Le rapport du Jaury

Mes abréviations

« TE » : Type-Error ;
« AI » : argumentation insuffisante ;
« VC » : voir le corrigé ;
« AR » : améliorer la rédaction ;
« ASP » : affirmation sans preuve ;
« CP » : je ne comprends pas ;
« MF » : mauvaise foi ;
« N'importe quoi ! » : n'importe quoi !

Les questions marquées par un 🎁 font partie de la voiture balai de la difficulté mathématique de PC ; tandis que les questions marquées par un 🚢 sont des questions très classiques et récurrentes…
Parfois, un 🔥 peut indiquer une question difficile.

⚠ *Rappelons que les résultats que vous obtenez n'ont aucune importance, hormis si vous devez les utiliser dans les questions suivantes, seuls les arguments et preuves que vous fournirez pour obtenir ces résultats sont importants.*
En théorie, chaque étape de vos calculs, chaque égalité, chaque « donc », etc, doit être justifiée par un argument !

Les préconisations générales :

- *utiliser un brouillon pour vos recherches, et proposer le produit fini sur votre copie* (assiste-t-on aux recherches et répétitions d'un artiste ?) ;
- *soigner la rédaction, l'orthographe, la grammaire, le sens précis (!) des mots et des phrases utilisées ;*
- *en particulier faire l'effort de rédiger une conclusion de vos raisonnements (en la comparant à la question posée) ;*
- *et utiliser un français correct : épargner à la personne qui corrige les raisonnements qui finissent par « donc absurde » ou « donc impossible » et les flèches au milieu des phrases.*

- Approximations, absurdités, et erreurs grossières :
  - « $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}k^{3/2}} \sim \frac{1}{k^{3/2}}$ »,
  - « $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f_k converge simplement vers la fonction nulle »,
  - « $\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin(\pi x) = 0$ »,
  - « $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x+1) = f(x)$, donc f est constante sur $\mathbb{R}$ »,
  - « F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc intégrable »,
  - « $\frac{\pi^2}{6}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ »,

(mis à jour le 20 décembre 2024)

- g et f désignant des fonctions : « g est sommable donc f converge simplement », « f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ »,
- « $\left\|g'\right\|_\infty^{\mathbb{R}}$ est sommable », « $\sum \left\|g'\right\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge uniformément »,
- « F est continue car $F' = (\dots)$ »,
- si F est une primitive de f, « $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = [|F(t)|]_a^b$ »
- « $\operatorname{Ker}(\theta)$ n'est pas de dimension finie car il contient un nombre infini de vecteurs »,

- On ne se rabat sur la convergence uniforme ou normale sur tout segment de I que lorsqu'on a échoué à l'établir sur I tout entier !
- Sauf urgence ou nécessité, on ne manipule pas d'inégalités strictes, mais on se contente des inégalités larges.
- Trop souvent des élèves ont donné la norme infini à partir d'un tableau des variations où manquent les limites aux extrémités !
- Il suffit de dire que f est continue sur $\mathbb{R}$ pour pouvoir affirmer l'existence de $\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$ pour tout réel x, intégrale qui pour tout $x \in \mathbb{R}$ est égale à $\phi(x+1) - \phi(x)$, où ϕ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

  Il est inutile de dire que f est continue sur $[x\ ;\ x+1]$ et de parler de primitive sur $[x\ ;\ x+1]$.

Problème

Notations

On note $\mathscr{C}^0$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}^0_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0$ formé par les fonctions périodiques de période 1.
Dans tout ce problème, on désigne par θ l'application qui a toute fonction f de $\mathscr{C}^0$ associe la fonction $\theta(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (\theta(f))(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t.$$

Partie I : quelques propriétés des images

A. Exemples.

1. expliciter $(\theta(f))(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1$;
2. expliciter $(\theta(f))(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^k$ (où $k \in \mathbb{N}^*$).

B. Variations de $\mathrm{F} = \theta(f)$.

On prend désormais une fonction arbitraire f de $\mathscr{C}^0$, et on note $\theta(f) = \mathrm{F}$.

1. Montrer que la fonction $\theta(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donner sa dérivée en fonction de f.
2. Montrer que si la fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $\mathrm{J}_{x_0} = [x_0, +\infty[$, alors la fonction $\theta(f)$ est croissante (respectivement décroissante) sur J_{x_0}.
3. Montrer que la fonction $\theta(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f appartient à $\mathscr{C}^0_1$.
4. Expliciter $\theta(f)$ dans le cas où f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(\pi t)|$.

On suppose de nouveau que f désigne une fonction arbitraire de $\mathscr{C}^0$.

5. On suppose que la fonction f admet une limite L_1 en $+\infty$.
   Montrer que la fonction $\theta(f)$ admet une limite L_2 (que l'on explicitera) en $+\infty$ (on pourra étudier d'abord le cas où $\mathrm{L}_1 = 0$).

C. **Étude d'un exemple.** Soit $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kt^2}}{k^2+1}$, pour t réel.

1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?
4. Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction f (on ne cherchera pas à préciser $f(0)$).
5. La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
6. (a) Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction $\theta(f)$.
   (b) La fonction $\theta(f)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
   (on pourra comparer $\theta(f)(x)$ et $f(x)$ pour x appartenant à $[0 ; +\infty[$).

Partie II : l'endomorphisme θ

D. L'endomorphisme θ est-il surjectif ?

E. **Sur le noyau de θ.**

1. Montrer que f est dans $\mathrm{Ker}(\theta)$ si, et seulement si, $f \in \mathscr{C}_1^0$ et $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}\, t = 0$.
2. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note c_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $c_k(t) = \cos(2\pi k t)$.
   (a) Vérifier que c_k appartient à $\mathrm{Ker}(\theta)$.
   (b) $\mathrm{Ker}(\theta)$ est-il de dimension finie ?
3. Soit $f \in \mathscr{C}_1^0$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$.
   À l'aide d'une intégration par parties, étudier la nature de la série de terme général W_n selon que f appartient à $\mathrm{Ker}(\theta)$ ou non.

F. **Sur le spectre de θ.**
On note $Sp(\theta)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de l'endomorphisme θ.
Si a est un nombre réel fixé, on note h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(t) = e^{at}$.

1. Montrer que chaque h_a est un vecteur propre de l'endomorphisme θ.
2. Étudier les variations de la fonction $u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$ pour $u \in \mathbb{R}^*$.
3. Expliciter l'ensemble $Sp(\theta) \cap \mathbb{R}^+$.

Partie III : Une suite de fonctions propres de l'endomorphisme θ

Soit λ une valeur propre strictement positive de l'endomorphisme θ.
On note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note I_k l'intervalle $]2k\pi, (2k+1)\pi[$.
   On pose
   $$\forall t \in I_k, \quad g(t) = t\left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right) + \ln\left(\frac{\sin(t)}{\lambda t}\right).$$
   (a) Étudier la fonction $t \mapsto t\sin(2t) - t^2 - \sin^2(t)$ sur I_k et préciser son signe.
   (b) Montrer que g définit une bijection de I_k sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.
2. Soit $\gamma = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$.
   (a) Calculer $\int_x^{x+1} e^{\gamma t}\,dt$ pour tout réel x.
   (b) À quelle condition nécessaire et suffisante la fonction $t \mapsto e^{at}\cos(bt)$ est-elle un vecteur propre de l'endomorphisme θ associé à la valeur propre λ ?
3. En déduire une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres de l'endomorphisme θ.

Une correction du problème

énoncé

Partie I : quelques propriétés des images

A. 1. Pour $f = x \mapsto 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\theta(f)(x) = \int_x^{x+1} 1\mathrm{d}t = \Big[t\Big]_x^{x+1} = (x+1) - x = 1.$$

(grâce au théorème fondamental de l'analyse, car $x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$)

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $f = x \mapsto x^k$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\theta(f)(x) = \int_x^{x+1} t^k \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{k+1}t^{k+1}\right]_x^{x+1} = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}.$$

La formule est encore valable pour $k = 0$, ce qui unifie les deux questions.

B. 1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive ϕ sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x,

$$\theta(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t = \Big[\phi(t)\Big]_x^{x+1} = \phi(x+1) - \phi(x).$$

Comme la dérivée f de ϕ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut dire que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$, d'où, par composition avec la fonction $x \mapsto x+1$ qui est $\mathscr{C}^1$, puis somme de fonctions $\mathscr{C}^1$, le fait que $\theta(f)$ est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. La formule ci-dessus donne en outre

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \theta(f)'(x) = 1 \times \phi'(x+1) - \phi'(x) = f(x+1) - f(x).$$

Donc, si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel x, $f(x+1) - f(x) \geqslant 0$, donc $\theta(f)'$ est positive sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $\theta(f)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(Gageons que l'adaptation de ce raisonnement au cas où la fonction est décroissante ne vous posera aucun problème)

3. La dérivée de $\theta(f)$ obtenue ci-dessus donne directement l'équivalence entre la constance de $\theta(f)$ et la 1-périodicité de f.

4. La fonction $f : t \mapsto |\sin(\pi t)|$ est continue par composition des fonctions continues $t \mapsto \pi t$, sin, et valeur absolue.
   Puis f est bien 1-périodique puisque

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\quad f(t+1) &= |\sin(\pi(t+1))| = |\sin(\pi t + \pi)| \\ &= |-\sin(\pi t)| = |\sin(\pi t)| = f(t),\end{aligned}$$

   donc par la question précédente son image par θ est constante, ainsi pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) &= \int_0^1 |\sin(\pi t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(\pi t)\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

5. **Avec l'indication de l'énoncé.** ➟ Supposons que f tend vers 0 en $+\infty$, et montrons que $\theta(f)$ tend aussi vers 0.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Comme f tend vers 0 en $+\infty$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x \geqslant \mathrm{A}$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon$.
   Ainsi pour tout réel $x \geqslant \mathrm{A}$,

$$\begin{aligned}|\theta(f)(x)| &= \left|\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_x^{x+1} |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \textit{(par l'inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \int_x^{x+1} \varepsilon\mathrm{d}t \quad \textit{(par croissance de l'intégrale)} \\ &= \varepsilon(x+1-x) = \varepsilon,\end{aligned}$$

   ce qui prouve que $\theta(f)$ tend aussi vers 0.
   ➟ Si f tend vers le réel L_1 en $+\infty$, alors $f - \mathrm{L}_1$ tend vers 0, donc d'après la question précédente, $\theta(f - \mathrm{L}_1)$ tend aussi vers 0.

Or pour tout réel x,

$$\theta(f - \mathrm{L}_1)(x) = \int_x^{x+1} (f(t) - \mathrm{L}_1)\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x+1} \mathrm{L}_1 \mathrm{d}t$$
$$= \theta(f)(x) - \mathrm{L}_1.$$

donc $\theta(f) - \mathrm{L}_1$ tend vers 0, et par conséquent $\theta(f)$ tend aussi vers L_1.

Avec le théorème de convergence dominée, et la caractérisation séquentielle de la limite *(sur une idée de Clément Thiessard).*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui tend vers $+\infty$.

Montrons que $\theta(f)(x_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{L}_1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\theta(f)(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x_n + u)\mathrm{d}u$$ *(grâce au changement de variable $t = x_n + u$).*

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in [0\ ;\ 1]$, $g_n(u) = f(x_n + u)$.

- Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g_n est continue sur $[0\ ;\ 1]$.
- Pour tout $u \in [0\ ;\ 1]$, $x_n + u \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, donc par composition des limites, $g_n(u) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{L}_1$, autrement dit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante $u \mapsto \mathrm{L}_1$.
- La fonction limite $u \mapsto \mathrm{L}_1$ est sacrément continue sur $[0\ ;\ 1]$.
- La fonction f tend vers une limite finie en $+\infty$, donc elle est bornée sur un voisinage de $+\infty$ de la forme $[\mathrm{A}\ ;\ +\infty[$, mais comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, elle est aussi bornée sur le segment $[0\ ;\ \mathrm{A}]$.

  Donc f est bornée sur $[0\ ;\ +\infty[$.

  On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in [0\ ;\ 1]$,

  $$|g_n(u)| = |f(x_n + u)| \leqslant \|f\|_\infty^{[0\,;\,+\infty[},$$

  et la fonction constante $u \mapsto \|f\|_\infty^{[0\,;\,+\infty[}$ est intégrable sur $[0\ ;\ 1]$.

Toutes les conditions du théorème de convergence dominée sont vérifiées, donc on peut affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \mathrm{L}_1 \mathrm{d}u = \mathrm{L}_1,$$

autrement dit

$$\theta(f)(x_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{L}_1.$$

On a prouvé que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, $\theta(f)(x_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{L}_1$, donc par caractérisation séquentielle de la limite, on peut conclure que $\theta(f)$ tend vers L_1 en $+\infty$.

C. Étude d'un exemple.

1. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, notons $f_k : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-kt^2}}{k^2+1}$.
   Il est clair que $\|f_k\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{k^2+1} \leqslant \frac{1}{k^2}$, donc par domination par une suite de Riemann sommable, on établit que $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, $\sum f_k$ converge uniformément, d'où a fortiori simplement, sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que :
   - pour tout réel x, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ est un réel, donc f est définie sur $\mathbb{R}$;
   - et toutes les fonctions f_k étant continues, leur somme uniforme $f = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k$ est encore continue sur $\mathbb{R}$.
2. - Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, f_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec
     $$\forall t\in\mathbb{R},\quad f_k'(t) = \frac{-2kt}{k^2+1}\mathrm{e}^{-kt^2} = \frac{-2k}{k^2+1}t\mathrm{e}^{-kt^2}.$$
   - L'étude (que je ne détaille pas) de la fonction $g_k : t \mapsto t\mathrm{e}^{-kt^2}$ donne $\|g_k\|_\infty^{\mathbb{R}} = g_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \sqrt{\frac{e}{2k}}$, et donc
     $$\left\|f_k'\right\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{+2k}{k^2+1}\times\sqrt{\frac{e}{2k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\mathrm{e}}\times\frac{\sqrt{k}}{k^2} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$
     Ainsi par domination, $\sum f_k'$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
   - Comme on sait déjà que $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, le théorème de dérivation des séries de fonctions permet donc de conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
     On peut de plus affirmer que
     $$f' = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'.$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(t) \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} 0$, et on sait que $\sum f_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ dont $+\infty$ est une extrémité, donc on peut appliquer le théorème de la double-limite qui nous donne

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{t \to +\infty} f_k(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

4. On a déjà dit que f est paire (comme les f_k), de limite nulle en l'infini, de dérivée

$$f' = t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k\,t}{k^2+1} \mathrm{e}^{-k\,t^2}$$

négative sur $[0\ ;\ +\infty[$, et nulle en 0.

On a donc une fonction que l'on peut qualifier un peu légèrement de « en cloche ».

5. **Première méthode :** on va montrer que $f(t) \underset{t \to \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui revient à prouver que $t^2 f(t) \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} 0$.

   Pour tout $t \in \,]0\ ;\ +\infty[$, $t^2 f(t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-kt^2}}{k^2+1}$

   - La fonction $\alpha : t \mapsto t^2 \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle par croissances comparées en $\pm\infty$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$ *(ce résultat tacite n'est pas explicitement au programme, mais ça doit passer sur une copie bien rédigée...)*

     Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en notant $u_k : t \mapsto \frac{t^2 \mathrm{e}^{-kt^2}}{k^2+1}$,

     $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |u_k(t)| = \frac{\alpha(t)}{k^2+1} \times \mathrm{e}^{-(k-1)t^2} \leqslant \frac{\alpha(t)}{k^2+1} \leqslant \frac{\|\alpha\|_\infty^{\mathbb{R}}}{k^2+1},$$

     donc $\|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{\|\alpha\|_\infty^{\mathbb{R}}}{k^2+1}$, et par conséquent

     $$\|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}} \underset{k \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

     D'où la convergence normale, et a fortiori la convergence uniforme, sur $\mathbb{R}$ de $\sum u_k$.

- On n'a plus qu'à remarquer que $u_k(t) \xrightarrow[t\longrightarrow\pm\infty]{} 0$, et appliquer le théorème de la double limite comme dans la question C.3 pour conclure la limite souhaitée.

Ainsi f est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $\pm\infty$, donc par domination, puis grâce à sa continuité sur $\mathbb{R}$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Deuxième méthode : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, par croissance de l'exponentielle, $\mathrm{e}^{-kt^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$, donc $0 \leqslant f_k(t) \leqslant \frac{1}{k^2+1} \times \mathrm{e}^{-t^2} \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, donc, les deux membres étant sommables,

$$0 \leqslant f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}\right) \times \mathrm{e}^{-t^2},$$

d'où $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)$.

Or la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

- soit parce qu'elle définit l'intégrale de Gauss, mais ce n'est pas au programme,
- soit par continuité sur $\mathbb{R}$ et domination par $\frac{1}{t^2}$, voire $\mathrm{e}^{-|t|}$, en $\pm\infty$.

donc par domination f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Avec le théorème d'intégration terme à terme avec l'intégrale de Gauss h je vous laisse vérifier les trois premières conditions du théorème en question.

De plus

$$\int_{\mathbb{R}} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2+1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2+1} \times \sqrt{\frac{\pi}{k}}$$
$$\underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{2,5}}\right).$$

Donc ce théorème nous permet d'affirmer que $f = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ *(et qu'en plus on peut intégrer terme à terme, mais ici on s'en fiche).*

6. (a) La fonction F est, comme f, de limite nulle en $+\infty$ (question B.5) et décroissante sur $[0, +\infty[$ (question B.2).

Par ailleurs, f est paire donc par le changement de variable $u=-t$, on obtient pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\theta(f)(-x) &= \int_{-x}^{-x+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x}^{x-1} f(-u)(-\mathrm{d}u)\\ &= \int_{x-1}^{x} f(u)\mathrm{d}u = f(x-1),\end{aligned}$$

donc la fonction $\square \mapsto \theta(f)\left(\square - \frac{1}{2}\right)$ est paire, ce qui montre que le graphe de $\theta(f)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1/2$.

De plus, encore grâce à la question B.2, comme f est paire

$$\theta(f)'\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ainsi le graphe de F est aussi « en cloche » centrée sur la droite d'équation $x=-1/2$.

(b) La fonction f étant décroissante (et positive) sur $[0\ ;+\infty[$, on a pour tout réel x positif,

$$0 \leqslant \theta(f)(x) = \int_{x}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{x}^{x+1} f(x)\mathrm{d}t = f(x) \quad \textit{(par croissance de l'intégrale),}$$

donc $\theta(f)$ est continue sur $[0\ ;+\infty[$, positive, et dominée par une fonction intégrable sur $[0\ ;+\infty[$. C'est donc elle même une fonction intégrable sur $[0\ ;+\infty[$.

Sur $]-\infty\ ;0]$, f est croissante et comme ci-dessus $\theta(f)$ est dominée par $x \mapsto f(x+1)$ qui reste intégrable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty\ ;0]$.

On peut conclure que $\theta(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Partie II : l'endomorphisme θ

D. L'application θ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0$, mais on a vu que $\mathrm{I}m(\theta) \subset \mathscr{C}^1$. Or la fonction $x \mapsto |x|$ est dans $\mathscr{C}^0$, mais pas dans $\mathscr{C}^1$, c'est donc une fonction de $\mathscr{C}^0$ qui n'admet pas d'antécédent par θ.

Ainsi θ n'est pas un endomorphisme surjectif de $\mathscr{C}^0$.

E. 1. ➟ Supposons $f \in \mathrm{Ker}(\theta)$.

Alors $\mathrm{F} = \theta(f)$ est nulle, donc en particulier sa dérivée $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ (voir B.1) est aussi nulle, ce qui prouve que $f \in \mathscr{C}_1^0$.

De plus, en particulier $\theta(f)(0) = 0$, autrement dit $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$.

➟ Réciproquement, si $f \in \mathscr{C}_1^0$ alors $\mathrm{F} = \theta(f)$ est constante (question B.3), or cette constante vaut $\mathrm{F}(0)$, et elle est nulle si $\int_0^1 f = 0$.

On a ainsi prouvé que

$$\mathrm{Ker}(\theta) = \left\{ f \in \mathscr{C}_1^0 \mid \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction c_k est clairement continue et 1-périodique, et de plus

$$\int_0^1 c_k(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{k\,2\pi} \sin(k\,2\pi\,t \right]_0^1 = 0,$$

donc d'après la question précédente $c_k \in \mathrm{Ker}(\theta)$.

(b)

> *Il est un exercice classique de montrer que la famille des c_k est libre, je vous laisse adapter la correction de cet exercice en incorporant 2π.*

La famille (infinie) $(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est libre, et est contenue dans $\mathrm{Ker}(\theta)$, donc ce sous-espace vectoriel n'est pas de dimension finie.

3. Prenons $f \in \mathscr{C}_1^0$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\phi_n : x \mapsto \int_n^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et s'annule en n.

Une intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_n &= \left[\frac{\phi_n(t)}{t} \right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\phi_n(n+1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\mathrm{d}t \ \ \textit{(car } \phi_n(n) = 0\textit{)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, par définition et, f étant 1-périodique,

$$\phi_n(n+1) = \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \phi_0(1),$$

donc

$$W_n = \frac{\phi_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = t - n$ montre (avec la périodicité de f) que

$$\phi_n(x) = \int_0^{x-n} f(u+n)\mathrm{d}u = \int_0^{x-n} f(u)\mathrm{d}u = \phi_0(x-n)$$

et la fonction ϕ_0 est continue sur le segment $[0{,}1]$, donc elle est bornée, et l'égalité ci-dessus formule précédente montre que $\|\phi_n\|_\infty^{[n\,;\,n+1]} = \|\phi_0\|_\infty^{[0\,;\,1]}$.
Ainsi, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale

$$\left|\int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\mathrm{d}t\right| \leqslant \|\phi_0\|_\infty^{[0\,;\,1]} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ainsi, les raisons usuelles que je vous laisse détailler, $\int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est le terme général d'une série convergente.
Ainsi

- Si $f \in \mathrm{Ker}(\theta)$ alors $\phi_0(1) = 0$, donc $\sum W_n$ converge.
- Sinon, W_n est somme des termes généraux d'une série convergente et d'une série divergente, donc $\sum W_n$ diverge.

F. 1. Si $a \neq 0$, alors

$$\theta(h_a)(x) = \int_x^{x+1} \mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}(\mathrm{e}^{a(x+1)} - \mathrm{e}^{ax}) = \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a}h_a(x)$$

ainsi h_a (qui est non nulle) est vecteur propre de θ associé à la valeur propre $\frac{\mathrm{e}^a-1}{a}$.
Quant à $h_0 = 1$, on a vu en A.1 qu'il est vecteur propre de θ associé à la valeur propre 1.

2. La fonction $h : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\forall u \neq 0,\ h'(u) = \frac{g(u)}{u^2} \quad \text{où} \quad g(u) = u\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^u + 1.$$

Cette fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(u) = u\mathrm{e}^u$ qui est du signe de u. Donc g est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Étant nulle en 0, elle reste positive sur $\mathbb{R}$, ainsi h' est positive sur $\mathbb{R}^*$, et on en déduit que h croît sur chaque intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et $]-\infty\ ;\ 0[$.

Remarque : on a $h(u) \to 1$ quand $u \to 0$. h est donc prolongeable par continuité et on a croissance de la fonction prolongée sur $\mathbb{R}$.

3. D'après la question C.1, $\frac{\mathrm{e}^a - 1}{a}$ est dans le spectre de a pour tout $a \in \mathbb{R}^*$. Or l'étude des variations de $\varphi : a \mapsto \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a}$ dans la question précédente montre que $\varphi(\mathbb{R}^*) =]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Comme 0 et 1 sont aussi valeurs propres (fonctions c_1 et 1 par exemple), on peut conclure que

$$Sp(\theta) \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+.$$

Partie III : une suite de fonctions propres

1. (a) La fonction $\rho : t \mapsto t\sin(2t) - t^2 - \sin^2(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \rho'(t) = 2t\cos(2t) - 2t = -4t\sin^2(t),$$

elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc sur chaque I_k.

Comme de plus $\rho(0) = 0$, on peut affirmer que ρ est strictement négative sur I_k.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction g est dérivable sur I_k, pour plusieurs raisons dont le fait que sin est strictement positive sur les I_k.

De plus

$$\forall t \in \mathrm{I}_k,\ g'(t) = \frac{\rho(t)}{t\sin^2(t)} < 0.$$

Ainsi g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I_k à dérivée non nulle sur I_k, donc elle réalise donc une bijection de I_k dans son image $g(\mathrm{I}_k)$ qui, par décroissance de g, vaut

$$g(\mathrm{I}_k) = \left] \lim_{(2k+1)\pi} g, \lim_{2k\pi} g \right[.$$

Remarquons que pour tout $t \in \mathrm{I}_k$,

$$g(t) = \frac{t\cos(t) + \sin(t)\ln(\sin(t))}{\sin(t)} - \ln(t) - \ln(\lambda).$$

Donc quand t tend vers $2k\pi$ comme vers $(2k+1)\pi$,

- $-\ln(t) - \ln(\lambda)$ tend vers un réel fini,
- $\sin(t)$ tend vers 0 par valeurs strictement positives, donc par croissances comparées $\sin(t)\ln(\sin(t))$ tend vers 0 et $\frac{1}{\sin(t)}$ tend vers $+\infty$, ainsi :
  - quand $t \underset{>}{\longrightarrow} 2k\pi$,
  $$t\cos(t) + \sin(t)\ln(\sin(t)) \xrightarrow[t \longrightarrow 2k\pi]{} 2k\pi > 0,$$
  d'où $g(t) \xrightarrow[t \longrightarrow 2k\pi]{} +\infty$,
  - quand $t \underset{<}{\longrightarrow} (2k+1)\pi$,
  $$t\cos(t) + \sin(t)\ln(\sin(t)) \xrightarrow[t \longrightarrow (2k+1)\pi]{} (2k+1)\pi < 0,$$
  donc $g(t) \xrightarrow[t \longrightarrow 2k\pi]{} -\infty$.

  On peut donc conclure que $\boxed{g(\mathrm{I}_k) = \mathbb{R}}$.

2. (a) Le nombre γ étant non nul, on a pour tout réel x,

$$\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{\gamma(x+1)} - \mathrm{e}^{\gamma x}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\gamma} - 1}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma x}$$

(b) Notons $h : t \mapsto \mathrm{e}^{a\,t}\cos(b\,t)$, et remarquons que $h(t) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{\gamma\,t}\right)$.
Pour tout réel x

$$\theta(h)(x) = \int_x^{x+1} \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\mathrm{d}t = \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}t\right)$$
$$= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{e}^{\gamma} - 1}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma x}\right)$$

Ainsi $h : t \mapsto e^{at}\cos(bt) \in E_\lambda(\theta)$ si et seulement si $\theta(h) = \lambda h$, autrement dit, pour tout réel x :

$$\theta(h)(x) = \lambda h(x) \Longleftrightarrow \mathbb{R}e\left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma} e^{\gamma x}\right) = \mathbb{R}e\left(\lambda e^{\gamma x}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \mathbb{R}e\left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma} e^{ax} \times e^{ibx}\right) = \mathbb{R}e\left(\lambda e^{ax} e^{ibx}\right)$$

$$\Longleftrightarrow e^{ax}\,\mathbb{R}e\left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma} e^{ibx}\right) = e^{ax}\,\mathbb{R}e\left(\lambda e^{ibx}\right) \quad \textit{(grâce à la } \mathbb{R}\textit{-linéarité de } z \mapsto \mathbb{R}e(z)\textit{, sachant } e^{ax} \in \mathbb{R}\textit{),}$$

$$\Longleftrightarrow \mathbb{R}e\left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma} e^{ibx}\right) = \mathbb{R}e\left(\lambda e^{ibx}\right) \quad \textit{(car } e^{ax} > 0\textit{).}$$

➟ Si cette condition est vraie alors

- pour $x = 0$ on obtient $\lambda = \mathbb{R}e\left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma}\right)$,
- et pour $x = \frac{\pi}{2b}$ on obtient $\mathrm{Im}\left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma}\right) = 0$ ($\mathbb{R}e(i\square) = -\mathrm{Im}(\square)$!) ;

par conséquent, si h est vecteur propre de θ associé à λ, alors :

$$\lambda = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} (\text{ d'où } \tfrac{e^\gamma - 1}{\gamma} \in \mathbb{R}).$$

➟ La réciproque est immédiate grâce aux équivalences ci-dessus.

3. Ainsi, pour tout $\lambda \in]0 ; +\infty[$, $t \mapsto e^{at}\cos(bt)$ est un vecteur propre de θ associé à λ si, et seulement si,

$$\lambda = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} \Longleftrightarrow \lambda\gamma = e^\gamma - 1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} e^a\cos(b) - 1 = \lambda a \\ e^a \sin(b) = \lambda b, \end{cases} \quad \textit{(en posant } \gamma = a + ib\textit{),}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} e^a\cos(b) - 1 = \lambda a \\ e^a = \frac{\lambda b}{\sin(b)} \Leftrightarrow a = -\ln\left(\frac{\sin(b)}{\lambda b}\right), \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda b}{\sin(b)}\cos(b) - 1 = -\lambda \ln\left(\frac{\sin(b)}{\lambda b}\right) \\ a = -\ln\left(\frac{\sin(b)}{\lambda b}\right), \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} g(b) = \frac{1}{\lambda} \\ a = -\ln\left(\frac{\sin(b)}{\lambda b}\right), \end{cases}$$

Or on a vu que g met en bijection chaque intervalle I_k et $\mathbb{R}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $b_k \in \mathrm{I}_k =]2k\pi\ ;\ (2k+1)\pi[$ tel que $g(b_k) = 1/\lambda$.

Puis la fonction sin étant strictement positive sur I_k, on est sûr que $\frac{\sin(b_k)}{\lambda b_k} > 0$, d'où l'existence de

$$a_k = -\ln\left(\frac{\sin(b_k)}{\lambda b_k}\right).$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, avec les valeurs de a_k et b_k obtenues ci-dessus, la fonction $f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{a_k t} \cos(b_k t)$ est un vecteur propre de θ associé à la valeur propre λ.