Le rapport du Jaury

Mes abréviations

« TE » : Type-Error ;

« AI » : argumentation insuffisante ;

« VC » : voir le corrigé ;

« AR » : améliorer la rédaction ;

« ASP » : affirmation sans preuve ;

« CP » : je ne comprends pas ;

« MF » : mauvaise foi ;

« N'importe quoi ! » : n'importe quoi !

Les questions marquées par un 🎁 font partie de la voiture balai de la difficulté mathématique de PC ; tandis que les questions marquées par un 🚢 sont des questions très classiques et récurrentes…
Parfois, un 🔥 peut indiquer une question difficile

- Lorsque vous superposez des lignes de calcul, il est nécessaire de faire figurer des liens logiques entre ces lignes, comme :
  - des « $\Longleftrightarrow$ » ou « $\Rightarrow$ » directement dans les mathématiques,
  - ou bien des mots en français comme « donc », « d'où », « ainsi », « par conséquent », etc.
- Attention aux **TypeError** ! Dans le premier exercice, δ est une application définie sur l'ensemble des suites réelles, et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, donc les expressions et égalités $\delta\circ\delta(u_n) = u_n$, $\delta\circ\delta = u_n$, $u_n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ n'ont pas de sens.
- Si je vous demande de donner le réel $\sup \frac{1}{1+t}$, comme noté sur de nombreuses copies, que me répondez-vous ?
- Je félicite la conspiration d'esprits pertinents qui ont décidé d'appliquer le critère spécial des séries alternées *(j'en profite pour rappeler que l'acronyme* CSSA *n'est pas officiel)* aux séries $\sum(-1)^n a_n$ et $\sum \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

  D'ailleurs, deux élèves en ont profité pour appliquer les **réciproques** du critère spécial des séries alternées, et du critère de d'Alembert, résultats qui sont faux.

  Par (contre-)exemple, la suite de terme général
  $$u_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n^2}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{(-1)^n}{n!}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
  est de signe alterné, avec une série $\sum u_n$ convergente, mais pour autant la suite de terme général $|u_n|$ n'est pas décroissante.
- La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessus est aussi un contre-exemple pour contredire les élèves qui pensent qu'une suite qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

(mis à jour le 24 novembre 2024)

- Le prix Chaprot est décerné aux élèves qui ont utilisé le théorème faux ci-dessous :

~~$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, *or* $\sum v_n$ *converge* (resp. *diverge*), *donc* $\sum u_n$ *converge* (resp. *diverge*).~~

- Dans le premier exercice, appliquer la formule du binôme négatif à $\frac{1}{(1-z)^{n+1}}$ pour $z \in \mathscr{D}$ est un cas typique d'utilisation d'une formule ou d'un outil hors de son domaine de validité. *(Un peu comme traverser l'Adour avec un SUV ; ou nommer ministre de l'éducation nationale une personne du milieu médical uniquement parce qu'elle ressemble énormément à ma prof de maths de première.)*
- **Raisonnement du yéti :** écrire tout un tas de trucs (comme des égalités, des inégalités, des propriétés, que sais-je ?) vérifiés par un objet n'a jamais prouvé que cet objet existe (ou est définie, ou autre synonyme).

  Je rappelle que l'ordre logique des mathématiques est

  (1) d'abord on justifie l'existence d'un objet (ou bien on suppose clairement cette existence pour l'analyser) ;

  (2) puis, et seulement après, on peut étudier les propriétés de cet objet ou faire des calculs avec.

Par exemple, écrire

> « $-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$, *donc en passant à la limite :*
> $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant 0$,
> *donc* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et a pour limite* 0 »,

est faux car on y écrit des inégalités sur la limite de u_n pour en déduire l'existence de cette limite.

De même, écrire « *le yéti est un grand primate couvert de longs poils qui vit dans l'Himalaya* » ne permet pas d'affirmer que le yéti existe.

- L'égalité ci-dessous, même si elle ressemble comme deux gouttes d'eau à un raisonnement mathématique digne, et malgré son caractère extrêmement pratique pour finir la question 1 de l'exercice 3, est fausse :

$$\{ p(x) + q(x) \mid x \in \mathrm{E} \} \boxed{=} \{ p(x) \mid x \in \mathrm{E} \} + \{ q(x) \mid x \in \mathrm{E} \}.$$

La partie de gauche est en effet incluse dans celle de droite, mais l'inclusion réciproque est fausse. Il suffit de comprendre que $p(x) + q(y)$ est dans $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, mais ne s'écrit pas forcément $(p+q)(z) = p(z) + q(z)$, donc n'est pas forcément dans $\mathrm{Im}(p+q)$.

Comprenez bien les égalités :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) &= \{ p(x) \mid x \in \mathrm{E} \} + \{ q(x) \mid x \in \mathrm{E} \} \\ &= \{ p(\Box) \mid \Box \in \mathrm{E} \} + \{ q(\Diamond) \mid \Diamond \in \mathrm{E} \} \\ &= \left\{ p(\Box) + q(\Diamond) \mid (\Box, \Diamond) \in \mathrm{E}^2 \right\},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(p+q) &= \{\,(p+q)(\square) \mid \square \in \mathrm{E}\,\} \\ &= \{\,p(\square)+q(\square) \mid \square \in \mathrm{E}\,\}\,.\end{aligned}$$

- Il est rarement pertinent de raisonner par l'absurde quand on montre qu'une famille est libre, en partie parce que le fait qu'une famille est liée est très souvent mal posé. Par exemple, les phrases

  « supposons que $(a, f(a))$ est liée, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \lambda a$ »,
  « supposons que $(a, f(a))$ est liée, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = \lambda f(a)$ »,
  « supposons que $(a, f(a))$ est liée, alors il existe $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ tels que $\lambda a + \mu f(a) = 0_{\mathrm{E}}$ »,

  font démarrer un raisonnement sur une base fausse.
- Toujours dans ce thème, diviser par λ au sein d'un raisonnement qui finit deux lignes plus bas par « donc $\lambda = 0$ » ne devrait pas franchir la censure d'un esprit qui s'intéresse vraiment à ce qu'il écrit.
- La notion de « raisonnement par analyse-synthèse » est un outil pédagogique pour apprendre à réfléchir. Il est aussi pertinent de le citer dans une copie que pour un musicien de s'arrêter au milieu du concert pour expliquer qu'il va jouer un La, ou une tierce.
- Les préconisations générales :
  - *utiliser un brouillon,*
  - *soigner la rédaction,*
  - *et en particulier faire l'effort de rédiger une conclusion,*
  - *en utilisant un français correct : épargner à la personne qui corrige de raisonnements qui finissent par « donc absurde » ou « donc impossible ».*
- Sur un devoir en temps libre, il y a de nombreuses négligences que je juge coupables au regard de tous les documents qui sont à votre disposition pour vérifier et argumenter vos affirmations.

  Je ne connais pas de spiritualité ou civilisation qui ne valorise pas le goût pour le travail bien fait, et il n'existe aucune raison d'exclure de ce champ vos tâches étudiantes, comme par exemple vos devoirs de maths !

  Un des avantages entre autres est de présenter une copie aimable à la personne qui la corrige, pour attirer sa bienveillance et gratter ainsi des points sur la copie repoussante d'autres personnes candidates.

Exercice 1 – Transformation binomiale d'Euler

On appelle ***transformation binomiale d'Euler*** *l'application δ qui à toute suite de réels $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $\delta(u) = (\delta(u)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \delta(u)_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_k.$$

1. Démontrer que la transformation binomiale est **involutive**, autrement dit que $\delta \circ \delta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

On considère une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

2. Démontrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

On note alors $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z = -1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$

3. Justifier que l'application g ci-dessous est définie sur le domaine $\mathscr{D}$ de $\mathbb{C}$ où $z = \frac{1}{2}$ ou $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) < 1/2$,

$$g : z \mapsto g(z) = \frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{z-1}\right),$$

4. En notant $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la transformation binomiale de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que

$$\forall z \in \mathscr{D},\quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

> *Dans cette question on pourra utiliser la formule du binôme négatif, et s'autoriser exceptionnellement à intervertir sans justification deux sommes infinies.*

5. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}}$.

6. *Accélération de la vitesse de convergence grâce à la transformation binomiale.*

   Soit x un réel de $[0\,;\,1]$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^i + \dfrac{(-1)^n x^n}{1+x}$,

   et en déduire que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \int_0^x \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}\,\mathrm{d}\,t$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,\mathrm{d}\,t\right) = 0$.

   (c) Conclure que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

7. (a) Déduire des résultats établis précédemment que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln(2).$$

   (b) Soit p un entier naturel.

   Donner un entier N_p tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$ approche $\ln(2)$ à 10^{-p} près dès que $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_p$.

   (c) Prenons derechef un entier naturel p.

   (i) Montrer que pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{\mathrm{N}}}.$$

   (ii) En déduire un entier N'_p tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ approche $\ln(2)$ à 10^{-p} près pour tout $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}'_p$.

   (iii) Comparer N_p et N'_p, et commenter.

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et f un endomorphisme de E qui vérifie $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

1. Soit $a \in \mathrm{E}$ non nul. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre.

On pose $\mathrm{F}(a) = \mathrm{Vect}(a, f(a))$.

2. Vérifier que $\mathrm{F}(a)$ est stable par f, et donner la matrice de l'endomorphisme de $\mathrm{F}(a)$ induit par f dans la base $\big(a, f(a)\big)$.
3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, et des vecteurs $a_1, \dots, a_p$ non nuls de E tels que
$$\mathrm{E} = \mathrm{F}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}(a_p).$$
4. En déduire que la dimension de E est paire.
5. Justifier l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, avec des blocs simples ?

Exercice 3

1. Montrer que si p, q et $p+q$ sont des projecteurs, alors
$$p \circ q = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}, \text{ et } \mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q).$$
2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $(f_1, \dots, f_p)$ des endomorphismes de E tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(f_i) \leqslant n$.

   Montrer que :
   - les f_i sont tous des projecteurs,
   - pour tout $(i,j) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2$, si $i \neq j$ alors $f_i \circ f_j = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$,
   - $\mathrm{E} = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(f_i)$.

Une correction de l'exercice 1

énoncé

1. Montrons que $\delta \circ \delta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, pour cela prenons $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, montrons que $\delta\left(\delta(u)\right) = u$, autrement dit montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \delta\left(\delta(u)\right)_n = u_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\delta\left(\delta(u)\right)_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\delta(u)_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}u_p\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{k}(-1)^p\binom{k}{p}u_p.\end{aligned}$$

Or pour tous $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, tels que $0 \leqslant p \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{k}{p} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{p!(k-p)!} = \frac{n!}{(n-k)!p!(k-p)!}\\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{(n-k)!(k-p)!}\\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{\left((n-p)-(k-p)\right)!(k-p)!}\\ &= \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p},\end{aligned}$$

> *Ce genre d'identité $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$ est assez courante dans les exercices où on manipule des sommes avec coefficients du binôme.*

donc

$$\begin{aligned}
\delta(\delta(u))_n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}(-1)^k(-1)^p u_p \\
&= \sum_{0\leqslant p\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}(-1)^k(-1)^p u_p \\
&= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}(-1)^k(-1)^p u_p \quad \textit{(avec les règles de sommation en triangle)} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p\left[\sum_{k=p}^{n}\binom{n-p}{k-p}(-1)^k\right]u_p \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p\left[\sum_{k=0}^{n-p}\binom{n-p}{k}(-1)^{k+p}\right]u_p \quad \textit{(en posant } k'=k-p, \textit{ ou } k=k'+p\textit{)} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^{2p}\left[\sum_{k=0}^{n-p}\binom{n-p}{k}(-1)^{k}\right]u_p \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\times 1\times\left[(-1+1)^{n-p}\right]u_p \quad \textit{(avec } (-1)^{2p}=1\textit{, et en reconnaissant la formule du binôme)} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}0^{n-p}u_p \\
&= \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}0^{n-p}u_p + \binom{n}{n}0^0 u_n \\
&= \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}\times 0\times u_p + \binom{n}{n}\times 1\times u_n \\
&= u_n, \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

⚠ *l'erreur classique ici est de penser que $0^{n-p}=0$, ce qui est vrai pour $p<n$, mais faux pour $n=p$!*

2. C'est un résultat classique du chapitre ultérieur sur les séries entières, mais qui est un bon exercice.

   Soit z un nombre complexe tel que $|z|<1$. Comme $\sum(-1)^n a_n$ converge, a fortiori $(-1)^n a_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, d'où $a_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

S'il faut vraiment justifier cette dernière étape, il suffit de dire que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}((-1)^n a_n).$$

Ainsi

$$a_n z^n \underset{n\to+\infty}{=} o(z^n),$$

et comme $|z| < 1$, la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc par comparaison $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi sommable, c'est-à-dire $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$, l'expression

$$g(z) = \frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{z-1}\right),$$

est définie dans le cas où $z \neq 1$, et $\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$, ou bien pour $\frac{z}{z-1} = -1$.

Or

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1 &\iff |z| < |z-1| \\
&\iff |z|^2 < |z-1|^2 \quad \text{(car } \square \mapsto \square^2 \text{ est croissante sur } [0\,;+\infty[\text{)} \\
&\iff z \times \overline{z} < (z-1)\overline{(z-1)} \\
&\iff z\overline{z} < z\overline{z} - (z+\overline{z}) + 1 \\
&\iff z + \overline{z} (= 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(z)) < 1 \iff \mathbb{R}\mathrm{e}(z) < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

et

$$\frac{z}{z-1} = -1 \iff z = -z+1 \iff z = \frac{1}{2}.$$

Donc g est bien définie sur le domaine $\mathscr{D}$.

4. Prenons un nombre complexe z dans $\mathscr{D}$, et posons $u = \dfrac{z}{z-1}$.

D'après les équivalences de la question précédente :

- $u = -1 \iff z = \frac{1}{2}$,
- et $|u| < 1 \iff \mathbb{R}\mathrm{e}(z) < \frac{1}{2}$;

et on remarque de plus que

$$\frac{u}{u-1} = \frac{\frac{z}{z-1}}{\frac{z}{z-1}-1} = \frac{\frac{z}{z-1}}{\frac{1}{z-1}} = z.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(\frac{u}{u-1}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n (-1)^n \left(\frac{1}{1-u}\right)^n \\
&= (1-u) \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n (-1)^n \left(\frac{1}{1-u}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

➟ Plaçons-nous dans le cas où $z \in \mathscr{D} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, alors d'après notre préambule $|z| < 1$, donc la formule du binôme négatif nous donne

$$\left(\frac{1}{1-u}\right)^{n+1} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} z^{k-n},$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n &= (1-u) \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} u^{k-n} \\
&= (1-u) \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} b_n (-1)^n \binom{k}{n} u^k \\
&= (1-u) \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k} b_n (-1)^n \binom{k}{n} u^k
\end{aligned}$$

(on a effectué une somme sur un triangle « infini » : $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}$ *; sachez qu'il existe un théorème dit « de Fubini » qui nous l'autorise parce qu'on travaille sur des suites sommables)*

$$
\begin{aligned}
&= (1-u)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} b_n(-1)^n\binom{k}{n}\right)u^k \\
&= (1-u)\sum_{k=0}^{+\infty}(\delta(b)_k)\,u^k \\
&= (1-u)\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k)\,u^k \quad \text{(car } b=\delta(a) \text{ donc } \delta(b)=a \text{ puisque } \delta\circ\delta=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\text{)} \\
&= \frac{1}{1-z}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\left(\frac{z}{z-1}\right)^k \quad \text{(je vous laisse vérifier que } 1-u=\tfrac{1}{1-z}\text{)} \\
&= \frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{z-1}\right) = g(z), \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}
$$

➟ Si en revanche $z = \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} a_k \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}(-1)^k \binom{n}{k} a_k \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \textit{(on additionne derechef dans un triangle infini)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \left(\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k a_k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \times \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^{k+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k a_k \quad \textit{(avec le binôme négatif car } \left|\tfrac{1}{2}\right| < 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \times 2^{k+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k a_k = 2 \times \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}\right)^k \\
&= g\left(\frac{1}{2}\right), \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

5. En prenant $z = \frac{1}{2}$ dans le résultat de cette question ci-dessus, on obtient

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{et } g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} f\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}\right) = 2f(-1) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n,$$

d'où l'égalité voulue.

6. (a) Soit $x \in [0\,;\,1]$, alors $-x \neq 1$, donc

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-x)^i = \frac{1-(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x},$$

d'où l'égalité demandée.

Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x),$$

et d'autre part, d'après l'égalité ci-dessus

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t &= \int_0^x \left[\sum_{i=0}^{n-1}(-t)^i + \frac{(-t)^n}{1+t}\right]\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \int_0^x t^i \mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t \quad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \left[\frac{t^{i+1}}{i+1}\right]_0^x + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \frac{x^{i}}{i} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\mathrm{d}t \quad \textit{(en posant } i' = i+1 \textit{ dans la somme),}
\end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\ ;\ 1]$, l'inégalité triangulaire (ou inégalité de la moyenne) donne

$$\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t, \quad \textit{(car les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant)}$$

Or pour tout $t \in [0\ ;\ x]$, $1+t \geqslant 1$, donc $\frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$, et par la croissance de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \textit{(car } x \in [0\ ;\ 1]\textit{)},$$

ainsi

$$\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc par encadrement $\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(c) Soit $x \in [0 ; 1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question (a),

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i - \ln(1+x)\right| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right|,$$

donc d'après la question précédente, par encadrement,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ln(1+x)$$

autrement dit, par définition de la convergence d'une série, $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge et a pour limite $\ln(1+x)$.
En particulier pour $x = 1$, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, qui est la même que $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$, converge et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

7. (a) Si on note $a_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors sa transformée binomiale est la

suite de terme général

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{(k+1)!\big((n+1)-(k+1)\big)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n+1}{k} \quad \textit{(en posant } k' = k+1\textit{)} \\
&= -\frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} - 1 \right) \\
&= -\frac{1}{n+1} \left((-1+1)^{n+1} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

On constate avec étonnement que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est invariante par la transformation binomiale.
Il n'y a plus qu'à appliquer le résultat de la question 5. pour affirmer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}},$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln(2).$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$.
La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$ vérifie les conditions du critère spécial des séries alternées, ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$|S_N - \ln(2)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \right| \leqslant \left| \frac{(-1)^{N+1}}{N+2} \right| = \frac{1}{N+2}.$$

Il suffit donc, pour répondre à la question, de prendre N_p tel que $\frac{1}{N_p+2} \leqslant 10^{-p}$, soit $\boxed{N_p = 10^p - 2}$.

(c) Soit à nouveau $p \in \mathbb{N}$.
  (i) Les séries $\sum \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ et $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergent, donc pour tout $N \geqslant 1$, par prolongement des inégalités larges à la limite,

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{N+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{2^{N+2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{N+1}} \leqslant \frac{1}{2^N}.$$

  (ii) Comme plus haut, $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près lorsque le reste $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ est inférieur à 10^{-p}, ce pour quoi il suffit que $\frac{1}{2^N} \leqslant 10^{-p}$.
  Or

$$\frac{1}{2^N} \leqslant 10^{-p} \iff 2^N \geqslant 10^p \iff N\ln(2) \geqslant p\ln(10) \iff N \geqslant \frac{\ln(10)}{\ln(2)} p.$$

  On peut prendre par exemple $N'_p = 1 + \left\lfloor \frac{\ln(10)}{\ln(2)} p \right\rfloor$ (où $\lfloor \square \rfloor$ désigne la partie entière).

  (iii) La borne N_p dépend exponentiellement de p, alors que N'_p est plus ou moins une application affine de p, donc N_p tend beaucoup plus vite que N'_p vers $+\infty$. Par conséquent, la série obtenue par la transformation binomiale converge beaucoup plus vite que la série d'origine.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

1. Soit $a \in \mathrm{E} - \{0_\mathrm{E}\}$.
   Prenons λ et μ deux réels tels que
   $$(1) : \lambda a + \mu f(a) = 0_\mathrm{E}.$$
   Alors en composant par f, on obtient
   $$\lambda f(a) + \mu f^2(a) = 0_\mathrm{E}$$
   c'est-à-dire, sachant que $f^2 = -\mathrm{id}_\mathrm{E}$,
   $$(2) : \lambda f(a) - \mu a = 0_\mathrm{E}.$$
   Ainsi, $\lambda(1) - \mu(2)$ donne $(\lambda^2 + \mu^2)a = 0_\mathrm{E}$, donc comme $a \neq 0_\mathrm{E}$, on en déduit que $\lambda^2 + \mu^2 = 0$, et comme λ et μ sont réels, $\lambda = \mu = 0$.
   Ainsi la famille $(a, f(a))$ est libre.
2. Sans coup férir :
   $$\begin{aligned} f(\mathrm{F}(a)) = f(\mathrm{Vect}(a, f(a))) = \mathrm{Vect}\left(f(a), f^2(a)\right) = \mathrm{Vect}(f(a), -a) \\ = \mathrm{Vect}(a, f(a)) = \mathrm{F}(a), \end{aligned}$$
   ainsi $\mathrm{F}(a)$ est stable par f.
   De plus, en notant f_0 l'endomorphisme de $\mathrm{F}(a)$ induit par f, on a :
   $$\begin{aligned} f_0(a) &= f(a), \\ \text{et } \ f_0(f(a)) &= f^2(a) = -a, \end{aligned}$$
   on en déduit que la matrice de f_0 dans la base $(a, f(a))$ est
   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. L'espace vectoriel E est de dimension non nulle, donc E n'est pas réduit au vecteur nul, il contient donc au moins un vecteur a_1 non nul, et d'après la première question E contient $\mathrm{F}(a_1)$.
   Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il existe des vecteurs $a_1, \ldots, a_k$ de E tels que $\mathrm{F}(a_1), \ldots, \mathrm{F}(a_k)$ sont en somme directe. On en déduit alors que $\dim(\mathrm{E}) \geqslant \dim\left(\mathrm{F}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}(a_k)\right)$, donc comme chaque $\mathrm{F}(a_i)$ est de dimension 2, que $n \geqslant 2k$.
   Dans ce cas, seules deux possibilités s'offrent à nous :

- si $E = F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_k)$, alors la propriété demandée est établie en prenant $p = k$;
- sinon, il existe un vecteur a_{k+1} dans E tel que $a_{k+1} \notin F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_k)$.
  Établissons alors que $F(a_1), \ldots, F(a_k), F(a_{k+1})$ sont en somme directe.
  Prenons $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ dans $F(a_1) \times \cdots \times F(a_k) \times F(a_{k+1})$ tel que

$$x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} = 0_E.$$

  - Alors par définition des $F(a_i)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe (λ_i, μ_i) tels que $x_i = \lambda_i a_i + \mu_i f(a_i)$.
    Ainsi

$$(1) : \sum_{i=1}^{k+1} \Big(\lambda_i a_i + \mu_i f(a_i) \Big) = 0_E.$$

    Composons cette égalité par f, on obtient alors comme dans la première question

$$(2) : \sum_{i=1}^{k+1} \Big(\lambda_i f(a_i) - \mu_i a_i \Big) = 0_E.$$

    Derechef la combinaison $\lambda_{k+1}(1) - \mu_{k+1}(2)$ élimine $f(a_{k+1})$, et permet d'écrire

$$(\lambda_{k+1}^2 + \mu_{k+1}^2) a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \Big(\lambda_{k+1}\lambda_i a_i + \mu_{k+1}\mu_i f(a_i) \Big).$$

    On en déduit que $(\lambda_{k+1}^2 + \mu_{k+1}^2) a_{k+1}$ est combinaison linéaire des a_i et $f(a_i)$ pour $i \in [\![1, k]\!]$, donc que

$$(\lambda_{k+1}^2 + \mu_{k+1}^2) a_{k+1} \in F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_k)$$

    Or on a supposé que $a_{k+1} \notin F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_k)$, donc $\lambda_{k+1}^2 + \mu_{k+1}^2 = 0$, et par conséquent $\lambda_{k+1} = \mu_{k+1} = 0$, d'où $\boxed{x_{k+1} = 0_E}$.
  - Il reste alors $x_1 + \cdots + x_k = 0_E$, mais comme on a supposé que $F(a_1), \ldots, F(a_k)$ sont en somme directe, on en déduit que $\boxed{x_1 = \ldots = x_k = 0_E}$.
  - On peut donc conclure que $F(a_1), \ldots, F(a_k), F(a_{k+1})$ sont en somme directe. Par conséquent, $n \geqslant 2(k+1)$.

La conséquence de notre raisonnement est que s'il n'existe pas d'entier p tel que $E = F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_p)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2k$, ce qui est faux dès que $k > n/2$. C.Q.F.D

4. De la question précédente, on déduit directement que

$$n = \dim(E) = \dim\big(F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_p)\big) = 2p,$$

donc que n est de dimension paire.

5. On déduit aussi de l'égalité $E = F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_p)$ obtenue dans la question 3 que $\mathscr{B} = \big(a_1, f(a_1), \ldots, a_p, f(a_p)\big)$ est une base de E obtenue par concaténation des bases des $F(a_i)$.

Et en s'appuyant sur la matrice obtenue dans la question 2, on obtient que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est une matrice diagonale par blocs, dont les p blocs diagonaux sont les matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

1. ➟ On sait que p, q et $p+q$ sont des projecteurs, donc

$$p^2 = p, \;\; q^2 = q, \;\; (p+q)^2 = p+q,$$

mais en développant

$$(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + p \circ q + q \circ p + q,$$

donc après simplification

$$p \circ q + q \circ p = 0.$$

En composant à gauche, puis à droite, par p les deux membres de cette égalité, on obtient sachant que $p^2 = p$,

$$p \circ q + p \circ q \circ p = 0,$$
$$p \circ q \circ p + q \circ p = 0,$$

d'où on déduit par différence que $p \circ q = q \circ p$.

Ainsi, des deux égalités $p \circ q + q \circ p = 0$ et $p \circ q = q \circ p$, on déduit alors fort habilement que $2p \circ q = 0$, d'où finalement $p \circ q = 0$, C.Q.F.D.

- Montrons à présent que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, par double inclusion.
  - Montrons que $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
    Prenons $y \in \mathrm{Im}(p+q)$, alors il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = (p+q)(x) = p(x) + q(x)$. Or $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $q(x) \in \mathrm{Im}(q)$, donc $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. C.Q.F.D.
  - Réciproquement, montrons que $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p+q)$.
    Prenons $x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, alors il existe a, b dans E tels que $y = p(a) + q(b)$.
    Mais alors

$$\begin{aligned} p(y) &= p(p(a)+q(b)) = p^2(a) + p \circ q(b) \\ &= p(a) \text{ \textit{(car} } p^2 = p \text{ \textit{et} } p \circ q = 0\text{\textit{)}} \end{aligned}$$

    et de même $q(y) = q(b)$, ainsi $y = p(y) + q(y) = (p+q)(y)$ d'où $y \in \mathrm{Im}(p+q)$. C.Q.F.D

2. On va montrer toute la question par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.
   - Au rang $p = 1$, $f_1 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ entraîne bien que f_1 est un projecteur, que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f_1)$, et la condition $1 \leqslant i \neq j \leqslant 1$ est vide. Donc pour $p = 1$, c'est une évidence.
   - Pour $p = 2$, supposons que $f_1 + f_2 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et $\mathrm{rg}(f_1) + \mathrm{rg}(f_2) \leqslant n$.
     - De $f_1 + f_2 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$, on déduit que $f_2 = \mathrm{id}_\mathrm{E} - f_1$, donc si $x \in \mathrm{Ker}(f_1)$, alors $f_2(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(f_2)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f_1) \subset \mathrm{Im}(f_2)$, et par symétrie de f_1 et f_2, on a aussi $\mathrm{Ker}(f_2) \subset \mathrm{Im}(f_1)$.
       La première inclusion nous donne l'inégalité $\dim(\mathrm{Ker}(f_1)) \leqslant \mathrm{rg}(f_2)$, mais par le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f_1)) = n - \mathrm{rg}(f_1) \geqslant (\mathrm{rg}(f_1) + \mathrm{rg}(f_2)) - \mathrm{rg}(f_1) = \mathrm{rg}(f_2).$$

       Donc $\dim(\mathrm{Ker}(f_1)) = \mathrm{rg}(f_2)$ et $\mathrm{Ker}(f_1) = \mathrm{Im}(f_2)$.
       Encore par symétrie, on a aussi $\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Im}(f_1)$.
       On en déduit que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.
       Enfin

$$f_1 \circ f_1 = f_1 \circ (\mathrm{id}_\mathrm{E} - f_2) = f_1 - f_1 \circ f_2 = f_1$$

       et de même

$$f_2 \circ f_2 = f_2$$

donc f_1 et f_2 sont des projecteurs, et

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= \mathrm{Ker}(f_2) \oplus \mathrm{Im}(f_2) \ \textit{(par propriété des projecteurs)} \\ &= \mathrm{Im}(f_1) \oplus \mathrm{Im}(f_2) \ \textit{(car on a vu que } \mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Ker}(f_2)\textit{).} \end{aligned}$$

- Soit $p \geqslant 3$.
Supposons que la propriété est vraie pour $p-1$ endomorphismes, montrons qu'elle est alors vraie pour p endomorphismes : soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille de p endomorphismes de E tels que $\sum_{i=1}^{p} f_i = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(f_i) \leqslant n$, montrons que les f_i sont tous des projecteurs, et que :

$$\begin{cases} \text{pour tout } 1 \leqslant i \neq j \leqslant p,\ f_i \circ f_j = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}\,; \\ \mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(f_i) \end{cases}$$

- La famille $(f_1, f_2, \ldots, f_{p-2}, f_p + f_{p-1})$ est alors une famille de $p-1$ endomorphismes de E dont la somme vaut id_E, et comme $\mathrm{rg}(f_{p-1} + f_p) \leqslant \mathrm{rg}(f_{p-1}) + \mathrm{rg}(f_p)$,

> *Cette dernière inégalité est un résultat général. En effet si u et v sont des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, alors pour tout $y \in \mathrm{Im}(f+g)$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Or $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ et $g(x) \in \mathrm{Im}(g)$, donc $y \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.*
> *Donc $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, et en dimension finie, on en déduit que*
>
> $$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f+g) &\leqslant \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) \\ &= \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) \\ &\ \textit{(par la formule de Grassman)} \\ &\leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g). \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &\mathrm{rg}(f_1) + \mathrm{rg}(f_2) + \cdots + \mathrm{rg}(f_{p-1} + f_p) \\ &\qquad \leqslant \mathrm{rg}(f_1) + \mathrm{rg}(f_2) + \cdots + \mathrm{rg}(f_{p-1}) + \mathrm{rg}(f_p) \leqslant n. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à cette famille de $p-1$ endomorphismes, qui nous dit que $f_1, \dots, f_{p-2}, f_{p-1}+f_p$ sont tous des projecteurs, et que :

- pour tout $1 \leqslant i \leqslant p-2$, $f_i \circ (f_{p-1}+f_p) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$;
- pour tout $1 \leqslant i \neq j \leqslant p-2$, $f_i \circ f_j = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$;
- $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p-2} \mathrm{Im}(f_i) \bigoplus \mathrm{Im}(f_{p-1}+f_p)$.

- Ce qui vient d'être fait avec les deux derniers endomorphismes de la famille $(f_1, \dots, f_p)$ peut aussi bien être fait avec n'importe quelle paire d'endomorphismes de cette famille, ce qui nous donne en prenant en particulier (f_1, f_{p-1}) et (f_1, f_p) que f_p, puis f_{p-1} sont des projecteurs, et en prenant le couple (f_1, f_2) que $f_{p-1} \circ f_p = 0$.

  Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(f_i)$.

- On déduit des questions précédentes que f_{p-1}, f_p, et $f_{p-1}+f_p$ sont des projecteurs de E, on peut donc appliquer le résultat de la première question et en déduire que $f_{p-1} \circ f_p = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, et aussi que $\mathrm{Im}(f_{p-1}+f_p) = \mathrm{Im}(f_{p-1}) + \mathrm{Im}(f_p)$.

  Mais si on prend $x \in \mathrm{Im}(f_{p-1}) \cap \mathrm{Im}(f_p)$, alors il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $x = f_p(t)$, et comme f_{p-1} est un projecteur, $\mathrm{Im}(f_{p-1}) = \mathrm{Ker}(f_{p-1} - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ donc $f_{p-1}(x) = x$.

  D'où $x = f_{p-1}(f_p(t)) = (f_{p-1} \circ f_p)(t) = 0_\mathrm{E}$ car on a vu que $f_{p-1} \circ f_p$ est nul.

  Ainsi $\mathrm{Im}(f_{p-1}) + \mathrm{Im}(f_p)$ est une somme directe, donc on peut écrire

$$\mathrm{Im}(f_{p-1}+f_p) = \mathrm{Im}(f_{p-1}) \oplus \mathrm{Im}(f_p),$$

  ainsi, comme on a déjà établi que

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p-2} \mathrm{Im}(f_i) \bigoplus \mathrm{Im}(f_{p-1}+f_p)$$

  on peut conclure que

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p-2} \mathrm{Im}(f_i) \bigoplus \left(\mathrm{Im}(f_{p-1}) \oplus \mathrm{Im}(f_p)\right) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(f_i),$$

ce qui achève la preuve.