Le rapport du Jaury

Mes abréviations

« TE » : Type-Error ;

« AI » : argumentation insuffisante ;

« VC » : voir le corrigé ;

« AR » : améliorer la rédaction ;

« ASP » : affirmation sans preuve ;

« CP » : je ne comprends pas ;

« MF » : mauvaise foi ;

« N'importe quoi ! » : n'importe quoi !

Les questions marquées par un 🎁 font partie de la voiture balai de la difficulté mathématique de PC ; tandis que les questions marquées par un 🚢 sont des questions très classiques et récurrentes...
Parfois, un 🔥 peut indiquer une question difficile.

Rappelons que les résultats que vous obtenez n'ont aucune importance, hormis si vous devez les utiliser dans les questions suivantes, seuls les arguments et preuves que vous fournirez pour obtenir ces résultats sont importants.
En théorie, chaque étape de vos calculs, chaque égalité, chaque « donc », etc, doit être justifiée par un argument !

En particulier sur un devoir en temps libre, tous les documents pour vérifier et argumenter vos affirmations sont à votre disposition, donc les approximations sont essentiellement les symptômes de la flemme (et dans ce cas vous perdez votre temps, et surtout me faites perdre le mien !)

Les préconisations générales :

- *utiliser un brouillon pour vos recherches, et proposer le produit fini sur votre copie* (assiste-t-on aux recherches et répétitions d'un artiste ?) ;
- *soigner la rédaction, l'orthographe, la grammaire, le sens précis (!) des mots et des phrases utilisées ;*
- *en particulier faire l'effort de rédiger une conclusion de vos raisonnements (en la comparant à la question posée) ;*
- *et utiliser un français correct : épargner à la personne qui corrige les raisonnements qui finissent par « donc absurde » ou « donc impossible » et les flèches au milieu des phrases.*

(mis à jour le 24 novembre 2024)

- Approximations, absurdités, et erreurs grossières :

  - « $\ln(\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x$ »,
  - « cotan est intégrable sur $]0\,;\,\pi[$ »,
  - « ln tend vers $-\infty$ en 0^+ donc n'est pas intégrable en 0^+ »,
  - « (...) sur le système complet d'événements $X(\Omega)$ »,
  - « $X = \mathrm{Vect}(\dots)$ »,
  - « f *(un endomorphisme)* est de la forme C_Q *(une matrice)* »,
  - « les $n-1$ colonnes sont non colinéaires »,
  - « $Q(f(x_0))$ », « $\chi_f(f(x))$ »,
  - « les matrices ont les mêmes ordres de multiplicité »
  - *et le navire amiral de la mauvaise foi* : « la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est intégrable sur $]0\,;\,1]$ ».

- De nombreuses personnes ne s'intéressent pas à **la continuité** de la fonction dont elles doivent étudier l'intégrabilité, au mépris de la méthode 10.1 ;

  et celles qui le font se créent parfois des problèmes là où il n'y en a pas, en ouvrant des crochets qui peuvent être fermés, comme dans « $\frac{\cos}{\sin}$ est continue sur $]0\,;\,1[$ » alors que $\frac{\cos}{\sin}$ n'a aucun problème de continuité en 1.

- N'oubliez pas la valeur absolue dans $\int_a^b \frac{u'}{u} = \Big[\ln|u|\Big]_a^b$, à moins de vérifier auparavant que u est positif sur $[a\,;\,b]$.

- On ne peut affirmer que « $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\ln(\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$ » sans préciser que $\sin(x)$ est un infiniment petit au voisinage de 0.

- Si $X(\Omega) = [\![0\,;\,n]\!]$, alors l'ensemble des $(X = i)$, pour $i \in [\![0\,;\,\boxed{k}\,]\!]$, **n'est pas** un système complet d'événements.

- Dans l'exercice 2, l'affirmation « $Y(\Omega) = [\![0\,;\,n-x]\!]$ » est fausse *(sauf si $x = 0$ en fait)* ! Il ne faut pas confondre la loi de Y avec la loi de Y conditionnée par $(X = x)$.

  De manière générale, les solutions de la question 2(a) de l'exercice 2 ont été très mal rédigées.

- Pour information, dans l'exercice 3, on pourrait noter X le nombre de variables $A_{i,i}$ de la diagonale de A qui valent 1, et ainsi $\mathrm{Tr}(A) = d - 2X$.

  Les variables $A_{i,i}$ étant indépendantes, on en déduit que X suit la loi $\mathscr{B}(d, \frac{1}{2})$, donc que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}d$, et par linéarité de l'espérance Ainsi $\mathbb{E}(A) = d - 2\mathbb{E}(X) = 0$.

  Mais cette méthode ne nous avance pas beaucoup pour les autres questions.

- Attention ! Pour une matrice quelconque $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il n'y a aucune raison que la diagonale de A^k soit formée des $a_{i,i}^k$ *(on sait seulement que c'est vrai si* A *est triangulaire, et encore ce n'est pas un théorème officiel)*, donc l'affirmation « $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,i}^k$ » est a priori fausse.
- L'affirmation « elles ont même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité » ne tient pas compte des ordres de multiplicité géométrique !
- Je rappelle l'implication suivante :

$$\left.\begin{array}{l}(x_1,\dots,x_n) \text{ est libre,}\\ (x_1,\dots,x_n,y) \text{ est liée,}\end{array}\right\} \Rightarrow y \in \operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n).$$

- Rappelons qu'il est nécessaire de conserver les équivalences dans la résolution de l'équation aux éléments propres

$$MX = \lambda X \ \boxed{\Longleftrightarrow}\ (\dots)\ \boxed{\Longleftrightarrow}\ X \in \operatorname{Vect}(\dots)$$

  pour se permettre de conclure l'égalité des ensembles $E_\lambda(M)\ \boxed{=}\ \operatorname{Vect}(\dots)$. Si jamais une implication $\Rightarrow$, ou un « donc », vient à se glisser dans le raisonnement, on n'a plus le droit qu'à l'inclusion $E_\lambda(M) \subset \operatorname{Vect}(\dots)$.
- Étudiez attentivement la solution de la dernière question du problème : on commence par prendre un $x \in E$ quelconque et on veut montrer que $\chi_f(f)(x) = 0_E$. Donc on construit tout le raisonnement *(dont en particulier le polynôme $X^p + \alpha_1 X^{p-1} + \cdots$)* à partir de ce x !

Exercice 1

Étudier l'intégrabilité sur $]0\ ;\ 1[$ des fonctions $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \mathrm{d}\,t$ et $x \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{\sin(t)} \mathrm{d}\,t$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une personne effectue du démarchage téléphonique auprès d'un panel de n correspondants : elle appelle une première fois chacune de ces n personnes.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0\ ;\ 1[$).
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus au cours de cette première vague d'appels.

1. Donner la loi de X *(et justifier votre résultat !)*
2. La personne rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - \mathrm{X}$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels.
   On note Y la variable aléatoire représentant le nombre d'interlocuteurs joints au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Donner les lois de Y conditionnées par X.
   (b) Prouver que $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   (On pourra justifier que $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$*.)*
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 3

Soit $(\mathrm{A}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes la loi de Rademacher, autrement dit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On considère la matrice aléatoire $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ dont les composantes sont les valeurs des variables $\mathrm{A}_{i,j}$.

1. Calculer l'espérance $\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^k\right)\right)$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Calculer $\mathbb{E}(\det(\mathrm{A}))$ et $\mathbb{V}(\det(\mathrm{A}))$.

Problème – Une preuve du théorème de Cayley-Hamilton

1. Montrer qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et sa transposée ont le même spectre et que leurs valeurs propres ont les mêmes ordres de multiplicité.
   Ces deux matrices ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$.
On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.
3. Pour toute valeur propre λ de la transposée ${C_Q}^\top$, donner son ordre de multiplicité géométrique ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

> *On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est **cyclique** si, et seulement si, il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.*

Dans toute la suite, f est un endomorphisme de E.

4. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.
5. On suppose que f est cyclique.
   Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
6. Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$ et que tout polynôme annulateur non nul de f est de degré au moins n.

7. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que
   - la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre ;
   - il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

8. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.
9. Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.
10. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

Une correction de l'exercice 1

énoncé

(i) ➟ La fonction sin est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;1]$, à valeurs dans $]0\,;+\infty[$, et ln est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, donc par composition, $\ln\circ\sin$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;1]$. De plus, sur cet intervalle

$$(\ln\circ\sin)' = \ln'\circ\sin\times\sin' = \frac{\cos}{\sin},$$

donc grâce au théorème fondamental de l'analyse, pour tout $x\in\,]0\,;1]$,

$$\int_1^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}\,t = \Big[\ln(\sin(t))\Big]_1^x = \ln(\sin(x)) - \ln(\sin(1)).$$

➟ ➔ Cette fonction $x\mapsto \int_1^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}\,t = \ln(\sin(x))-\ln(\sin(1))$ est donc en particulier continue sur $]0\,;1]$.

➔ De plus, $\sin(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\ln(\sin(x))\xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$ par composition des limites, d'où

$$\begin{aligned}\ln(\sin(x))-\ln(\sin(1)) &\underset{x\to 0}{=} \ln(\sin(x)) + o\left(\ln(\sin(x))\right)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \ln(\sin(x)),\end{aligned}$$

et enfin comme $\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim} x$ est un infiniment petit, on peut composer par ln, ce qui donne $\ln(\sin(x))\underset{x\to 0}{\sim}\ln(x)$, d'où

$$\ln(\sin(x))-\ln(\sin(1))\underset{x\to 0}{\sim}\ln(x).$$

Or on sait que ln est intégrable en 0, donc par équivalence, on en déduit que $x\mapsto\ln(\sin(x))-\ln(\sin(1))$ est aussi intégrable en 0.

➟ En résumé, on a prouvé que $x\mapsto\int_1^x\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}\,t$ est continue sur $]0\,;1]$ et intégrable en 0, donc elle est intégrable sur $]0\,;1]$, et fortiori sur $]0\,;1[$.

(ii) ➟ La fonction $t\mapsto\frac{\mathrm{e}^t}{\sin(t)}t$ est continue sur $]0\,;1]$ comme rapport de deux fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse (ou plutôt son corollaire) la fonction $x\mapsto\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{\sin(t)}\mathrm{d}\,t$ est une primitive sur $]0\,;1]$ de $t\mapsto\frac{\mathrm{e}^t}{t}$.

Cette primitive est par définition dérivable, donc a fortiori c'est une fonction $\boxed{\text{continue sur }]0\,;1]}$.

➟ Pour tout $x > 0$

$$\int_1^x \frac{e^t}{\sin(t)} dt = \int_1^x \frac{e^t - 1}{\sin(t)} dt + \int_1^x \frac{1}{\sin(t)} dt = \int_1^x \frac{e^t - 1}{\sin(t)} dt + \ln(x).$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{e^t - 1}{\sin(t)}$ est continue sur $]0\,;\,1]$, et tend vers 1 (voir le développement limité de l'exponentielle en 0) en 0, donc elle est intégrable sur $]0\,;\,1]$.
Ainsi l'intégrale généralisée $\int_1^x \frac{e^t-1}{\sin(t)} dt$ converge, ce qui signifie par définition que la fonction $\int_1^x \frac{e^t-1}{\sin(t)} dt$ a une limite finie quand x tend vers 0.
Donc a fortiori $\int_1^x \frac{e^t-1}{\sin(t)} dt$ est négligeable devant $\ln(x)$ (qui tend vers l'infini) quand x tend vers 0, et par conséquent

$$\int_1^x \frac{e^t}{\sin(t)} dt = \ln(x) + o(\ln(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x).$$

Enfin, comme ln est intégrable sur $]0\,;\,1]$, on peut conclure grâce au critère d'équivalence que $x \mapsto \int_1^x \frac{e^t-1}{\sin(t)} dt$ est intégrable sur $]0\,;\,1]$.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

1. On peut considérer l'expérience comme n répétitions de l'épreuve de l'appel téléphonique de la personne vers un correspondant. Ces n épreuves sont mutuellement indépendantes, et chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1-p$ (échec).
   On peut donc affirmer que la variable X considérée, qui représente donc le nombre de succès, suit donc une loi binômiale de paramètres (n, p), autrement dit $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
   Sachant l'événement $(X = i)$, pour la seconde série d'appels, il reste $n - i$ correspondants à appeler. Comme cette nouvelle série d'appels se fait dans les mêmes conditions que pour la question précédente, hormis le nombre de répétitions qui est maintenant égal à $n - i$, on peut affirmer que la variable Y suit la loi binomiale de paramètre $(n - i, p)$.

Autrement dit, $\mathbb{P}_{(X=i)}(Y=j) = \begin{cases} \dbinom{n-i}{j} p^j (1-p)^{n-i-j}, & \text{si } j \in [\![0, n-i]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(b) J'estime limpide que $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par la variable X :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}_{(X=i)}(Z=k) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}_{(X=i)}(Y=k-i) \quad \textit{(car sachant } (X=i), \ (Z=k)=(X+Y=k) = (Y=k-i)\textit{)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i) \times \binom{n-i}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n-i-(k-i)} \\
&\qquad + \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}(X=i) \times 0 \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \times \binom{n-i}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} p^k (1-p)^{2n-k-i}
\end{aligned}$$

Or, comme le suggère l'énoncé,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{(k-i)!\big((n-i)-(k-i)\big)!} \\
&= \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!} \\
&= \frac{k!}{i!(k-i)!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{k}{i} \times \binom{n}{k},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\times\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k-i}\\ &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{2(n-k)}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(1-p)^{k-i}\\ &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{2(n-k)}\big(1+1-p\big)^k\\ &= \binom{n}{k}\big(p(2-p)\big)^k\big((1-p)^2\big)^{n-k}.\end{aligned}$$

Je vous laisse vérifier que $\big(p(2-p)\big)+\big((1-p)^2\big)=1$, pour pouvoir conclure que $\boxed{\text{Z suit une loi binomiale de paramètre } (n, p(2-p))}$.

(c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, on sait que

- $E(Z) = np(2-p)$,
- et $V(Z) = np(2-p)(1-p(2-p)) = np(2-p)(p-1)^2$.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

Calculs préliminaires

Pour tout $(i,j)\in[\![1\ ;\ n]\!]^2$,

$$\mathbb{E}\left(A_{i,j}\right)=\frac{1}{2}\times(-1)+\frac{1}{2}\times 1=0.$$

De plus, $A_{i,i}^2=1$, donc $\mathbb{E}\left(A_{i,i}^2\right)=1$, et $A_{i,j}^3=A_{i,j}$, donc $\mathbb{E}\left(A_{i,i}^3\right)=0$.

1. On sait que l'espérance est linéaire, donc

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}\left(A\right)\right)=\sum_{i=1}^{d}E(A_{i,i})=0.$$

Puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\operatorname{Tr}\left(A^2\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d}(A^2)_{i,i}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} A_{i,j}\times A_{j,i}\right) \quad \textit{(avec la formule du produit matriciel)} \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} A_{i,j}\times A_{j,i}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} \mathbb{E}\left(A_{i,j}\times A_{j,i}\right) \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant d} \mathbb{E}\left(A_{i,j}\times A_{j,i}\right) + \sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left(A_{i,i}^2\right) \\
&= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant d} \mathbb{E}\left(A_{i,j}\right)\times\mathbb{E}\left(A_{j,i}\right) \quad \textit{(car pour } i\neq j,\ A_{i,j} \textit{ et } A_{j,i} \textit{ sont indépendantes)} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{d} 1 \quad \textit{(d'après le calcul préliminaire)} \\
&= d \quad \textit{(car on a vu que } \mathbb{E}\left(A_{i,j}\right)=0\textit{)}.
\end{aligned}$$

En réitérant le début du raisonnement précédent, on obtient que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\operatorname{Tr}\left(A^3\right)\right) &= \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant d} \mathbb{E}\left(A_{i,j}\times A_{j,k}\times A_{k,i}\right) \\
&= \sum_{i(=j=k)=1}^{d} \mathrm{E}(A_{i,i}^3) + \sum_{\substack{\text{au moins deux in-}\\ \text{dices distincts}}} \mathbb{E}\left(A_{i,j}\right)\mathbb{E}\left(A_{j,k}\right)\mathbb{E}\left(A_{k,i}\right) \\
&= 0 \quad \textit{(car } A_{i,i}^3 = A_{i,i}\textit{, et avec le calcul préliminaire).}
\end{aligned}$$

L'espérance de la trace de A^4 est calculée par le même principe

$$\mathbb{E}\left(\operatorname{Tr}(A^4)\right) = \sum_{(i,j,k,\ell)\in[\![1\,;d]\!]^4} \mathbb{E}\left(A_{i,j}\times A_{j,k}\times A_{k,\ell}\times A_{\ell,i}\right),$$

et ici, le terme général est nul sauf si $(i,j)=(k,\ell)$ ou $i=j=k=\ell$, auquel cas il vaut 1, ce dont on déduit que

$$\mathbb{E}\left(\operatorname{Tr}(A^4)\right) = d^2.$$

2. Le développement de $\det(A)$ par rapport à sa première colonne montre que $\det(A) = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+1} A_{i,1}\Delta_{i,1}$, où $\Delta_{i,1}$ est le mineur que vous savez.
Dans $\Delta_{i,1}$, la variable aléatoire $A_{i,1}$ n'intervient pas, donc par le lemme des coalitions, les variables $A_{i,1}$ et $M_{i,1}$ sont indépendantes.
Par conséquent

$$\begin{aligned} E(\det(A)) &= \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+1} \mathbb{E}\left(A_{i,1}\right) \mathbb{E}\left(\Delta_{i,1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+1} \underbrace{\mathbb{E}\left(A_{i,1}\right)}_{=0} \mathbb{E}\left(\Delta_{i,1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Grâce à la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(\det(A)) = \mathbb{E}\left(\det(A)^2\right) - (\mathbb{E}(\det(A)))^2,$$

ainsi, comme on vient de voir que l'espérance du déterminant de A est nulle, on obtient

$$\mathbb{V}(\det(A)) = \mathbb{E}\left(\det(A)^2\right)$$

ainsi, en utilisant derechef le développement de $\det(A)$ par rapport à sa première colonne :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\det(A)) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+1} A_{i,1}\Delta_{i,1}\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+1} A_{i,1}\Delta_{i,1}\right) \times \left(\sum_{j=1}^{d} (-1)^{j+1} A_{j,1}\Delta_{j,1}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} (-1)^{i+j+2} A_{i,1}A_{j,1}\Delta_{i,1}\Delta_{j,1}\right) \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} (-1)^{i+j+2} \mathbb{E}\left(A_{i,1}A_{j,1}\Delta_{i,1}\Delta_{j,1}\right) \quad \textit{(par linéarité de l'espérance).} \end{aligned}$$

De nouveau grâce au lemme des coalitions, comme les déterminants $\Delta_{i,1}$ et $\Delta_{j,1}$ ne contiennent aucune variable $A_{k,1}$ par définition, le produit $A_{i,1}A_{j,1}$ dans la somme ci-dessus est indépendant du produit $\Delta_{i,1}\Delta_{j,1}$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\det(A)) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} (-1)^{i+j+2}\mathbb{E}\left(A_{i,1}A_{j,1}\right)\mathbb{E}\left(\Delta_{i,1}\Delta_{j,1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left(A_{i,1}^2\right)\mathbb{E}\left(\Delta_{i,1}^2\right) \quad \textit{(par indépendance de } A_{i,1} \textit{ et } A_{j,1} \textit{ si } i\neq j\textit{, et sachant que leur espérance est nulle)} \\ &= \sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left(\Delta_{i,1}^2\right).\end{aligned}$$

Chaque déterminant $\Delta_{i,1}$ est le déterminant d'une matrice aléatoire de format $d-1$. Pour souligner la taille du déterminants, notons $\mathbb{V}_d(\det(A_d))$ au lieu de $\mathbb{V}(\det(A))$.

La relation ci-dessus s'écrit alors $\mathbb{V}_d(\det(A)) = d\mathbb{V}_{d-1}(\det(A_{d-1}))$.

Comme $\mathbb{V}_1$ est la variance de la matrice constituée de l'unique élément $A_{1,1}$, on a $\mathbb{V}_1 = E(A_{1;1}^2) = 1$.

On en déduit par récurrence que

$$\mathbb{V}_d(\det(A_d)) = d!.$$

Une correction du problème

énoncé

1. Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$,

$$\lambda I_n - M^\top = \lambda {I_n}^\top - M^\top = (\lambda I_n - M)^\top,$$

or transposer une matrice ne change pas son déterminant, donc

$$\chi_{M^\top}(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - M^\top\right) = \det\left((\lambda I_n - M)^\top\right) = \det(\lambda I_n - M) = \chi_M(\lambda),$$

ainsi $M^\top$ et M ont le même polynôme caractéristique, ce qui prouve qu'elles ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité algébriques.

De la même manière, transposer une matrice ne change pas son rang, donc pour chaque valeur propre λ commune à M et $M^\top$,

$$\begin{aligned}\dim(M-\lambda I_n) &= n - \operatorname{rg}(M-\lambda I_n) \quad \textit{(avec le théorème du rang)} \\ &= n - \operatorname{rg}\left((M-\lambda I_n)^\top\right) = n - \operatorname{rg}\left(M^\top - \lambda I_n\right) \\ &= \dim\left(M^\top - \lambda I_n\right),\end{aligned}$$

ce qui prouve que les valeurs propres de M et $M^\top$ ont aussi même ordre de multiplicité géométrique.
En revanche une matrice et sa transposée n'ont pas forcément les mêmes sous-espaces propres, par exemple, si on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M, mais en revanche

$$M^\top \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas vecteur propre de $M^\top$.

2. Je vous laisse revoir la correction de cet exercice du cours, puis affirmer que le polynôme caractéristique de C_Q est carrément le polynôme Q.
De plus, grâce à la première question, on peut affirmer que Q est aussi le polynôme caractéristique de la matrice ${C_Q}^\top$.
3. Je vous laisse retrouver dans la correction de cet autre exercice du cours le fait que les ordres de multiplicité géométrique de C_Q sont forcément égaux à 1, et donc d'après la première question, c'est aussi le cas des ordres de multiplicité géométrique des valeurs propres de sa transposée.
Ainsi, pour toute valeur propre λ de ${C_Q}^\top$, il suffit d'un seul vecteur propre associé pour former une base du sous-espace propre.
Prenons une valeur propre λ de ${C_Q}^\top$. Ce nombre λ est donc une racine du polynôme caractéristique, c'est-à-dire de Q, ainsi $Q(\lambda) = 0$, autrement dit

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0.$$

Et là, dans un élan de génie, on remarque qu'en notant X la colonne

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix},$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
{C_Q}^\top \times X_\lambda &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ -a_0 - a_1\lambda - \cdots - a_{n-1}\lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ -Q(\lambda) + \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ \lambda^n \end{pmatrix} \\
&= \lambda\, X_\lambda,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que X_λ (qui est bien non nul) est un vecteur propre de ${C_Q}^\top$ associé à la valeur propre λ, donc ce vecteur forme à lui tout seul une base du sous-espace propre associé qui est une droite vectorielle.

4. ➟ Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est cyclique, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{B} = \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E, et en notant $-a_0, -a_1, \ldots, -a_{n-1}$ les coordonnées de $f^n(x_0)$ dans cette base, on obtient que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice C_Q, où Q est le polynôme unitaire $X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

   ➟ Réciproquement, supposons qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle f admet pour matrice C_Q, alors $e_2 = f(e_1)$, puis $e_3 = f(e_2) = f^2(e_1)$, et par récurrence pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$, $e_k = f^{k-1}(e_1)$. Par conséquent la base $\mathscr{B}$ est la famille $\big(e_1, f(e_1), \ldots, f^{n-1}(e_1)\big)$, ce qui prouve que f est cyclique.

5. Dans le cas où f est cyclique, alors on vient de voir qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où $Q = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

   On en déduit :

   ➟ d'après la question 2, que le polynôme caractéristique de f est Q ;

   ➟ et d'après la question 1, que les valeurs propres de f, qui sont aussi celles de C_Q, sont les mêmes que celles de ${C_Q}^\top$ avec les mêmes ordres de multiplicité.

   Ainsi, si f est diagonalisable, alors (d'après le cours) son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ tandis que les ordres de multiplicité géométriques et algébriques sont égaux pour chaque valeur propre.

Comme d'après la question 3 les ordres de multiplicité géométrique sont égaux à 1, on a prouvé que les valeurs propres de f sont d'ordres de multiplicité algébriques 1, autrement dit que les racines du polynôme caractéristique de f sont simples.

Réciproquement, si le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples, alors le cours nous permet d'affirmer que f est diagonalisable.

6. ➟ Supposons que la famille $(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$ est liée, alors il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

   Mais dans ce cas pour tout vecteur $x \in E$, $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) = 0_E$, donc pour tout vecteur $x \in E$, la famille $\left(f^k(x)\right)_{k \in [\![0\,;\,n-1]\!]}$ est liée, ce qui nous empêche de trouver une base de E de cette forme, donc empêche f d'être cyclique.

   On a prouvé par la contraposée que si f est cyclique, alors la famille $(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$ est libre.

   ➟ Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k^k$ un polynôme non nul, de degré $d < n$ annulateur de f, alors $\sum_{k=0}^{d} a_k f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc la famille $\left(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^d\right)$ est liée, et a fortiori la famille $(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$ qui la contient est aussi liée, ce qui empêche f d'être cyclique d'après le point précédent.

   On a prouvé par la contraposée que si f est cyclique, alors tout polynôme non nul annulateur de f est de degré au moins n.

7. Soit x un vecteur non nul de E.

   Alors l'ensemble des entiers $d \in \mathbb{N}$ tel que $\left(f^k(x)\right)_{k \in [\![0\,;\,d-1]\!]}$ est libre est

   ➟ majoré par n (car un espace vectoriel de dimension finie ne peut pas contenir de famille libre de cardinal strictement supérieur à sa dimension),

   ➟ et non vide car il contient 1 puisque, le vecteur x étant non nul, la famille $(x) = \left(f^k(x)\right)_{k \in [\![0,;\,1-1]\!]}$ est libre,

   donc il contient un plus grand élément que l'on peut appeler p et qui vérifie :

   ➟ la famille $\left(f^k(x)\right)_{k \in [\![0,;\,p-1]\!]}$ est libre ;

- la famille $(x) = \left(f^k(x)\right)_{k\in[\![0,;p]\!]}$ est liée, donc $f^p(x)$ est dans $\mathrm{Vect}\left(f^k(x)\right)_{k\in[\![0,;p-1]\!]}$, autrement dit il existe $\left(\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1}\right) \in \mathbb{K}^p$ tel que $f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1}(-\alpha_k)f^k(x)$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k f^k(x) + f^p(x) = 0_{\mathrm{E}}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

8. On vient de voir que $f^p(x) = f\left(f^{p-1}(x)\right)$ est dans $\mathrm{Vect}\left(x, f(x),\dots,f^{p-1}(x)\right)$, donc

$$f\left(\mathrm{Vect}\left(x,f(x),\dots,f^{p-1}(x)\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(f(x),f^2(x),\dots,f^p(x)\right) \subset \mathrm{Vect}\left(f(x),\dots,f^p\right.$$

donc $\mathrm{Vect}\left(x,f(x),\dots,f^{p-1}(x)\right)$ est bien stable par f.

9. Grâce au théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $\left(x,f(x),\dots,f^{p-1}(x)\right)$ en une base $\mathscr{B}$ de E, et dans cette base, comme

$$f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1}(-\alpha_k)f^k(x),$$

la matrice de f sera, en notant $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^p + \sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k\mathrm{X}^k$, de la forme

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{C_Q} & \mathrm{B} \\ 0_{n-p,p} & \mathrm{D} \end{pmatrix}.$$

Mais alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, connaissant le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs,

$$\begin{aligned}\chi_f(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda\mathrm{I}_p - \mathrm{C_Q} & -\mathrm{B} \\ (0) & \lambda\mathrm{I}_{n-p} - \mathrm{D}\end{vmatrix} \\ &= \chi_{\mathrm{C_Q}}(\lambda) \times \chi_{\mathrm{D}}(\lambda) \\ &= \mathrm{Q}(\lambda) \times \chi_{\mathrm{D}}(\lambda) \ \textit{(d'après la question 2)},\end{aligned}$$

donc le polynôme Q divise χ_f, C.Q.F.D.

10. Montrons que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.
Pour cela prenons un vecteur x de E, et montrons que $\chi_f(f)(x) = 0_E$.

- Si $x = 0_E$, alors on sait déjà que son image par $\chi_f(f)$, comme par n'importe quel endomorphisme, est nulle.
- Si $x \neq 0_E$, alors *(on reprend les résultats des questions précédentes)* il existe $p \in \mathbb{N}^*$, et $\left(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}\right) \in \mathbb{K}^p$ tels que :
  - le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k + X^p$ divise χ_f (d'après la question 9) ;
  - et $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) + f^p(x) = 0_E$, autrement dit $Q(f)(x) = 0_E$ (d'après la question 7).

  Par conséquent, il existe un polynôme B tel que $\chi_f = B \times Q$.
  Ainsi

$$\begin{aligned}
\chi_f(f)(x) &= \big(B \times Q\big)(f)(x) = (B(f) \circ Q(f))(x) = B(f)(Q(f)(x)) \\
&= B(f)(0_E) \ \textit{(voir deux lignes plus haut)} \\
&= 0_E, \ \textit{(TADAÂÂÂM)}.
\end{aligned}$$