_2[X]$. Or, enb développant, on a

$$\varphi(1) = -2X + 1, \varphi(X) = -X^2 - 1 \text{ et } \varphi\left(X^2\right) = -X^2 - 2X$$

On a ensuite

$$\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\left(\varphi(1), \varphi(X), \varphi\left(X^2\right)\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(X)\varphi\left(X^2\right) & \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{C_2+C_1} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\operatorname{rg}\varphi = 2($ et $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\left(-2X+1, -X^2-1\right)$), d'où par le théorème du rang, $\dim\ker f = 3-2 = 1$. Or $\varphi(X) + \varphi(1) = \varphi\left(X^2\right)$, ce qui donne

$$\varphi\left(X^2 - X - 1\right) = 0 \Longrightarrow X^2 - X - 1 \in \ker\varphi \Longrightarrow \operatorname{Vect}\left(X^2 - X - 1\right) \subset \ker\varphi$$

Par égalité des dimensions

$$\ker\varphi = \operatorname{Vect}\left(X^2 - X - 1\right)$$

Une correction de l'exercice 5

énoncé

Il suffit de montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul.
Soit $x \in \operatorname{Ker}\left((u-\lambda\,\mathrm{id}_E)^2\right) \cap \operatorname{Ker}\left((u-\mu\,\mathrm{id}_E)^2\right)$.
Alors

$$\begin{aligned} (u-\lambda\,\mathrm{id}_E)^2(x) = 0_E, \text{ donc } &\quad \left(u^2 - 2\lambda u + \lambda^2\,\mathrm{id}_E\right)(x) = 0_E, \\ \text{d'où } &\quad u^2(x) - 2\lambda\,u(x) + \lambda^2\,x = 0_E. \end{aligned}$$

Les puissances d'endomorphismes, bien sûr au sens de la composition, se développent comme des produits, mais il faut bien garder les termes dans l'ordre initial car la composition n'est pas commutative ! Pour rentrer dans tous les détails :

$$\begin{aligned} (u-\lambda\,\mathrm{id}_E)^2 &= (u-\lambda\,\mathrm{id}_E)\circ(u-\lambda\,\mathrm{id}_E) \\ &= u^2 - \lambda\,u\circ\mathrm{id}_E - \lambda\,\mathrm{id}_E\circ u + (\lambda\,\mathrm{id}_E)\circ(\lambda\,\mathrm{id}_E) \\ &= u^2 - \lambda\,u - \lambda\,u + \lambda^2\,\mathrm{id}_E^2 \\ &= u^2 - 2\lambda\,u + \lambda^2\,\mathrm{id}_E\,. \end{aligned}$$

et de même

$$u^2(x) - 2\mu u(x) + \mu^2 x = 0_E.$$

En particulier, la différence de ces deux égalités donne

$$2(\lambda-\mu)u(x) = (\lambda-\mu)(\lambda+\mu)x,$$

et comme $\lambda \neq \mu$, on peut multiplier par $\frac{1}{\lambda-\mu}$, ce qui donne

$$2u(x) = (\lambda+\mu)x, \text{ autrement dit } u(x) = \frac{\lambda+\mu}{2}x$$

d'où en composant par u :

$$u^2(x) = \frac{\lambda+\mu}{2}u(x) = \left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^2 x.$$

Si on remplace ces expressions de $u^2(x)$ et $u(x)$ dans l'égalité

$$u^2(x) - 2\lambda u(x) + \lambda^2 x = 0_{\mathrm{E}},$$

on obtient

$$\left(\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^2 - 2\lambda\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \lambda^2\right)x = 0_{\mathrm{E}},$$

ce qui donne après calculs

$$\frac{(\lambda-\mu)^2}{4}x = 0_{\mathrm{E}}.$$

Or $\lambda \neq \mu$, donc $\frac{(\lambda-\mu)^2}{4} \neq 0$, d'où $x = 0_{\mathrm{E}}$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 6

énoncé

Tout d'abord, on remarque que

$$(f - a\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \circ (f - b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}},$$

et

$$(f - b\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \circ (f - a\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}},$$

donc l'énoncé nous donne

$$(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E) = 0,$$

mais aussi

$$(f - b\,\mathrm{id}_E) \circ (f - a\,\mathrm{id}_E) = 0.$$

1. Pour montrer que

$$\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) = E.$$

on va montrer que

(a) $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$,

(b) $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) = E$.

Dans cet exercice, on ne sait pas si E est de dimension finie, donc on ne peut pas utiliser les dimensions, ni la concaténation des bases.

1. ➟ Tout d'abord $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc ils contiennent le vecteur nul, d'où $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) \supset \{0_E\}$.

   Quand F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, l'inclusion $\{0_E\} \subset F \cap G$ est tellement évidente qu'on n'en parle même pas la plupart du temps. Ainsi montrer l'égalité $F \cap G = \{0_E\}$ consiste en général à prendre x dans $F \cap G$ et à montrer que $x = 0_E$.

   ➟ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$, alors

$$x \in \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E), \text{ donc } f(x) = ax,$$
$$x \in \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E), \text{ donc } f(x) = bx.$$

> *Bien enregistrer que*
> $$x \in \operatorname{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_E) \Longleftrightarrow u(x)=\lambda x.$$

donc $ax=bx$, d'où $(a-b)x=0_E$. Or $a\neq b$, donc on peut conclure que $x=0_E$.

➟ On a donc établi que

$$\operatorname{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_E)\cap\operatorname{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_E)=\{0_E\}.$$

2. ➟

> *Quand* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E*, l'inclusion* $F+G\subset E$ *est tellement évidente qu'on n'en parle même pas la plupart du temps.*
> *Ainsi, montrer l'égalité* $F+G=E$ *consiste en général à prendre* x *dans* E *et à montrer que* $x\in F+G$*, autrement dit à montrer qu'il existe* x_F *dans* F*, et* x_G *dans* G *tels que* $x=x_F+x_G$*.*

Soit $x\in E$, cherchons y dans $\operatorname{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_E)$, et z dans $\operatorname{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_E)$ tels que $x=y+z$.

Phase d'analyse : supposons qu'on dispose de y dans $\operatorname{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_E)$, et z dans $\operatorname{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_E)$ tels que $x=y+z$. Alors en composant par f, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y+z)\\ &= f(y)+f(z) \quad \textit{(car } f \textit{ est linéaire)}\\ &= ay+bz \quad \textit{(car } y\in\operatorname{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_E)\textit{, et } z\in\operatorname{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_E)\textit{)} \end{aligned}$$

On obtient les égalités (L1) : $ay+bz=f(x)$ et (L2) : $y+z=x$. En effectuant $(L1)-a(L2)$, on obtient $(b-a)z=f(x)-ax$, puis comme $a \neq b$,

$$\begin{aligned} z &= \frac{f(x) - ax}{b-a} \quad \textit{(cette écriture est en vérité impropre, on ne divise pas un vecteur par un scalaire)} \\ &= \frac{1}{b-a}(f(x) - ax). \end{aligned}$$

De la même manière on obtient

$$y = \frac{1}{a-b}(f(x) - bx).$$

La phase d'analyse est achevée : on a donc trouvé les expressions nécessaires, ou plus prosaïquement les seules expressions possibles, pour y et z. La phase de synthèse consiste à vérifier parmi ces valeurs nécessaires (ici il n'y a pas le choix) lesquelles sont bien solutions de notre problème.

Phase de synthèse : montrons que les vecteurs $y = \frac{1}{a-b}(f(x) - bx)$ et $z = \frac{1}{b-a}(f(x) - ax)$ vérifient bien :

$$\begin{cases} y \in \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \\ z \in \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) \\ x + y = z. \end{cases}$$

Ici la bonne idée est de remarquer que

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E)(x) \\ \textit{et } z &= \frac{1}{b-a}(f - a\,\mathrm{id}_E)(x). \end{aligned}$$

- Tout d'abord

$$\begin{aligned}(f-a\,\mathrm{id}_E)(y) &= (f-a\,\mathrm{id}_E)\left(\frac{1}{a-b}(f-b\,\mathrm{id}_E)(x)\right)\\ &= \frac{1}{a-b}(f-a\,\mathrm{id}_E)((f-b\,\mathrm{id}_E)(x))\\ &= \frac{1}{a-b}\underbrace{((f-a\,\mathrm{id}_E)\circ(f-b\,\mathrm{id}_E))}_{=0}(x)\\ &= 0_E \ \text{ donc } y\in \mathrm{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_E).\end{aligned}$$

- On montre de même que $z\in\mathrm{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_E)$, en remarquant en passant que

$$\begin{aligned}(f-b\,\mathrm{id}_E)\circ(f-a\,\mathrm{id}_E) &= f^2-(a+b)f+ab\,\mathrm{id}_E\\ &= (f-a\,\mathrm{id}_E)\circ(f-b\,\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}.\end{aligned}$$

- Enfin,

$$\begin{aligned}y+z &= \frac{1}{a-b}(f(x)-bx)+\frac{1}{b-a}(f(x)-ax)\\ &= \frac{1}{a-b}(f(x)-bx)-\frac{1}{a-b}(f(x)-ax)\\ &= \frac{1}{a-b}(f(x)-bx-f(x)+ax)\\ &= \frac{1}{a-b}((a-b)x)\\ &= x \ \text{ C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

On a donc prouvé que $\mathrm{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_E)+\mathrm{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_E)=E$.

On peut enfin conclure que $\mathrm{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_E)=E$.

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

➟ Supposons que $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$, et montrons que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)$. C'est une double-inclusion.

- La première $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2)$ est évidente car si $x \in \operatorname{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0$, donc a fortiori $f(f(x)) = 0$, c'est-à-dire $f^2(x) = 0$, ce qui prouve que $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$.
- Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$, alors $f^2(x) = 0$, c'est-à-dire $f(f(x)) = 0$. Ainsi $f(x) \in \operatorname{Ker}(f)$.

  Mais par définition, $f(x)$ est aussi dans $\mathbb{I}\mathrm{m}(f)$, donc $f(x)$ est dans $\operatorname{Ker}(f) \cap \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$.

  Or on a supposé que cette intersection est réduite au vecteur nul, donc $f(x) = 0$, et on peut conclure que $x \in \operatorname{Ker}(f)$, C.Q.F.D.

➟ Supposons que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$, et montrons que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Soit $x \in \mathbb{I}\mathrm{m}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$, montrons que $x = 0$.

Le vecteur x est dans $\mathbb{I}\mathrm{m}(f)$ donc il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(y)$, mais il est aussi dans $\operatorname{Ker}(f)$, donc $f(x) = 0$. Ainsi $f(f(y)) = f^2(y) = 0$, donc $y \in \operatorname{Ker}(f^2)$.

Or on a supposé que $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$, donc $y \in \operatorname{Ker}(f)$, d'où $f(y) = 0$. Ainsi, comme $x = f(y)$, on a bien prouvé que $x = 0$.

Une correction de l'exercice 8

énoncé

1. On suppose donc que $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$.

   ➟ Montrons que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2) = \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$.

   - D'une part, si $y \in \mathbb{I}\mathrm{m}(f^2)$, alors il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x))$, donc en particulier y est de la forme $y = f(\square)$, ce qui prouve que $y \in \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$.

     Ainsi $\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2) \subset \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$.
   - De plus, on sait que $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$, donc le rang étant la dimension de l'image, $\dim(\mathbb{I}\mathrm{m}(f)) = \dim(\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2))$.
   - L'inclusion et l'égalité des dimensions permettent de conclure que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f) = \mathbb{I}\mathrm{m}(f^2)$.

   ➟ Montrons que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f)$.

   - D'une part, si $x \in \operatorname{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_{\mathrm{E}}$, donc en particulier $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}}$, d'où $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2)$.

     Ainsi $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2)$.

> *Les inclusions* $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ *et* $\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2) \subset \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$ *sont vraies pour tout endomorphisme* f*. On peut même montrons que les* $\mathrm{Ker}(f^k)$ *et les* $\mathbb{I}\mathrm{m}(f^k)$ *forment des suites croissante pour l'une, et décroissante pour l'autre*
>
> $$\mathrm{Ker}(f) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \subset \cdots,$$
> $$\mathbb{I}\mathrm{m}(f) \supset \cdots \supset \mathbb{I}\mathrm{m}(f^k) \supset \mathbb{I}\mathrm{m}(f^{k+1}) \supset \cdots.$$

- De plus, on sait que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$, donc par le théorème du rang appliqué aux endomorphismes f et f^2, on obtient

$$\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f^2) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2)),$$

  donc comme on sait que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$, on en déduit que $\mathrm{Ker}(\mathbb{I}\mathrm{m}(f)) = \mathrm{Ker}(\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2))$.
- L'inclusion et l'égalité des dimensions permettent de conclure que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

2. D'une part, grâce au théorème du rang, on a directement

$$\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{I}\mathrm{m}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

   D'autre part, montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathbb{I}\mathrm{m}(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$, alors $f(x) = 0$ et il existe $w \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(w)$.
   Ainsi $f^2(w) = f(f(w)) = f(x) = 0_{\mathrm{E}}$ donc $w \in \mathrm{Ker}(f)$, or $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, donc $w \in \mathrm{Ker}(f)$, et par conséquent $x = f(w) = 0_{\mathrm{E}}$, C.Q.F.D.