Questions de cours 1 *Réponses*

Dans toutes les questions, on note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux parties de E, et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Compléter :

1. Soit u une application entre deux espaces vectoriels E et F. Compléter avec la définition
   - u est linéaire si, et seulement si,
   - $x \in \operatorname{Ker}(u) \iff$; $x \in \mathbb{I}\mathrm{m}(u) \iff$;
   - u est injective si, et seulement si, .
2. - Donner la définition du rang d'une matrice :
   - Donner la définition du rang d'une application linéaire :
   - Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, donner le théorème du rang en précisant à quelle condition sur E ou F on peut l'appliquer :
   - À quelle condition sur E ou F suffit-il à u d'être injective, ou bien surjective, pour être bijective ?

3. On considère l'application linéaire :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & c-a+(c-b)X+(b-a)X^2. \end{array}$$

Compléter :

- La matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est :

- une base de $\operatorname{Ker}(u)$ est .

- une base de $\mathbb{I}\mathrm{m}(u)$ est .

4. - *(Compléter)* $E = F \oplus G$ lorsque pour tout $x \in E$,

- Pour tout $x \in E$, comment appelle-t-on alors les vecteurs $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$?

- À quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il un projecteur p sur F parallèlement à G et un projecteur q sur G parallèlement à F ?

- Par quelle égalité p et q sont-ils alors liés ?

5. Soit p un endomorphisme de E.
   - À quelle propriété caractéristique p est-il un projecteur ?
   - Qu'est-ce qu'une base « adaptée à p » ?
   - Quelle est la matrice de p dans une telle base ?

Exercice 1

Montrer que l'application ci-dessous est linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (y-z+2t, 2x-2z-t, x+y+z+t) \end{array}$$

Donner une matrice de f, son noyau, et son image, puis préciser si elle est injective ou surjective.

Exercice 2

Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1)) \end{array}$ est linéaire.

Donner une matrice de φ, son noyau, son image, puis préciser si elle est injective, surjective.

Exercice 3

Déterminer la dimension et une base du noyau et de l'image de *(l'endomorphisme canoniquement associé à)* la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Soit φ définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = \left(X^2 - X - 1\right)P' - (2X-1)P$.
Justifier que φ est bien un endomorphisme de E.
Déterminer son rang, et une base de son noyau.

Exercice 5

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, et l'application $f : M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto f(M) = AM$.

1. Pourquoi f est-il un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
4. Déterminer une base de $\mathbb{I}\mathrm{m}(f)$.
5. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$?

Exercice 6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$. On suppose que pour toute *forme linéaire* f sur E, c'est-à-dire toute application linéaire f de E dans $\mathbb{R}$:

$$f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Exercice 7

Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$.
Montrer les inclusions $\mathbb{I}\mathrm{m}(g \circ f) \subset \mathbb{I}\mathrm{m}(g)$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

Exercice 8

Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$.
Montrer que $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ si, et seulement si, $\mathbb{I}\mathrm{m}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 9 – Oral CCINP - PC

1. Montrer que l'ensemble V des suites complexes vérifiant $v_{n+3} = v_{n+2} + v_n$ est un C-espace vectoriel.
2. Montrer que $P(X) = X^3 - X^2 - 1$ admet une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées.
3. Trouver les suites géométriques de V.
4. Montrer que $\phi(v) = (v_0, v_1, v_3)$ définit un isomorphisme de V dans $\mathbb{C}^3$.
5. En déduire la dimension et une base de V.

Exercice 10

Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3, tel que $f^3 + f$ est l'endomorphisme nul de E.

1. Montrer que $f^2 \neq \mathrm{id}_E$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$.
3. Montrer que si x est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$, $(x, f(x))$ en est une famille libre.
4. Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition de $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \neq \mu$ des scalaires.
Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}\left((u - \lambda\,\mathrm{id}_E)^2\right)$ et $\mathrm{Ker}\left((u - \mu\,\mathrm{id}_E)^2\right)$ sont en somme directe.

Exercice 12

Soit p et q deux projecteurs de E qui commutent entre eux.
Montrer que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 13

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et deux réels a et b tels que $a \neq b$ et

$$(f - a\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \circ (f - b\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) = 0.$$

Montrer que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.

Exercice 14

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, qui vérifie $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.

1. Établir que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2) = \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathbb{I}\mathrm{m}(f) = \mathrm{E}$.

Exercice 15

Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$, et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.
On pose pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - \mathrm{P}'$.

1. Démontrer que f est bijectif.
2. Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$. Trouver P tel que $f(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$.
   Indication : si $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, quel est le polynôme $\mathrm{P}^{(n+1)}$?

Réponses aux questions de cours *questions*

1. ➟ Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel :

   $\boxed{\text{La dimension d'un espace vectoriel est le cardinal de ses bases.}}$

   ➟ Si on sait que $\dim(\mathrm{E}) = n$, à quelle condition suffisante la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est-elle une base de E ?

   (Sachant que cette famille est formée de vecteurs de E *et qu'elle est de cardinal* n*)*
   il suffit que ce soit une famille libre (ou génératrice) pour être une base de E.

2. Compléter avec la définition :

   $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \Longleftrightarrow$ *(sachant que* F *et* G *sont des* s.e.v. *de* E*)*
   Pour tout vecteur x de E, **il existe** un couple **unique** $(x_\mathrm{F}, x_\mathrm{G})$ dans $\mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$.

3. Soit u une application entre deux espaces vectoriels E et F :

➟ u est linéaire si, et seulement si,

l'image d'une combinaison linéaire par u est la combinaison linéaire des images :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \ \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \ \ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

➟ u est un automorphisme si, et seulement si,

u est un endomorphisme bijectif, ou si u est un isomorphisme d'un espace vectoriel dans ce même espace vectoriel. ;

➟ $x \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \boxed{u(x) = 0_\mathrm{F}}$; $\ x \in \mathbb{I}\mathrm{m}(u) \Leftrightarrow \boxed{\exists \square \in \mathrm{E}, \ \ x = u(\square)}$;

➟ u est injective si, et seulement si, $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \{0_\mathrm{E}\}}$.

➟ Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, donner le théorème du rang en précisant à quelle condition sur E ou F on peut l'appliquer :

dans le cas où E est de dimension finie :

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$$

➟ À quelle condition sur E ou F suffit-il à u d'être injective, ou bien surjective, pour être bijective ?

dans le cas où E est de dimension finie :

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$$

4. L'application linéaire canoniquement associé à $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'application

$$\boxed{\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{K}^4 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+2y-t, -x+y+z+t) \end{array}}$$

Le rang de f est $\boxed{2}$.

5. Compléter : l'ensemble des solutions du système

$$(\mathscr{S}) : \left\{ \begin{array}{c} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{array} \right.$$

est le noyau de la matrice

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}},$$

il a pour base

$$\boxed{((0,1,1))}.$$

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

➟ Soient (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) dans $\mathbb{R}^4$, et λ, μ deux réels, alors

$$\begin{aligned} & f(\lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2)) \\ &= f\Big((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)\Big) \\ &= \cdots \\ &= \lambda f(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu f(x_2, y_2, z_2, t_2), \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

➟ Notons $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
On remarque que pour tout vecteur $a=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,

$$\underset{\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(f(a))=\begin{pmatrix} y-z+2t\\ 2x-2z-t\\ x+y+z+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\2&0&-2&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\2&0&-2&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\times\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(a)$$

or on sait que la matrice de f dans les bases canoniques doit vérifier

$$\underset{\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(f(a))=\underset{\mathscr{C},\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(f)\times\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(a),$$

donc on peut affirmer que la matrice de f dans les bases canoniques est

$$\underset{\mathscr{C},\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(f)=\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\2&0&-2&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

➟ Par des opérations sur les colonnes,

$$\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\2&0&-2&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\longleftrightarrow L_3\\ \\ L_2\leftarrow L_2-2L_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-4&-3\\0&1&-1&2\end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix}L_2\longleftrightarrow L_3\\ \\ L_3\leftarrow L_3+2L_2\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&-6&1\end{pmatrix},$$

donc f est de rang 3, ce qui entraîne par le théorème du rang que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension $\dim\left(\mathbb{R}^4\right)-3=1$.

➟ Trouver le noyau de f revient à résoudre l'équation $f(a)=0_{\mathbb{R}^3}$ d'inconnue $a=(x,y,z,t)$, qui équivaut au système homogène de matrice $\underset{\mathscr{C},\mathscr{C}'}{\mathrm{Mat}}(f)$.

Grâce aux opérations ci-dessus et au pivot de Gauss,

$$a \in \operatorname{Ker}(f) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} x &= 3z \\ y &= -11z \\ t &= 6z \end{aligned} \right. \iff a = z \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$, et ce dernier vecteur forme à lui tout seul une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

- Toujours d'après les opérations sur les lignes vues plus haut, les 3 premières colonnes de $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(f)$, qui représentent $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ où on note $(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, forment une famille libre, et sont par définition dans $\operatorname{Im}(f)$. Or on a vu que $\operatorname{Im}()$ est de dimension $\operatorname{rg}(f) = 3$, donc $\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.
- Comme $\operatorname{Ker}(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul, on peut affirmer que f n'est pas injective. Et sachant que $\operatorname{rg}(f) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$, f est en revanche surjective.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

En rédigeant au minimum

- la matrice de φ dans les bases canoniques $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, et $\big((1,0),(0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Un polynôme P est dans son noyau si, et seulement si, il admet pour racines 0 et 1, autrement dit s'il est divisible par $X(X-1)$, et comme $\deg(P) \leqslant$

3, cela revient à dire qu'il existe λ, μ réels tels que $P = X(X-1)(\lambda X+\mu) = \lambda X^2(X-1)+\mu X(X-1)$.

On a prouvé que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(X^2(X-1), X(X-1)\right)$, et ces deux polynômes sont non nuls de degrés différents, donc ils forment une famille libre, donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

En particulier, φ n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

- Grâce au théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 4-2 = 2$.

  Ainsi l'image de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, donc $\mathbb{I}\mathrm{m}(\varphi) = \mathbb{R}^2$.

  On peut en déduire que φ est surjective.

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

Notons A cette matrice.

- Tout d'abord

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

  Ainsi l'image de A est de dimension 2.

- Les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{I}\mathrm{m}(A)$, et ce sous-espace vectoriel est de dimension 2, donc il suffit d'extraire une famille libre de 2 vecteurs dans la famille des 3 colonnes de A pour avoir une base de $\mathbb{I}\mathrm{m}(A)$: je propose de prendre les deux premières colonnes qui ne sont à l'œil nu pas colinéaires.

  Ainsi $\boxed{\left((-1,1,-2),(2,0,1)\right) \text{ est une base de } \mathbb{I}\mathrm{m}(A).}$

- Par le théorème du rang qui nous dit que $3 = \mathrm{rg}(A)+\dim(\mathrm{Ker}(A))$, on sait que le noyau de A est de dimension 1.

Comme on est observateur, on remarque que la somme des colonnes de A est nulle, donc que

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ainsi le vecteur $(1,1,1)$ est dans le noyau, et comme celui-ci est de dimension 1, on en déduit que $\boxed{((1,1,1)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(A).}$

Une correction de l'exercice 4

énoncé

La linéarité de φ ne pose pas de problème, mais rien ne permet d'affirmer a priori que $\varphi(P)$ est bien dans E, en effet si $\deg P = n$, alors $(X^2 - X - 1)\,P'$ et $(2X-1)P$ sont tous les deux de degré $n+1$.

Commençons par la linéarité : pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \left(X^2 - X - 1\right)(\lambda P + Q)' - (2X-1)(\lambda P + Q) = \lambda\left[\left(X^2 - X - 1\right)P' - (2X\right.$$

Il suffit donc de vérifier que $\varphi(1), \varphi(X)$ et $\varphi\left(X^2\right)$ ont bien dans $\mathbb{R}_2[X]$, ainsi par linéarité, on aura $\varphi\left(aX^2 + bX + c\right) \in \mathbb{R}_2[X]$. Or, enb développant, on a

$$\varphi(1) = -2X + 1, \varphi(X) = -X^2 - 1 \text{ et } \varphi\left(X^2\right) = -X^2 - 2X$$

On a ensuite

$$\mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\left(\varphi(1), \varphi(X), \varphi\left(X^2\right)\right) = \mathrm{rg}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi\left(X^2\right) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}_{C_2+C_1} = \mathrm{rg}\left(\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

Ainsi $\mathrm{rg}\,\varphi = 2($ et $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}\left(-2X+1, -X^2-1\right)$), d'où par le théorème du rang, $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$. Or $\varphi(X) +\varphi(1) = \varphi\left(X^2\right)$, ce qui donne

$$\varphi\left(X^2 - X - 1\right) = 0 \Longrightarrow X^2 - X - 1 \in \ker\varphi \Longrightarrow \mathrm{Vect}\left(X^2 - X - 1\right) \subset \ker\varphi$$

Par égalité des dimensions

$$\ker\varphi = \mathrm{Vect}\left(X^2 - X - 1\right)$$

Une correction de l'exercice 5

énoncé

CCINP - MP

1. La linéarité de f provient de la bilinéarité du produit matriciel, en particulier de sa linéarité à droite.
2. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.

   Ainsi

$$M \in \operatorname{Ker}(f) \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= -2c \\ b &= -2d \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On en déduit que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(M_1, M_2)$, avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, M_1 et M_2 sont non colinéaires ; donc (M_1, M_2) est libre, donc (M_1, M_2) est une base de $\operatorname{Ker} f$.
3. Son noyau n'est pas réduit au vecteur nul, donc f n'est pas injectif.
   Or f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc f n'est pas surjectif.
4. Par le théorème du rang, $\operatorname{rg}(f) = 2$.
   Prenons $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   Ces deux matrices sont dans $\mathbb{I}\mathrm{m}(f)$ par définition, et ne sont pas colinéaires, donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\operatorname{Im} f$.
   Comme $\dim(\mathbb{I}\mathrm{m}(f)) = \operatorname{rg}(f) = 2$, on conclut que (M_3, M_4) est une base de $\operatorname{Im} f$.
5. Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$\det_{\mathscr{C}}(M_1, M_2, M_3, M_4) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_4 \leftarrow C_4 + C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 1/2 C_2}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$$

donc $(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, ainsi, par concaténation des bases, $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Une correction de l'exercice 6

énoncé

Supposons par l'absurde que $(e_1, \ldots, e_n)$ n'est pas une base de E, comme le cardinal de cette famille est égal à $\dim(\mathrm{E})$, elle n'est génératrice de E, ainsi le sous-espace vectoriel $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ n'est pas égal à E.
Il existe alors un sous-espace vectoriel G supplémentaire de F dans G, de dimension au moins 1. On peut alors définir une forme linéaire f sur E telle que f est nulle sur F, et non nulle sur G.
Mais comme f est nulle sur F, en particulier elle vérifie $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0$, donc par hypothèse f est l'application nulle, ce qui contredit le fait qu'elle est non nulle sur G.

Une correction de l'exercice 7

énoncé

$\mathbb{I}\mathrm{m}(g \circ f) = (g \circ f)(\mathrm{E}) = g(f(\mathrm{E}))$, or $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$, donc $g(f(\mathrm{E})) \subset g(\mathrm{E}) = \mathbb{I}\mathrm{m}(g)$, d'où $\mathbb{I}\mathrm{m}(g \circ f) \subset \mathbb{I}\mathrm{m}(g)$.
Autre méthode :

> *Méthode fondamentale : pour montrer une inclusion d'un ensemble* F *dans un ensemble* G*, on prend un élément quelconque de* F*, et on prouve qu'il est dans* G.

Soit $\boxed{y \in \mathbb{I}\mathrm{m}(g \circ f)}$, alors il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, donc y est de la forme $g(\square)$, où $\square \in \mathrm{E}$, ce qui prouve que $\boxed{y \in \mathbb{I}\mathrm{m}(g)}$. Par conséquent, $\mathbb{I}\mathrm{m}(g \circ f) \subset \mathbb{I}\mathrm{m}(g)$.

Une correction de l'exercice 8

énoncé

- Supposons que $g \circ f$ est l'endomorphisme nul, et montrons que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Pour cela prenons $y \in \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$, et montrons que $y \in \mathrm{Ker}(g)$.
  Par définition de l'image de f, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$, d'où
  $$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0_{\mathrm{E}},$$
  donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$, C.Q.F.D.

- Réciproquement, supposons que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$, et montrons que $g \circ f = 0$, autrement dit montrons que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $(g \circ f)(x) = 0$, c'est-à-dire $g\big(f(x)\big) = 0$.
  Soit $x \in \mathrm{E}$, par définition $f(x) \in \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$, donc par hypothèse $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$, d'où $g\big(f(x)\big) = 0$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 11 *énoncé*

Il suffit de montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\left((u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})^2\right) \cap \mathrm{Ker}\left((u - \mu\,\mathrm{id}_\mathrm{E})^2\right)$.
Alors

$$(u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})^2(x) = 0_\mathrm{E}, \text{ donc } \left(u^2 - 2\lambda u + \lambda^2\,\mathrm{id}_\mathrm{E}\right)(x) = 0_\mathrm{E},$$
$$\text{d'où } u^2(x) - 2\lambda\,u(x) + \lambda^2\,x = 0_\mathrm{E}.$$

Les puissances d'endomorphismes, bien sûr au sens de la composition, se développent comme des produits, mais il faut bien garder les termes dans l'ordre initial car la composition n'est pas commutative ! Pour rentrer dans tous les détails :

$$\begin{aligned}(u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})^2 &= (u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \circ (u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \\ &= u^2 - \lambda\,u \circ \mathrm{id}_\mathrm{E} - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E} \circ u + (\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \circ (\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \\ &= u^2 - \lambda\,u - \lambda\,u + \lambda^2\,\mathrm{id}_\mathrm{E}^2 \\ &= u^2 - 2\lambda\,u + \lambda^2\,\mathrm{id}_\mathrm{E}.\end{aligned}$$

et de même

$$u^2(x) - 2\mu u(x) + \mu^2 x = 0_\mathrm{E}.$$

En particulier, la différence de ces deux égalités donne

$$2(\lambda - \mu)u(x) = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu)x,$$

et comme $\lambda \neq \mu$, on peut multiplier par $\frac{1}{\lambda - \mu}$, ce qui donne

$$2u(x) = (\lambda + \mu)x, \text{ autrement dit } u(x) = \frac{\lambda + \mu}{2}x$$

d'où en composant par u :

$$u^2(x) = \frac{\lambda+\mu}{2} u(x) = \left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^2 x.$$

Si on remplace ces expressions de $u^2(x)$ et $u(x)$ dans l'égalité

$$u^2(x) - 2\lambda u(x) + \lambda^2 x = 0_E,$$

on obtient

$$\left(\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^2 - 2\lambda\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \lambda^2\right) x = 0_E,$$

ce qui donne après calculs

$$\frac{(\lambda-\mu)^2}{4} x = 0_E.$$

Or $\lambda \neq \mu$, donc $\frac{(\lambda-\mu)^2}{4} \neq 0$, d'où $x = 0_E$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 13

énoncé

Tout d'abord, on remarque que

$$(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E) = f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{id}_E,$$

et

$$(f - b\,\mathrm{id}_E) \circ (f - a\,\mathrm{id}_E) = f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{id}_E,$$

donc l'énoncé nous donne

$$(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E) = 0,$$

mais aussi

$$(f - b\,\mathrm{id}_E) \circ (f - a\,\mathrm{id}_E) = 0.$$

1. Pour montrer que

$$\operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) = E.$$

on va montrer que

(a) $\operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \cap \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$,
(b) $\operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) + \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) = E.$

Dans cet exercice, on ne sait pas si E est de dimension finie, donc on ne peut pas utiliser les dimensions, ni la concaténation des bases.

1. ➟ Tout d'abord $\operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc ils contiennent le vecteur nul, d'où $\operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \cap \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) \supset \{0_E\}$.

   Quand F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, l'inclusion $\{0_E\} \subset F \cap G$ est tellement évidente qu'on n'en parle même pas la plupart du temps. Ainsi montrer l'égalité $F \cap G = \{0_E\}$ consiste en général à prendre x dans $F \cap G$ et à montrer que $x = 0_E$.

   ➟ Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \cap \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$, alors

$$x \in \operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E), \text{ donc } f(x) = ax,$$
$$x \in \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E), \text{ donc } f(x) = bx.$$

   Bien enregistrer que

$$x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \Longleftrightarrow u(x) = \lambda x.$$

   donc $ax = bx$, d'où $(a-b)x = 0_E$. Or $a \neq b$, donc on peut conclure que $x = 0_E$.

   ➟ On a donc établi que

$$\operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \cap \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) = \{0_E\}.$$

2. ➟ *Quand F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, l'inclusion $\mathrm{F}+\mathrm{G}\subset\mathrm{E}$ est tellement évidente qu'on n'en parle même pas la plupart du temps.*
Ainsi, montrer l'égalité $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{E}$ consiste en général à prendre x dans E et à montrer que $x\in\mathrm{F}+\mathrm{G}$, autrement dit à montrer qu'il existe x_F dans F, et x_G dans G tels que $x=x_\mathrm{F}+x_\mathrm{G}$.

Soit $x\in\mathrm{E}$, cherchons y dans $\mathrm{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$, et z dans $\mathrm{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$ tels que $x=y+z$.

Phase d'analyse : supposons qu'on dispose de y dans $\mathrm{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$, et z dans $\mathrm{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$ tels que $x=y+z$. Alors en composant par f, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y+z) \\ &= f(y)+f(z) \quad \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ &= ay+bz \quad \textit{(car } y\in\mathrm{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_\mathrm{E}), \textit{ et } z\in\mathrm{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_\mathrm{E})\textit{)} \end{aligned}$$

On obtient les égalités (L1) : $ay+bz=f(x)$ et (L2) : $y+z=x$. En effectuant $(\mathrm{L1})-a(\mathrm{L2})$, on obtient $(b-a)z=f(x)-ax$, puis comme $a\neq b$,

$$\begin{aligned} z &= \frac{f(x)-ax}{b-a} \quad \textit{(cette écriture est en vérité impropre, on ne divise pas un vecteur par un scalaire)} \\ &= \frac{1}{b-a}(f(x)-ax). \end{aligned}$$

De la même manière on obtient

$$y=\frac{1}{a-b}(f(x)-bx).$$

La phase d'analyse est achevée : on a donc trouvé les expressions nécessaires, ou plus prosaïquement les seules expressions possibles, pour y et z. La phase de synthèse consiste à vérifier parmi ces valeurs nécessaires (ici il n'y a pas le choix) lesquelles sont bien solutions de notre problème.

Phase de synthèse : montrons que les vecteurs $y = \frac{1}{a-b}(f(x) - bx)$ et $z = \frac{1}{b-a}(f(x) - ax)$ vérifient bien :

$$\begin{cases} y \in \operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \\ z \in \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E) \\ x + y = z. \end{cases}$$

Ici la bonne idée est de remarquer que

$$y = \frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E)(x)$$
$$\text{et } z = \frac{1}{b-a}(f - a\,\mathrm{id}_E)(x).$$

- Tout d'abord

$$\begin{aligned}(f - a\,\mathrm{id}_E)(y) &= (f - a\,\mathrm{id}_E)\left(\frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E)(x)\right) \\ &= \frac{1}{a-b}(f - a\,\mathrm{id}_E)((f - b\,\mathrm{id}_E)(x)) \\ &= \frac{1}{a-b}\underbrace{((f - a\,\mathrm{id}_E)\circ(f - b\,\mathrm{id}_E))}_{=0}(x) \\ &= 0_E \text{ donc } y \in \operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E).\end{aligned}$$

- On montre de même que $z \in \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$, en remarquant en passant que

$$\begin{aligned}(f - b\,\mathrm{id}_E)\circ(f - a\,\mathrm{id}_E) &= f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{id}_E \\ &= (f - a\,\mathrm{id}_E)\circ(f - b\,\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}.\end{aligned}$$

- Enfin,

$$\begin{aligned} y+z &= \frac{1}{a-b}(f(x)-bx)+\frac{1}{b-a}(f(x)-ax) \\ &= \frac{1}{a-b}(f(x)-bx)-\frac{1}{a-b}(f(x)-ax) \\ &= \frac{1}{a-b}(f(x)-bx-f(x)+ax) \\ &= \frac{1}{a-b}((a-b)x) \\ &= x \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $\operatorname{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_E)+\operatorname{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_E)=E$.

On peut enfin conclure que $\operatorname{Ker}(f-a\,\mathrm{id}_E)\oplus\operatorname{Ker}(f-b\,\mathrm{id}_E)=E$.

Une correction de l'exercice 14 *énoncé*

1. On suppose donc que $\operatorname{rg}(f)=\operatorname{rg}(f^2)$.
   - Montrons que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2)=\mathbb{I}\mathrm{m}(f)$.
     - D'une part, si $y\in\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2)$, alors il existe $x\in E$ tel que $y=f^2(x)=f(f(x))$, donc en particulier y est de la forme $y=f(\square)$, ce qui prouve que $y\in\mathbb{I}\mathrm{m}(f)$.
       Ainsi $\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2)\subset\mathbb{I}\mathrm{m}(f)$.
     - De plus, on sait que $\operatorname{rg}(f)=\operatorname{rg}(f^2)$, donc le rang étant la dimension de l'image, $\dim(\mathbb{I}\mathrm{m}(f))=\dim(\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2))$.
     - L'inclusion et l'égalité des dimensions permettent de conclure que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f)=\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2)$.
   - Montrons que $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Ker}(f)$.
     - D'une part, si $x\in\operatorname{Ker}(f)$, alors $f(x)=0_E$, donc en particulier $f^2(x)=f(f(x))=f(0_E)=0_E$, d'où $\operatorname{Ker}(f)\subset\operatorname{Ker}(f^2)$.
       Ainsi $\operatorname{Ker}(f)\subset\operatorname{Ker}(f^2)$.

Les inclusions $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ *et* $\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2) \subset \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$ *sont vraies pour tout endomorphisme* f*. On peut même montrons que les* $\mathrm{Ker}(f^k)$ *et les* $\mathbb{I}\mathrm{m}(f^k)$ *forment des suites croissante pour l'une, et décroissante pour l'autre*

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \subset \cdots,$$
$$\mathbb{I}\mathrm{m}(f) \supset \cdots \supset \mathbb{I}\mathrm{m}(f^k) \supset \mathbb{I}\mathrm{m}(f^{k+1}) \supset \cdots.$$

- De plus, on sait que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$, donc par le théorème du rang appliqué aux endomorphismes f et f^2, on obtient

$$\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f^2) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2)),$$

  donc comme on sait que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$, on en déduit que $\mathrm{Ker}(\mathbb{I}\mathrm{m}(f)) = \mathrm{Ker}(\mathbb{I}\mathrm{m}(f^2))$.
- L'inclusion et l'égalité des dimensions permettent de conclure que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

2. ➟ D'une part, grâce au théorème du rang, on a directement

$$\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{I}\mathrm{m}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

   ➟ D'autre part, montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathbb{I}\mathrm{m}(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathbb{I}\mathrm{m}(f)$, alors $f(x) = 0$ et il existe $w \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(w)$.
   Ainsi $f^2(w) = f(f(w)) = f(x) = 0_{\mathrm{E}}$ donc $w \in \mathrm{Ker}(f)$, or $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, donc $w \in \mathrm{Ker}(f)$, et par conséquent $x = f(w) = 0_{\mathrm{E}}$, C.Q.F.D.